ПМТФ, № 1, 1967

НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПРИ КОНЕЧНЫХ МАГНИТНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Б. В. Елисеев, А. Д. Лобанов

(Истра)

Течения при конечных магнитных числах Рейнольдса характеризуются сильным влиянием индуцированных магнитных полей на поток. В данной работе найдено распределение тока и произведены оценки влияния перпендикулярной к потоку компоненты силы Лоренца в двумерном канале с электродами, а также произведены оценки влияния неоднородностей скорости на пути тока при течении несжимаемой жидкости в случае, когда характерные магнитные числа Рейнольдса не являются малыми.

1. Некоторые свойства индуцированных магнитных полей в двумерном канале. Задача об определении индуцированного магнитного поля при МГД-течении в двумерном канале решалась во многих работах (см., например, [1-4]). В работах [1-3] магнитное поле определялось по заданному распределению тока, хотя в действительности ток зависит от магнитного поля. Рассмотрим несколько иной математический подход к решению этой задачи для двумерного канала ограниченных размеров. Найдем распределение тока и магнитного поля, считая скорость течения u_0 (по оси x) постоянной.

Пусть H_1 и H_3 — соответственно x- и z-компоненты индуцированного магнитного поля; H_0 — внешнее поле, направленное по оси z; L — длина канала; b — размер канала вдоль внешнего магнитного поля; l — расстояние между электродами.

Индуцированное поле определяется из системы (зависимость от y не учитывается)

$$H_{3x} - H_{1z} = R(H_3 + H_0), \quad H_{1x} + H_{3z} = 0, \quad H_{3x} = \partial H_3/\partial x \text{ и т. д.}$$
$$R = 4\pi\sigma u_0$$

Для упрощения всюду в данной работе считаем, что электрическая цепь замкнута накоротко, а внешнее магнитное поле задано и создается без помощи ферромагнитных материалов.

Полагая

$$H_1 = -A_z, \; H_3 = A_x$$

получим

$$\triangle A = R\,(A_x + H_0), \quad \triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2 \tag{1.1}$$

Правая часть уравнения (1.1) пропорциональна току, и, следовательно, решение его есть

$$A = \lambda \int\limits_0^L\int\limits_0^b \ln \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}\,(A_{x'} + H_0)\,dx'\,dz', \qquad \lambda = \frac{R}{2\pi}$$

Компонента поля H_3 определяется как решение интегрального уравнения Фредгольма

$$H_3 = \lambda \int\limits_0^L \int\limits_0^b \frac{(x-x')\,(H_0 + H_3)}{(x-x')^2 + (z-z')^2}\,dx'\,dz' \tag{1.2}$$

при условии

$$\lambda \left| \int_0^L \int_0^b K\, dx'\, dz' \right| < 1$$

Здесь K — ядро интегрального уравнения (1.2), для решения этого уравнения можно применить метод последовательных приближений.

Первое приближение дает

$$H_3 = \lambda \int_0^L \int_0^b \frac{(x-x')\, H_0}{(x-x')^2 + (z-z')^2}\, dx'\, dz'$$

В этом приближении при $b\,/\,L \ll 1$ компонента H_3 слабо зависит от z и является нечетной относительно $x = {}^1/_2 L$. При значениях x, не близких к граничным

$$H_3 = \lambda b H_0 \ln \frac{x}{L-x}$$

Компонента H_1 в первом приближении равна

$$H_1 = \lambda H_0 \int_0^L \int_0^b \frac{(z'-z)\, dx'\, dz'}{(x-x')^2 + (z-z')^2}$$

Функция $H_1\,(x,\, z)$ — четная относительно $x = {}^1/_2 L$ и нечетная относительно $z = {}^1/_2 b$. При малых $b\,/\,L$ компонента H_1 линейна по z

$$H_1 = R\,({}^1/_2\, b - z)\, H_0$$

если значения x не близки к граничным. На границах канала

$$H_1 = {}^1/_2\, R\,({}^1/_2\, b - z)\, H_0 \quad \text{при } x = 0,\ L$$

В другом предельном случае, когда $b \gg L$ при помощи непосредственной подстановки легко убедиться, что для значений z, не близких к граничным, уравнение (1.2) имеет решение

$$H_3 = H_0 \left(\frac{2 \exp Rx}{\exp RL + 1} - 1 \right) \tag{1.3}$$

Это полностью согласуется с решением, полученным в [5].

При $\lambda \to \infty$ подынтегральное выражение в (1.2) должно стремиться к нулю (т. е $H_3 \to -H_0$), так как H_3 должна оставаться конечной величиной. Этот вывод справедлив, однако, без учета магнитного поля тока во внешней электрической цепи.

2. Возникновение неодномерного течения в узком канале.

Рассмотренное выше приближение справедливо лишь при условии постоянства скорости течения u_0. Однако наличие по оси z силы

$$F = -\, j_0 H_1$$

(j_0 — компонента плотности тока по оси y) приводит к появлению компоненты скорости w (по оси z).

Этот эффект возникновения неодномерного течения рассматривался в [3], где оценивалось изменение продольной компоненты скорости. При этом, однако, предполагалось, что для такого течения можно применить уравнение Бернулли. Используя полученные выше приближенные выражения для полей при $Rb \lesssim 1$ для канала, в котором $b\,/\,L \ll 1$, можно показать (см. приложение), что сильная неоднородность появляется лишь на границах канала при $x = 0, L$; в точках же, удаленных от границы, сила F компенсируется градиентом давления и отношение w / u_0 мало, если $L \gg L_M = \rho u_0 / \sigma H_0^2$, т. е. если длина канала достаточно велика для того, чтобы магнитное поле могло воздействовать на поток.

Заметим, что отношение продольной компоненты силы Лоренца к поперечной есть отношение $H_1 / H_0 \sim Rb$, поэтому достаточным условием малого влияния индуцированных полей на поток может служить условие $Rb \ll 1$.

3. Течение с одномерным профилем скорости в широком канале. В магнитном поле малые градиенты плотности или скорости среды на пути тока могут приводить к существенному искажению линий тока, поскольку безразмерные параметры, характеризующие воздействие среды на протекание тока в ней, такие как произведение электронной циклотронной частоты на среднее время между столкновениями для электрона или магнитное число Рейнольдса, могут быть, вообще говоря, больше единицы (см., например, [6-8]). В [8] на примере некоторого заданного распределения корреляций скоростей в несжимаемой жидкости показано уменьшение тока между электродами при наличии хаотической турбулентности среды по сравнению с покоящейся жидкостью. Исследуем влияние неоднородностей скорости на ток при течении жидкости в широком ($b \gg L$) канале постоянного сечения. Пусть компонента скорости u (y) задана и не зависит от магнитного поля. Этот случай осуществляется, например, при движении металлических полос с различными скоростями.

Представим компоненту скорости u в виде $u = u_0 + u_1$, где u_0 — среднее значение u. Движение со скоростью u_0 создает магнитное поле H_3, определяемое соотношением (1.3). Наличие флуктуирующей составляющей u_1 приводит к возникновению электрического поля с потенциалом φ (x, y) и магнитного поля h_3 (x, y). Отметим, что для малых магнитных чисел Рейнольдса задача с неоднородностью скорости на пути тока решалась численно в [9].

Из уравнений магнитной гидродинамики для течения со скоростью u (y) следует

$$h_{3y} = 4\pi\sigma\varphi_x, \qquad H_{3x} + h_{3x} + 4\pi\sigma\,[\varphi_y - u\,(H_0 + H_3 + h_3)] = 0 \qquad (3.1)$$

Функции φ и h_3 должны удовлетворять следующим условиям: $\varphi = 0$ при $y = 0,\ l$; $\varphi_x = 0$ при $x = 0, L$; $h_{3y} = 0$ при $y = 0,\ l$.

Наиболее прост случай малых магнитных чисел Рейнольдса. При этом условии система (3.1) принимает вид

$$h_{3y} = 4\pi\sigma\varphi_x, \qquad H_{3x} + h_{3x} + 4\pi\sigma\,(\varphi_y - uH_0) = 0$$

Исключив магнитное поле, получим уравнение для потенциала

$$\Delta\varphi = u_y H_0$$

Решение этого уравнения не зависит от x и имеет вид

$$\varphi = \int_0^y uH_0 dy - \frac{y}{l}\int_0^l uH_0 dy$$

Отсюда следует, что

$$I_1 = 0, \qquad I_2 = -\sigma H_0 \langle u \rangle, \qquad \langle u \rangle = \frac{1}{l}\int_0^l u\,(y)\,dy$$

Здесь I_1 и I_2 — компоненты плотности тока.

При произвольных магнитных числах Рейнольдса RL рассмотрим влияние добавки u_1 как возмущение. Для этого достаточно, чтобы были малы относительная флуктуация скорости и отношение индуцированного флуктуациями магнитного поля к суммарному. В линейном приближении система (3.1) сводится к следующей:

$$h_{3y} = 4\pi\sigma\varphi_x, \qquad h_{3x} + 4\pi\sigma\,[\varphi_y - u_0 h_3 - u_1 (H_0 + H_3)] = 0$$

Функцию u_1 можно разложить по некоторой полной системе функций, например по системе $\cos n\pi y/l$. Распределение потенциала можно искать в этом случае в виде

$$\varphi = \sum_n \varphi_n (x) \sin \frac{n\pi y}{l}$$

Поправки к току, обусловленные n-й гармоникой возмущения u_{1n}, имеют вид

$$\frac{j_1}{j_0} = \frac{Ru_0}{\alpha^2} \frac{du_{1n}}{dy} \{1 + A_1 \exp [(k_1 - R) x] + A_2 \exp [(k_2 - R) x]\}$$

$$\frac{j_2}{j_0} = -\frac{u_{1n} R^2}{u_0 \alpha^2} \left\{1 + A_1 \frac{k_1}{R} \exp [(k_1 - R) x] + A_2 \frac{k_2}{R} \exp [(k_2 - R) x]\right\}$$

$$j_0 = -\sigma u_0 (H_3 + H_0)$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{l}, \qquad k_{1,\,2} = {}^1\!/_2 R \pm \sqrt{{}^1\!/_4 R^2 + \alpha^2}, \qquad A_1 = \frac{\exp RL - \exp k_2 L}{\exp k_2 L - \exp k_1 L}$$

Здесь j_0 — значение тока в отсутствие флуктуаций, A_2 получается из A_1 путем перестановки индексов.

Рассмотрим предельный случай крупномасштабной флуктуации и больших RL. Пусть размер флуктуации по оси y достаточно велик, так что $R^2/\alpha^2 \gg 1$, но в то же время выполнено условие $\exp (\alpha^2 L/R) \gg 1$ (при этом, очевидно, $\exp RL \gg 1$). Тогда для значений x, не очень близких к граничным

$$\frac{j_1}{j_0} = \frac{R}{\alpha^2 u_0} \frac{du_{1n}}{dy}, \qquad \frac{j_2}{j_0} = -\frac{R^2}{\alpha^2} \frac{u_{1n}}{u_0}$$

Рассмотрим другой предельный случай, когда размер флуктуации по y настолько велик, что выполнены условия

$$R/\alpha \gg 1, \quad \alpha^2 L/R \ll 1$$

(как и ранее $\exp RL \gg 1$).

Тогда для поправок к току получим при значениях x, не близких к граничным

$$\frac{j_1}{j_0} = \frac{1}{u_0} \frac{du_{1n}}{dy} (L - x), \qquad \frac{j_2}{j_0} - \frac{u_{1n}}{u_0} [1 + R (x - L)]$$

Как следует из рассмотренных предельных случаев, поправки к току могут быть существенными даже при малых относительных флуктуациях скорости, если велики магнитные числа Рейнольдса, определенные как по длине канала, так и по масштабу флуктуации.

Однако отношение диссипации энергии, обусловленной флуктуационной составляющей u_1 к суммарной

$$(\langle j_1^2 \rangle + \langle j_2^2 \rangle) / j_0^2$$

имеет порядок квадрата относительной флуктуации скорости без множителя, содержащего магнитное число Рейнольдса.

4. Распространение двумерных флуктуаций скорости в широком канале. При изучении распространения двумерных флуктуаций воспользуемся методом работы [10]. Будем считать, что на входе в канал заданы возмущения скорости и давления, и рассмотрим их распространение вниз по течению. Из уравнений непрерывности и движения

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{H}$$

исключая давление, получим

$$u_{1x} + v_y = 0, \qquad u_{1xy} - v_{xx} = 0 \tag{4.1}$$

Здесь u, v — компоненты возмущения скорости.

Как и ранее, разложим величины, обращающиеся в нуль на электродах по системе функций $\sin n\pi y/l$. Рассмотрим распространение крупномасштабной флуктуации при $n = 1$. Ищем решение в виде

$$v = v(x)\sin\beta y, \qquad u_1 = u_1(x)\cos\beta y, \qquad \beta = \pi/l$$

Из системы (4.1) получим

$$v = (C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x})\sin\beta y, \qquad u_1 = (C_2 e^{-\beta x} - C_1 e^{\beta x} + C_3)\cos\beta y$$

Кэоффициенты C_i определяются через заданные значения флуктуаций на входе в канал

$$C_1 + C_2 = v(0), \quad C_2 + C_3 - C_1 = u_1(0), \quad C_1 - C_2 = p_1(0)/\rho u_0$$

Последнее уравнение получается из линеаризованного уравнения движения

$$\rho u_0 u_x = -p_{1y} - j_1(H_0 + H_3)$$

если учесть условие $j_1 = 0$ при $x = 0$.

Определим теперь распределение магнитных полей и потенциала из системы

$$h_{3y} = 4\pi\sigma[\varphi_x + v(H_0 + H_3)], \quad h_{3x} + 4\pi\sigma[\varphi_y - u_1(H_0 + H_3) - u_0 h_3] = 0 \tag{4.2}$$

Граничные условия для функций φ и h_3 аналогичны условиям, рассмотренным ранее. Из решения системы (4.2) следует

$$h_3 = -\frac{4\pi\sigma}{\beta}\left[(H_0 + H_3)\left(\frac{R}{\beta}C_3 + C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}\right) + C_4 e^{\gamma_1 x} + C_5 e^{\gamma_2 x}\right]\cos\beta y,$$

$$\gamma_{1,2} = {}^1/_2 R \pm \sqrt{{}^1/_4 R^2 + \beta^2} \tag{4.3}$$

Значения постоянных C_4 и C_5 можно определить из условия

$$h_{3y} = 0 \qquad \text{при } x = 0, L$$

Функция h_3 из (4.3) определяется, вообще говоря, с точностью до слагаемого $C \exp Rx$, где C — постоянная величина. Это слагаемое опущено в выражении (4.3). Учитывая, что разность потенциалов на электродах, согласно (4.2), не зависит от C, следует принять равным нулю ток, обусловленный изменением h_3, т. е. положить $C = 0$.

Компоненты возмущения тока получаются дифференцированием h_3

$$j_1 = \sigma\left[(H_0 + H_3)\left(C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + \frac{R}{\beta} C_3\right) + C_4 e^{\gamma_1 x} + C_5 e^{\gamma_2 x}\right] \sin \beta y$$

$$j_2 = \sigma\left\{\left[C_1\left(1 + \frac{R}{\beta}\right) e^{\beta x} + C_2\left(\frac{R}{\beta} - 1\right) e^{-\beta x} + \right.\right. \tag{4.4}$$

$$\left.\left. + \frac{R^2}{\beta^2} C_3\right](H_0 + H_3) + C_4 \frac{\gamma_1}{\beta} e^{\gamma_1 x} + C_5 \frac{\gamma_2}{\beta} e^{\gamma_2 x}\right\}$$

$$C_4 = \frac{f(L) - f(0) \exp \gamma_2 L}{\exp \gamma_2 L - \exp \gamma_1 L}$$

$$f(x) = (H_0 + H_3)\left(\frac{RC_3}{\beta} + C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}\right)$$

Значение постоянной C_5 можно получить из C_4 путем перестановки индексов.

Ранее рассмотренный пример одномерного профиля скорости можно получить из этого решения, если положить $C_1 = C_2 = 0$.

Из выражений для возмущения тока (4.4) следует, что к аналогичной картине сильного искажения тока приводят и возмущения скорости в направлении тока. Пусть, например, $C_2 = C_3 = 0$. В предельном случае $\exp RL \gg 1$, $R / \beta \gg 1$, $\beta^2 L / R \ll 1$ выражения для поправок к току (4.4) принимают вид (если значения x не близки к граничным)

$$\frac{j_1}{j_0} = \frac{C_1}{u_0}(e^{\beta L} - e^{\beta x}), \qquad j_2 = \frac{R}{\beta} j_1$$

Итак, на приведенных примерах показано, что течение несжимаемой жидкости в канале при больших магнитных числах Рейнольдса, распространение возмущений в канале, влияние неоднородностей скорости на ток существенно определяются размерами канала и условиями на его границах (наличием или отсутствием ферромагнитных материалов). В широком канале (в канале с одномерным магнитным полем) малые флуктуации скорости на пути тока могут приводить к сильному искажению тока. В узком канале индуцированные магнитные поля приводят к неоднородному течению на входе и выходе из канала при возрастании минимального магнитного числа Рейнольдса.

5. Приложение. Будем рассматривать влияние индуцированных магнитных полей как возмущение и запишем линеаризованную систему уравнений для возмущений скорости u_1, w и возмущения давления p_1

$$\rho u_0 u_{1x} = -p_{1x} - 2\sigma u_0 H_0 H_3 - \sigma u_1 H_0^2$$

$$\rho u_0 w_x = -p_{1z} + \sigma u_0 H_1 H_0, \quad u_{1x} + w_z = 0$$

Предполагаем, что H_3 зависит только от x и является нечетной относительно $^1/_2 L$, а H_1 зависит только от z. Исключая u_1 и p_1, получим уравнение для w

$$w_{xxx} + w_{zzx} + k_0 w_{zz} = 0, \qquad k_0 = \sigma H_0^2 / \rho u_0 = 1 / L_M$$

Так как w должна обращаться в нуль на стенке канала, то решение этого уравнения можно записать в виде

$$w = \sum_{s,\,n} C_s \exp k_s x \sin \tau z, \qquad \tau = n\pi / b, \qquad k_s^3 = \tau^2 (k_0 + k_s) \tag{5.1}$$

Здесь C_s — некоторые постоянные. Суммирование по s производится от единицы до трех. Функции u_1 и p_1 можно получить при помощи интегрирования по x

$$u_1 = u_1(0, z) + \sum_{s,\,n} \frac{C_s \tau}{k_s} [1 - \exp(k_s x)] \cos \tau z$$

$$p_1 = p_1(0, z) - \sigma H_0^2 u_1(0, z)\, x - 2\sigma u_0 H_0 \int_0^x H_3 dx -$$

$$- \sigma H_0^2 \sum_{s,\,n} \frac{C_s \tau}{k_s}\left\{x + [1 - \exp(k_s x)]\left(\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_0}\right)\right\} \cos \tau z$$

Для определения коэффициентов C_s используем условия непрерывности давления и нормальной компоненты скорости на входе и выходе из канала. Зададим, например, значения возмущений u_1 и p_1 на входе и возмущения давления p_1 на выходе (для упрощения будем считать их равными нулю, поскольку эти значения определяются условиями вне канала). При этом для коэффициентов C_s получим систему

$$\sum_s \frac{C_s}{k_s} = 0, \quad \sum_s C_s k_s \exp k_s L = k_0 u_0 \frac{H_{1n}}{H_0}, \quad \sum_s C_s k_s (\exp k_s L - 1) = 0$$

Здесь H_{1n} — коэффициенты разложения функции H_1 по системе функций $\sin n\pi z/b$. При $\tau \gg k_0$ выражение для w имеет вид

$$\frac{w}{u_0} = \sum_n \frac{k_0}{\tau} \frac{H_{1n}}{H_0} \left[e^{\tau(x-L)} - e^{-\tau x} + \frac{k_0}{\tau} e^{-k_0 x} \right] \sin \tau z$$

При значениях x, не близких к граничным (x, $L - x \gg b$), в выражении для w существен последний член, однако при $k_0 x \gg 1$ и он является экспоненциально малым. Максимальное значение w достигается на границе

$$\frac{w(0, z)}{u_0} = \sum_n \frac{k_0 R}{\tau^2} [1 + (-1)^n] \sin \tau z$$

Условие $\tau \gg k_0$, вообще говоря, может быть не выполнено при не слишком больших значениях n. В этом случае характеристическое уравнение (5.1) имеет один положительный действительный корень k_1 и два комплексно сопряженных $k_{2,3} = \varkappa_1 \pm i\varkappa_2$ с отрицательной действительной частью (например при $k \ll k_0$, $k = (k_0\tau^2)^{1/3}$). Пусть условие $\tau \gg k_0$ не выполнено при $n = 1$ (при этом, очевидно, $L \gg L_M$). Обозначим через w_1 первый член ряда в разложении w по системе функций $\sin n\pi z/b$

$$w_1 = (S_1 e^{k_1 x} + S_2 e^{\varkappa_1 x} \sin \varkappa_2 x + S_3 e^{\varkappa_1 x} \cos \varkappa_2 z) \sin \tau z$$

Если использовать те же граничные условия, то коэффициент S_1 будет пропорционален $\exp(-k_1 L)$. Следовательно, и в случае $b \gg L_M$ при $L \gg L_M$ действие компоненты H_1 вызывает неодномерное течение лишь на границах канала, все три экспоненты в выражении для w_1 являются затухающими, возмущение w_1 убывает вдали от границ канала.

Поступила 10 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Berlot R. R. On the magnetic field in MHD channel flow. J. Aerospace sci., 1962, vol. 29, No. 5.
2. McCune J. E. Sears W. R. On magnetohydrodynamic channel flow. J. Aerospace sci., 1960, vol. 27, No. 2.
3. Pitkin E. T. Nonuniformities in magnetogasdynamic channel flow. J. Aerospace sci., 1961, vol. 28, No. 12.
4. Михайлов Ю. М. Жидкометаллические МГД-генераторы при больших магнитных числах Рейнольдса. Магнитная гидродинамика, 1965, № 4.
5. Pain H. J., Smy P. R. Experiments on power generation from a moving plasma. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10.
6. Велихов Е. П. Неустойчивость тока в слабоионизованной плазме, вызванная эффектом Холла. Докл. на Международном симпозиуме по МГД-методу генерации энергии. Ньюкасл, 1962.
7. Дыхне А. М. Турбулентная проводимость слабоионизованной плазмы в магнитном поле. Докл. на Парижской конференции по ионизационным явлениям в газах, Париж. 1963.
8. Steenbeck M. Elementare magnetohydrodynamische Behandlung chaotisch turbulenter Medien. Monatsber. Deutsch. Akad. Wissenschaften, 1963, B. 5, H. 10.
9. Denison M. R., Ziemer R. W. Investigation of the phenomena in crossed-field plasma accelerators. Phys.-chem. diagnostics of plasmas, Northwestern university press, Evanston, 111, 1964.
10. Horlock J. H. Some two-dimensional magnetofluiddynamic flows at low magnetic Reynolds number. J. Fluid Mech., 1963, vol. 16, p. 1.