магнитного поля. Так, в эксперименте получено увеличение магнитного поля в 2,5 раза за время 10 мкс.

Авторы выражают благодарность А. А. Дерибасу, А. Е. Войтенко, А. А. Румянцеву за внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступила 12 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
2. **Войтенко А. Е., Соболев О. П.** Некоторые случаи ускорения магнитогидродинамической ударной волны.— ПМТФ, 1968, № 2, с. 51.
3. **Бай-ши-и.** Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М., «Мир», 1964.
4. **Берд Г. А.** Ультравысокие температуры при взаимодействии ударной волны с волнами разрежения.— Сб. пер. Механика, 1966, № 1, с. 95.
5. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошной среды. М., Гостехиздат, 1953.
6. **Войтенко А. Е.** Получение газовых струй большой скорости.— «Докл. АН СССР», 1964, т. 158, № 6, с. 1278.
7. **Войтенко А. Е.** Сильные ударные волны в воздухе.— ЖТФ, 1966, т. 36, № 1, с. 178.
8. **Кузнецов Н. М.** Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах. М., «Машиностроение», 1965.
9. **Спитцер Л.** Физика полностью ионизированного газа. М., ИЛ, 1957.
10. **Chu C. K.** Dynamics of ionizing shock waves; Shocks in transverse magnetic field.— «Phys. Fluids», 1964, vol. 7, N 8.
11. **Закайдаков В. В., Сынах В. С.** Распространение ударных волн в неоднородной плазме.— ПМТФ, 1976, № 2.
12. **Войтенко А. Е., Любимова М. А., Соболев О. П., Сынах В. С.** Градиентное ускорение ударной волны и возможные применения этого эффекта. Препринт 14-70. Новосибирск, Ин-т ядерной физики СО АН СССР, 1970.
13. **Freiwold D. A.** Strong shock propogation through decreasing density.— «J. Fluid Mech.», 1972, N 54, pt 2, p. 297.

УДК 538.4

ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

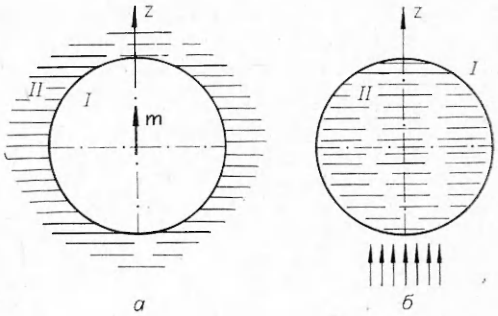
В. И. Яковлев

(Новосибирск)

1. Переменные электромагнитные поля используются во многих магнитогидродинамических процессах (для удержания и стабилизации плазмы [1], для перемешивания жидких металлов [2], управления процессом литья [3] и др.). В большинстве случаев силы Лоренца $(1/c)[\mathbf{j}\times\mathbf{H}]$ в проводящей среде не являются потенциальными (следовательно, не могут быть скомпенсированы градиентом давления) и приводят к возникновению вихревого течения проводящей среды. Кроме этого, непотенциальные электромагнитные силы могут оказаться удобным средством для создания «эталонных» вихревых течений для исследовательских целей, так как интерес к последним далеко не исчерпан [4].

Вследствие сложного характера распределения сил Лоренца индуцированное течение может быть весьма своеобразным; это подчеркивает интерес к исследованию вихревых течений в переменных электромагнитных полях.

Из-за нелинейности уравнений магнитной гидродинамики эти задачи в общем случае можно исследовать лишь с использованием современных численных методов. В данной работе с помощью упрощающих предположений, приводящих к линеаризации уравнений, получены точные решения двух задач (внешней и внутренней) со сферической границей раздела проводящей жидкости с непроводящим пространством.



Фиг. 1

Во внешней задаче проводящая жидкость занимает все бесконечное пространство вне твердого непроводящего шара радиуса r_0. Переменное с частотой ω электромагнитное поле создается переменным током, локализованным в небольшой окрестности центра шара. Вследствие этого в первом приближении система токов заменяется переменным магнитным моментом. Рассмотрен случай, когда магнитный момент меняется только по величине, направление сохраняется, т. е. $\mathbf{m} = m_0 e^{i\omega t}\mathbf{e}_z$ (фиг. 1, *а*).

Во внутренней задаче проводящая жидкость заполняет шаровую полость; полость с жидкостью находится в переменном внешнем магнитном поле $\mathbf{H}_0 e^{i\omega t}$, $\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{e}_z = H_0(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta)$ (фиг. 1, *б*).

В дальнейшем о задачах, схематически изображенных на фиг. 1, говорится как о задачах *а*, *б* соответственно.

Решения получены при следующих предположениях:

1. Справедливо стоксово приближение в описании течения.
2. Магнитное число Рейнольдса мало, т. е.

$$\mathrm{Re}_m = 4\pi\sigma v_0 r_0/c^2 \ll 1 \tag{1.1}$$

(v_0 — характерная скорость возникающего течения; ν, σ — кинематическая вязкость и проводимость жидкости).

3. Исследуется поведение системы после выхода на периодический режим; процесс выхода на этот режим не рассматривается.
4. Частота ω удовлетворяет условию квазистационарности, т. е. $(\omega/c)r_0 \ll 1$.
5. Магнитная μ и диэлектрическая ε проницаемости всюду равны единице.

Фактически условие (1.1) следует из предположения 1, так как для всех проводящих жидкостей, включая электролиты и жидкие металлы, $\nu_m = c^2/4\pi\sigma \gg \nu$. Последние предположения 5 несущественны для решения и приняты для упрощения конечных формул.

Исследуемый процесс описывается уравнениями магнитной гидродинамики. В силу предположения (1.1) движение жидкости не оказывает влияния на изменение электрического и магнитного полей; электродинамическая задача и задача определения течения, возникающего под действием сил Лоренца, оказываются, таким образом, разделенными. В аналогичной постановке задача о течении жидкости внутри бесконечно длинного цилиндра решена в [5]. Здесь внешнее переменное магнитное поле направлено перпендикулярно оси цилиндра.

2. Поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в рассматриваемых задачах удобно вычислять через вектор-потенциал $\mathbf{A}$

$$\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t; \quad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}.$$

В сферической системе координат (r, θ, α), связанной с границей раздела сред, вектор $\mathbf{A}$ имеет только одну компоненту $\mathbf{A} = A(r, \theta, t)\mathbf{e}_\alpha$, причем вследствие осевой симметрии $\partial/\partial\alpha \equiv 0$. Вектор $\mathbf{A}$ определяется уравнениями

$$\Delta \mathbf{A}_1 = 0; \tag{2.1}$$

$$\partial \mathbf{A}_2/\partial t = (c^2/4\pi\sigma)\Delta \mathbf{A}_2 \tag{2.2}$$

и граничными условиями

$$A_1|_{r=r_0} = A_2|_{r=r_0}; \tag{2.3}$$

$$\left.\frac{\partial A_1}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{\partial A_2}{\partial r}\right|_{r=r_0}; \tag{2.4}$$

$$A_2|_{r\to\infty} \neq \infty; \tag{2.5а}$$

$$A_1|_{r\to\infty} \to (r/2) H_0 e^{i\omega t} \tag{2.5б}$$

(индексы 1, 2 относятся соответственно к непроводящей и проводящей областям (см. фиг. 1); соотношения, относящиеся только к одной из двух рассматриваемых задач, здесь и далее нумеруются цифрами с индексом а и б).

Кроме условий (2.3)—(2.5), решение задачи *а* при $r = 0$ должно иметь особенность (m_0/r^2) $\sin\theta e^{i\omega t}$, вызванную магнитным диполем m; решение задачи *б* должно быть ограниченным.

Периодическое решение уравнений (2.1), (2.2), удовлетворяющее перечисленным условиям, имеет вид

$$A_1 = m_0\left(C_1 r + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta e^{i\omega t},\quad A_2 = C_2\frac{3m_0}{r_0^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{r}}H_{3/2}^{(2)}(kr)\sin\theta e^{i\omega t};$$

$$C_1 = \frac{1}{r_0^3}\frac{(kr_0)H_{1/2}^{(2)}(kr_0)}{3H_{3/2}^{(2)}(kr_0) - (kr_0)H_{1/2}^{(2)}(kr_0)},\quad C_2 = \frac{1}{3H_{3/2}^{(2)}(kr_0) - (kr_0)H_{1/2}^{(2)}(kr_0)}$$

(для задачи *а*);

$$A_1 = \left(\frac{m_1}{r^3} + \frac{H_0}{2}\right)r\sin\theta e^{i\omega t},\quad A_2 = D_2\frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{r}}\sin\theta e^{i\omega t},$$

$$m_1 = -\frac{H_0 r_0^3}{2}\left(1 - \frac{3}{k^2r_0^2} + \frac{3}{kr_0}\operatorname{ctg} kr_0\right),\quad D_2 = 3r_0\sqrt{\frac{\pi}{8k}}\frac{1}{\sin kr_0}H_0$$

(для задачи *б*),

где $k = (1-i)/\delta$, $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ — толщина скин-слоя; постоянная m_1 имеет смысл амплитуды магнитного момента, приобретаемого проводящим шаром в поле $\mathbf{H}_0 e^{i\omega t}$; $H_\lambda^{(2)}(x)$ — вторые функции Ханкеля [6] порядка λ; $J_{3/2}(x)$ — функции Бесселя порядка 3/2.

3. Течение несжимаемой проводящей жидкости описывается уравнениями гидродинамики

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0; \tag{3.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{w}; \tag{3.2}$$

$$\partial\mathbf{w}/\partial t + \nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{w} = (1/\rho c)\operatorname{rot}[\mathbf{j}\times\mathbf{H}]. \tag{3.3}$$

Так как используется стоксово приближение, в последнем уравнении отброшен нелинейный член $\operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{w}]$. Входящие в правую часть (3.3) силы Лоренца $(1/c)[\mathbf{j}\times\mathbf{H}] = (\sigma/c)[\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_2]$ вычисляются по решению электродинамической части задачи и могут быть записаны в виде

(3.4) $$(1/c)\,[\mathbf{j}\times\mathbf{H}] = (\sigma/2c)\,\Big[\big(\mathscr{E}_2\overset{*}{\mathscr{H}}_{2r}\mathbf{e}_\theta - \mathscr{E}_2\overset{*}{\mathscr{H}}_{2\theta}\mathbf{e}_r\big) + \big(\mathscr{E}_2\mathscr{H}_{2r}\mathbf{e}_\theta - \mathscr{E}_2\mathscr{H}_{2\theta}\mathbf{e}_r\big)\,e^{2i\omega t}\Big],$$

где $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{H}_2$ — комплексные амплитуды в выражениях $E_2(r,\ \theta,\ t) = \mathscr{E}_2(r,\ \theta)e^{i\omega t}$, $\mathbf{H}_2(r,\ \theta,\ t) = \mathscr{H}_2(r,\ \theta)e^{i\omega t}$. Из (3.4) видно, что силовое поле состоит из стационарной и осциллирующей частей с удвоенной частотой. Вследствие этого и течение жидкости складывается из аналогичных составляющих.

Завихренность течения $\mathbf{w}$ имеет отличную от нуля α-компоненту, т. е. $\mathbf{w} = w(r,\ \theta,\ t)\mathbf{e}_\alpha$. Известны следующие граничные условия для $w(r,\ \theta,\ t)$:

(3.5а) $$w|_{r=\infty} \neq \infty;$$

(3.5б) $$w|_{r=0} \neq \infty.$$

При $r = r_0$ граничные условия для завихренности неизвестны. Решение уравнения (3.3) представляется в виде суммы

$$w\ (r,\ \theta,\ t) = (\Phi_0(r)/r)\sin 2\theta + (\Phi_1(r)/\sqrt{r})\sin 2\theta e^{2i\omega t},$$

где первое слагаемое описывает стационарное течение, второе — осциллирующее.

Функции $\Phi_0(r)$ для задач *а* и *б*, удовлетворяющие условиям (3.5а, б), имеют вид

$$\Phi_0(r) = C_0 r^{-2} + B_1\left[\left(\frac{3\delta}{4r^2} + \frac{1}{4r} - \frac{1}{6\delta} + \frac{r}{6\delta^2} - \frac{r^2}{3\delta^3}\right)e^{-\frac{2r}{\delta}} + \frac{2r^3}{3\delta^4}\int\limits_r^\infty x^{-1}e^{-\frac{2x}{\delta}}\,dx\right]$$

(для задачи *а*);

$$\Phi_0(r) = D_0 r^3 + B_2\left[\left(\frac{3\delta}{4r^2} - \frac{r^2}{3\delta^3}\right)\left(\sin\frac{2r}{\delta} - \operatorname{sh}\frac{2r}{\delta}\right) + \frac{1}{4r}\left(\operatorname{ch}\frac{2r}{\delta} - \cos\frac{2r}{\delta}\right) + \frac{r}{6\delta^2}\left(\operatorname{ch}\frac{2r}{\delta} + \cos\frac{2r}{\delta}\right) + \frac{1}{6\delta}\left(\sin\frac{2r}{\delta} + \operatorname{sh}\frac{2r}{\delta}\right) + \frac{2r^3}{3\delta^4}\int\limits_0^r x^{-1}\left(\cos\frac{2x}{\delta} - \operatorname{ch}\frac{2x}{\delta}\right)dx\right]$$

(для задачи *б*), где $B_1 = \dfrac{9}{20\pi^2}\dfrac{m_0^2}{r_0^3}\dfrac{1}{\rho\nu\delta}|C_2|^2$, $B_2 = \dfrac{1}{20\sqrt{2}\,\pi^2}\dfrac{1}{\rho\nu\delta}|D_2|^2$;

C_0, D_0 —произвольные константы, которые будут найдены при определении поля скоростей.

Приведем выражение для $\Phi_1(r)$, справедливое для задачи *а* в предельном случае сильного скин-эффекта, т. е. при $\delta \ll r_0$,

$$\Phi_1(r) = \alpha e^{-2(1+i)\frac{r-r_0}{\delta_1}} + \alpha_1 e^{-2(1+i)\frac{r-r_0}{\delta}},$$

$$\alpha_1 = i\left(\frac{3}{4\pi}\right)^2\frac{\sqrt{r_0}}{\rho\nu}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^2\left(\frac{m_0}{r_0^3}\right)^2 e^{-2(1+i)\frac{r_0}{\delta}}C_2^2,\quad \delta_1 = 2\sqrt{\frac{\nu}{\omega}},$$

α — неопределенная константа; δ_1 — «вязкий скин-слой», причем из-за $\nu \ll \nu_m = c^2/4\pi\sigma$ всегда $\delta_1 \ll \delta$.

4. По найденным завихренностям $\mathbf{w}_0 = (\Phi_0(r)/r) \sin 2\theta \mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{w}_1 = (\Phi_1(r)/\sqrt{r}) \sin 2\theta e^{2i\omega t} \mathbf{e}_\alpha$ поле скоростей определяется уравнениями (3.1), (3.2). Уравнение (3.1) тождественно удовлетворяется введением вектор-потенциалов $\Psi_0(r, \theta)\mathbf{e}_\alpha$ и $\Psi_1(r, \theta) e^{2i\omega t}\mathbf{e}_\alpha$ соответственно для скоростей стационарного и осциллирующего течений

$$\mathbf{v}^0 = \operatorname{rot}[\Psi_0(r, \theta)\mathbf{e}_\alpha], \quad \mathbf{v}^1 = \operatorname{rot}[\Psi_1(r, \theta)\mathbf{e}_\alpha] e^{2i\omega t}. \tag{4.1}$$

Решения для Ψ_0, Ψ_1 строятся разделением переменных

$$\Psi_0(r, \theta) = \psi_0(r) \sin 2\theta; \quad \Psi_1(r, \theta) = \psi_1(r) \sin 2\theta, \tag{4.2}$$

причем, согласно (3.2), функции $\psi_0(r)$, $\psi_1(r)$ должны удовлетворять уравнениям

$$(d^2/dr^2)(r\psi_0) - 6\psi_0/r = -\Phi_0(r); \tag{4.3}$$

$$(d^2/dr^2)(r\psi_1) - 6\psi_1/r = -\sqrt{r}\Phi_1(r) \tag{4.4}$$

и граничным условиям

$$\psi_i(r_0) \neq \infty, \ (d/dr)(r\psi_i)|_{r=r_0} = 0 \quad (i = 0{,}1),$$

$\psi_i(\infty) = 0$ (для задачи *а*), $\psi_i(0) \neq \infty$ (для задачи *б*). (На каждое уравнение (4.3), (4.4) второго порядка накладывается по три условия. Решение возможно, так как по одной свободной константе содержится в $\Phi_0(r)$ и $\Phi_1(r)$.)

Компоненты скорости $\mathbf{v}^0$, согласно (4.1), (4.2), выражаются через ψ_0 соотношениями

$$v_r^0 = (2\psi_0/r)(3\cos^2\theta - 1), \quad v_\theta^0 = -(1/r)(d/dr)(r\psi_0)\sin 2\theta \tag{4.5}$$

(выражения для v_r^1, v_θ^1 аналогичны).

В результате решения уравнения (4.3) получаются следующие выражения для величин, определяющих по (4.5) поле скоростей $\mathbf{v}^0$:

$$\frac{1}{r}\psi_0(r) = V_0 F_r^0(r), \ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\psi_0) = V_0 F_\theta^0(r). \tag{4.6}$$

Так как $F_\theta^0 = (1/r)\, d/dr\left(r^2 F_r^0\right)$, приведем выражения лишь для F_r^0. Для задачи *а*

$$F_r^0 = k_1 \frac{r_0}{r}\left\{7\chi(r_0)\frac{r_0}{r}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + 2\left[\chi(r_0)\frac{r_0^3}{r^3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \chi(r)\right] + 15\left[\frac{r_0\delta^2}{r^3}\left(2 + \frac{\delta}{r_0}\right) - \frac{\delta^2}{r^2}\left(2 + \frac{\delta}{r}\right)e^{-\frac{2(r-r_0)}{\delta}}\right]\right\};$$

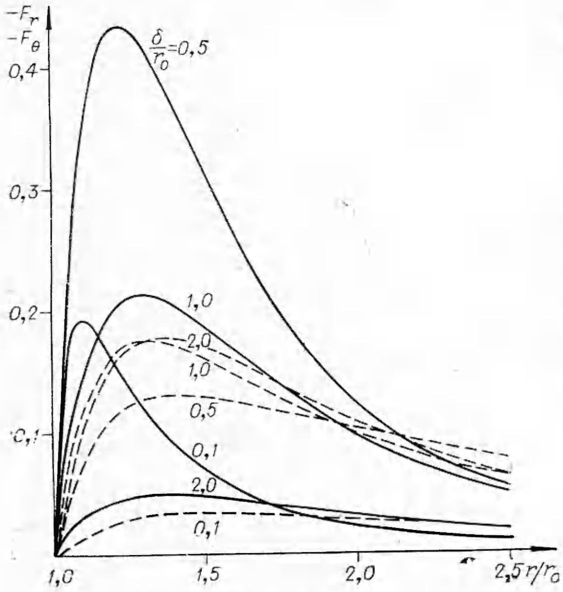
$$\chi(r) = \left(2\frac{r^2}{\delta^2} - 4\frac{r^3}{\delta^3} - 2\frac{r}{\delta} + 3 - 6\frac{\delta}{r}\right)e^{-\frac{2(r-r_0)}{\delta}} +$$

$$+ 8\frac{r^4}{\delta^4}\int_{r/r_0}^{\infty} x^{-1} e^{-\frac{2r_0(x-1)}{\delta}}\, dx,$$

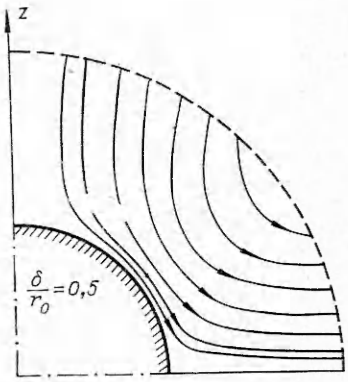
$$k_1 = \left[9\frac{\delta^2}{r_0^2}\left(1 + \frac{\delta}{r_0}\right)^2 + \left(2 + 3\frac{\delta}{r_0}\right)^2\right]^{-1};$$

размерная постоянная V_0, представляющая масштаб скорости, имеет значение

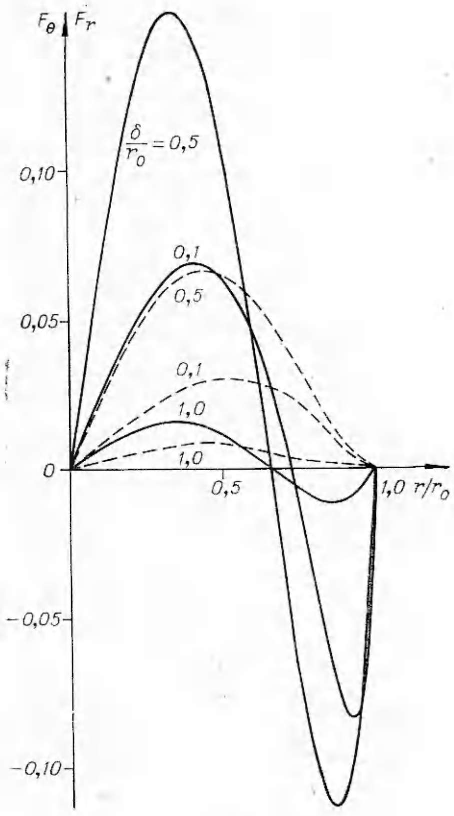
$$V_0 = \frac{3}{140}\frac{r_0}{8\pi\rho\nu}\left(\frac{m_0}{r_0^3}\right)^2.$$



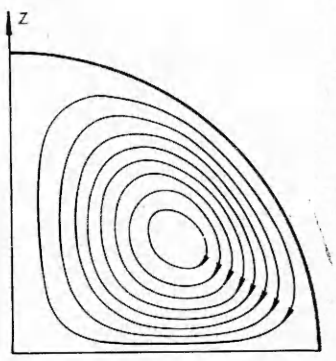
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Здесь параметр m_0/r_0^3 характеризует масштаб приложенного магнитного поля.

Безразмерные функции F_r^0, F_θ^0, определяющие по (4.3), (4.6) распределение по радиусу компонент v_r^0, v_θ^0 скорости стационарного течения, представлены на фиг. 2 для различных значений δ/r_0 (кривые для F_r^0 проведены штрихом).

В случае $\delta \ll r_0$ полученные формулы упрощаются. При этом

$$F_r^0 = \frac{105}{4}\frac{\delta^2}{r_0^2}\frac{1-(r/r_0)^2}{(r/r_0)^4}; \tag{4.7a}$$

$$F_\theta^0 = \frac{105}{2}\frac{\delta^2}{r_0^2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^4\left[1-\frac{r}{r_0}e^{-\frac{2(r-r_0)}{\delta}}\right]. \tag{4.8a}$$

Из (4.8а) видно, что θ — компонента скорости очень быстро (на расстоянии порядка δ от границы) выходит на максимальное значение, а затем как $(r_0/r)^4$ спадает до нуля; радиальная компонента, как видно из (4.7а), выходит на максимум лишь при $r=\sqrt{2}r_0$. Приведенные формулы показывают, что при малых δ скорость стационарного течения пропорциональна δ^2. Из фиг. 2 видно, что максимальных значений r и θ — компоненты скорости — достигают при $\delta/r_0 \approx 1{,}0$ и $\delta/r_0 \approx 0{,}5$ соответственно. При дальнейшем увеличении δ скорости падают.

Наглядное представление о характере стационарного течения можно получить из фиг. 3, где представлены линии тока (линии постоянных значений $r\psi_0(r)\sin 2\theta \sin\theta$) для случая $\delta/r_0 = 0{,}5$. Так как $v_\alpha \equiv 0$, линии тока представляют собой плоские кривые, лежащие в плоскостях $\alpha = \text{const}$. На фиг. 3 изображены линии тока в верхней полусфере; течение в нижней полусфере симметрично относительно плоскости $z = 0$ (или $\theta = \pi/2$), поэтому оно не представлено.

Для задачи *б* выражение для F_r^0 имеет вид

$$F_r^0 = k_2\frac{r}{\delta}\left\{\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)\left[\chi_1(r_0)-\frac{5}{2}\chi_2(r_0)\right]+\right.$$
$$\left.+\chi_1(r)+\chi_2(r)-\chi_1(r_0)-\chi_2(r_0)\right\},$$

$$\chi_1(r) = \left(\frac{r}{3\delta}-\frac{\delta}{6r}+\frac{\delta^3}{2r^3}\right)\sin\frac{2r}{\delta}-\left(\frac{1}{6}-\frac{\delta^2}{4r^2}\right)\cos\frac{2r}{\delta}-$$
$$-\left(\frac{\delta}{6r}+\frac{r}{3\delta}+\frac{\delta^3}{2r^3}\right)\operatorname{sh}\frac{2r}{\delta}-\left(\frac{\delta^2}{4r^2}+\frac{1}{6}\right)\operatorname{ch}\frac{2r}{\delta}-\frac{2r^2}{3\delta^2}\times$$
$$\times\int_0^{r/\delta} x^{-1}(\cos 2x-\operatorname{ch}2x)\,dx,$$

$$\chi_2(r) = \frac{5\delta^4}{8r^4}\left[\frac{\delta}{r}\sin\frac{2r}{\delta}-2\cos\frac{2r}{\delta}+\frac{\delta}{r}\operatorname{sh}\frac{2r}{\delta}-2\operatorname{ch}\frac{2r}{\delta}\right],$$

$$k_2 = \frac{r_0/\delta}{\left(\sin\frac{r_0}{\delta}\operatorname{ch}\frac{r_0}{\delta}\right)^2+\left(\cos\frac{r_0}{\delta}\operatorname{sh}\frac{r_0}{\delta}\right)^2},$$

$$V_0 = \frac{9}{560}\frac{r_0}{8\pi\rho\nu}\left(\frac{m_0}{r_0^3}\right)^2.$$

На фиг. 4 приведены функции F_r^0 и F_θ^0 в зависимости от безразмерного радиуса r/r_0 для значений $\delta/r_0 = 0{,}1$; $0{,}5$; $1{,}0$ (кривые для F_r^0

проведены штрихом). При $\delta/r_0 = 2{,}0$ значения F_r^0 и F_θ^0 практически обращаются в нуль и при выбранных на фиг. 4 масштабах изображены быть не могут. Из фиг. 4 видно, что максимальных значений скорость течения достигает примерно в районе $\delta/r_0 = 0{,}5$. Линии тока для этого значения $\delta/r_0 = 0{,}5$ даны на фиг. 5.

Приведем решение для осциллирующей части течения в случае $\delta \ll r_0$ (задача *а*). Решение уравнения (4.4), удовлетворяющее необходимым граничным условиям, имеет вид

$$\psi_1(r) = -V_1 r_0 \frac{\delta\delta_1^3}{r r_0^3}\left\{(1+i)\frac{r_0^2}{r^2}\left(\frac{r_0}{\delta_1} - \frac{r_0}{\delta}\right) - \left[(1+i)\frac{r_0}{\delta_1} - 1\right] e^{-2(1+i)\frac{r-r_0}{\delta}} + \right.$$

$$\left. + \left[(1+i)\frac{r_0}{\delta} - 1\right] e^{-2(1+i)\frac{r-r_0}{\delta_1}}\right\};$$

$$V_1 = \frac{9}{64}\frac{r_0}{8\pi\rho\nu}\left(\frac{m_0}{r_0^3}\right)^2.$$

Отсюда видно, что амплитуда радиальной составляющей v_r^1 скорости осциллирующей части течения очень быстро увеличивается от нулевого значения при $r = r_0$ до максимального значения $v_{\max}^1 = \sqrt{2}\,\frac{\delta\delta_1^2}{r_0^3} V_1$ при $r \approx r_0 + \delta$, а затем падает как $(r_0/r)^3$. Аналогично себя ведет компонента v_θ^1, причем ее максимальное значение в два раза выше, чем для v_r^1, падение происходит как $(r_0/r)^4$.

Сравнение $v_{\max}^1$ с максимальным значением радиальной компоненты скорости стационарного движения, равным $v_{\max}^0 = (105/4)\left(\delta^2/r_0^2\right)V_0$ (при $\delta \ll r_0$), показывает, что их отношение

$$\frac{v_{\max}^1}{v_{\max}^0} \sim \frac{\delta_1}{r_0}\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{\delta}{r_0}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^2 \lll 1,$$

т. е. скорости осциллирующего течения очень малы по сравнению со скоростью стационарного течения.

Автор выражает благодарность В. И. Хоничеву за помощь в получении численных величин.

Поступила 8 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Осовец С. М.** Динамические методы удержания и стабилизации горячей плазмы.— «Усп. физ. наук», 1974, т. 112, вып. 4.
2. **Повх И. Л., Капуста А. Б., Чекин Б. В.** Магнитная гидродинамика в металлургии. М., «Металлургия», 1974.
3. **Гецелев З. Н.** О формировании жидкого металла магнитным полем при непрерывном литье.— «Магнитная гидродинамика», 1972, № 4.
4. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их практические модели. М., «Наука», 1973.
5. **Sneyd A.** Generation of fluid motion in a circular cylinder by an unsteady applied magnetic field.— «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 49, p. 4.
6. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1958.