

УДК 532.592

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ ПРИ РАЗГОНЕ ЦИЛИНДРА ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

А. Е. Голиков, Н. И. Макаренко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: laro13@yandex.ru, makarenko@hydro.nsc.ru

Рассмотрена задача о движении кругового цилиндра с ускорением из состояния покоя под свободной поверхностью бесконечно глубокой идеальной жидкости. Используется метод сведения исходной математической постановки задачи к интегродифференциальной системе уравнений для функции, задающей форму свободной поверхности, а также для нормальной и тангенциальной составляющих скорости на свободной поверхности. Построено аналитическое продолжение поля скоростей внутрь области течения и определены нестационарные нагрузки на цилиндр, действующие на начальной стадии движения.

Ключевые слова: свободная граница, круговой цилиндр, гидродинамические нагрузки.

DOI: 10.15372/PMTF20220509

Введение. Задача о движении кругового цилиндра под свободной поверхностью является известной модельной задачей, рассматриваемой при изучении поведения морских конструкций “на волнении” [1, 2]. Данная задача активно исследовалась в рамках линейной теории (см. работы [3–5] и библиографию к ним). Однозначная разрешимость нелинейной нестационарной задачи о движении погруженного кругового цилиндра установлена в [6, 7] с помощью методики, разработанной для задачи Коши — Пуассона о свободных поверхностных волнах [8]. Начальная асимптотика решения в случае кругового цилиндра изучалась в работах [9–14], пространственная задача о движении погруженной сферы рассматривалась в [15, 16]. Численные методы решения задачи о движении тела под свободной поверхностью использовались в [17–23], лабораторные эксперименты проводились в [24, 25]. Нелинейные нагрузки на цилиндр при его колебательном движении изучались в работах [26, 27], а при поступательном движении с сопутствующим стационарным волновым следом — в [28]. В настоящей работе исследуются нестационарные гидродинамические силы, действующие на цилиндр при его заданном движении с постоянным ускорением из состояния покоя. Используется метод редукции к системе интегродифференциальных уравнений на свободной границе, модифицированный в [7, 13] для задачи о движении погруженного кругового цилиндра. Получены приближенные аналитические формулы для нагрузок, описывающие их зависимость от времени, направления движения, начального заглубления тела и его ускорения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-71-20039).

© Голиков А. Е., Макаренко Н. И., 2022

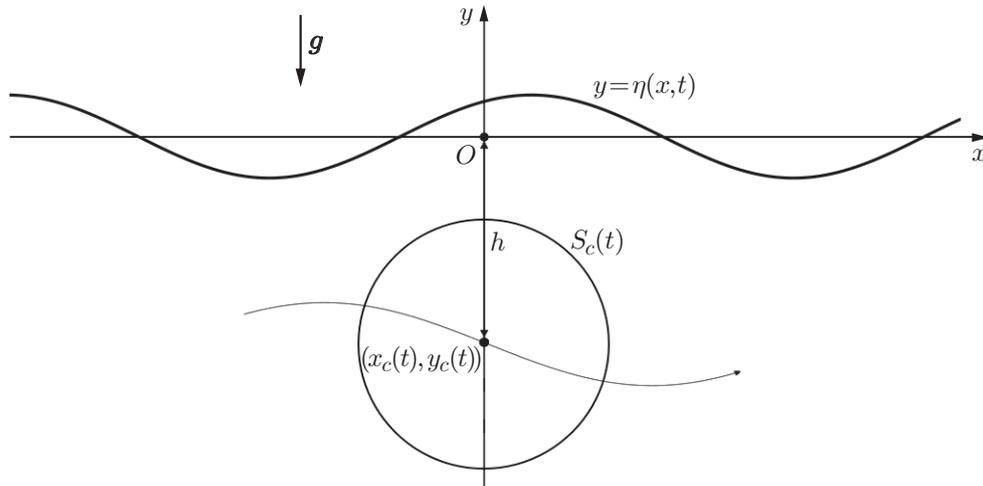


Рис. 1. Схема течения

1. Исходные уравнения. Рассматривается двумерное нестационарное безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Исходными являются уравнения Эйлера, записанные в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} U_t + UU_x + VU_y + p_x &= 0, & V_t + UV_x + VV_y + p_y &= -\lambda, \\ U_x + V_y &= 0, & U_y - V_x &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь U, V — компоненты вектора скорости жидкости \mathbf{u} ; p — давление; $\lambda = gh/u_0^2$ — квадрат обратного числа Фруда; g — ускорение свободного падения. Область течения в плоскости xOy (рис. 1) ограничена искомой свободной поверхностью $\Gamma(t)$: $y = \eta(x, t)$ с положением равновесия $y = 0$ и поверхностью кругового цилиндра

$$S_c(t): \quad (x - x_c(t))^2 + (y - y_c(t))^2 = r^2.$$

Предполагается, что центр сечения цилиндра $\mathbf{x}_c(t) = (x_c(t), y_c(t))$ движется по заданному закону. Масштабы выбраны таким образом, что все линейные размеры отнесены к начальному расстоянию h между осью цилиндра и невозмущенным уровнем свободной поверхности. В качестве масштабов времени t , скорости жидкости $\mathbf{u} = (U, V)$ и давления p приняты величины h/u_0 , u_0 , ρu_0^2 соответственно (ρ — плотность жидкости, u_0 — характерная скорость движения цилиндра). На свободной границе $\Gamma(t)$ должны выполняться кинематическое и динамическое условия

$$\eta_t + U\eta_x = V, \quad p = 0, \quad (x, y) \in \Gamma(t), \quad (2)$$

а на границе цилиндра — условие непротекания

$$(\mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}}_c(t)) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x, y) \in S_c(t) \quad (3)$$

(\mathbf{n} — нормаль к поверхности цилиндра). Полагается, что на бесконечности движение жидкости затухает:

$$(U, V) \rightarrow (0, 0), \quad \eta \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (4)$$

В момент времени $t = 0$ задаются форма свободной поверхности и поле скоростей в области течения:

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y).$$

При этом начальное поле скоростей $\mathbf{u}_0 = (U_0, V_0)$ и закон движения цилиндра $\mathbf{x}_c(t)$ должны удовлетворять условиям согласования

$$\begin{aligned} U_{0x} + V_{0y} &= 0, & U_{0y} - V_{0x} &= 0, & y < \eta_0(x) \\ (\mathbf{u}_0 - \dot{\mathbf{x}}_c(0)) \cdot \mathbf{n}_0 &= 0, & (x, y) &\in S_c(0), \end{aligned}$$

которые выполняются автоматически, в случае если цилиндр начинает движение с нулевой начальной скоростью в первоначально покоящейся жидкости:

$$\eta_0(x) \equiv 0, \quad \mathbf{u}_0(x, y) \equiv 0, \quad \dot{\mathbf{x}}_c(0) = 0 \quad (t = 0). \quad (5)$$

2. Редукция к уравнениям на свободной границе. Задача (1)–(5) допускает замкнутую формулировку в виде системы граничных интегродифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными x, t . В этой системе в качестве искомым величин наряду с функцией $\eta(x, t)$, характеризующей форму свободной поверхности, используются касательная и нормальная скорости жидкости u и v на кривой Γ :

$$u(x, t) = (U + \eta_x V)|_{y=\eta(x,t)}, \quad v(x, t) = (V - \eta_x U)|_{y=\eta(x,t)}.$$

Давление p исключается из рассмотрения с помощью динамического условия (2) путем проецирования векторного уравнения импульса в системе (1) на вектор $\boldsymbol{\tau} = (1, \eta_x)$, касательный к свободной границе $y = \eta(x, t)$. С учетом кинематического условия (2) отсюда получаем систему дифференциальных уравнений

$$\eta_t = v, \quad u_t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 - 2\eta_x uv - v^2}{1 + \eta_x^2} \right) + \lambda \eta_x = 0. \quad (6)$$

Систему (6) замыкает граничное интегральное уравнение

$$\pi v(x) + \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, s) v(s) ds = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x, s) u(s) ds + v_d(x), \quad (7)$$

которое следует из интегрального представления

$$2\pi i F(z, t) = \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, t) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{r^2}{(z - z_c)^2} \overline{\int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, t) d\zeta}{\zeta - z_*}} + \frac{2\pi i r^2 \dot{z}_c}{(z - z_c)^2} \quad (8)$$

функции комплексной скорости жидкости $F(z, t) = U - iV$, являющейся аналитической по переменной $z = x + iy$. В (8) $z_*(t) = z_c(t) + r^2 / \overline{z - z_c(t)}$ — инверсия точки z относительно окружности радиусом r с центром $z_c(t) = x_c(t) + iy_c(t)$; черта означает комплексное сопряжение. Отсутствие интеграла по границе цилиндра $S_c(t)$ в (8) объясняется тем, что комбинация интегралов по свободной границе $\Gamma(t)$ в этой формуле обеспечивает согласно теореме Милн-Томсона [29] выполнение условия непротекания (3) на движущемся круговом цилиндре. Приведенные выше преобразования являются нелинейным обобщением схемы Вехаузена [30], применявшейся в линейной теории волнового сопротивления.

Вещественное интегральное уравнение (7) получается из комплексного соотношения (8) при $z = z(x) = x + i\eta(x) \in \Gamma$, $\zeta(s) = s + i\eta(s) \in \Gamma$ с учетом скачка интеграла Коши при переходе точки z из области на границу Γ , а также равенства $(1 + i\eta_x)F(z(x), t) = u - iv$. Ядра A и B сингулярных интегральных операторов в (7) задаются формулой

$$A(x, s) + iB(x, s) = \frac{iz_x(x)}{z(x) - \zeta(s)} + \frac{ir^2 \bar{z}_x(x)}{[\bar{z}(x) - \bar{z}_c]^2 [z_*(x) - \zeta(s)]},$$

а функция

$$v_d(x) = \operatorname{Re} \left(\frac{2\pi i \dot{z}_c z_x(x)}{z(x) - z_c} \right)$$

задает нормальную компоненту поля скорости, индуцируемого на свободной поверхности диполем, сосредоточенным в центре сечения цилиндра $z = z_c$. Время t в этих обозначениях опущено, поскольку оно содержится в качестве параметра в интегральном уравнении (7).

В случае если начальное поле скоростей \mathbf{u}_0 имеет ненулевую циркуляцию $\gamma \neq 0$ вокруг цилиндра, в правую часть формулы (8) должно входить также слагаемое $\gamma/(z - z_c)$ типа точечного вихря. В отсутствие циркуляции дивергентный вид второго из дифференциальных уравнений (6) позволяет ввести потенциал φ для касательной скорости $u = \varphi_x$, который является граничным следом $\varphi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$ для потенциала Φ поля скоростей $U = \Phi_x$, $V = \Phi_y$. При такой интерпретации система (6), рассматриваемая для пары искомых функций (η, φ) , представляет собой гамильтонову формулировку [31] задачи о волнах на воде, а интегральное уравнение (7) описывает действие нелокального оператора Дирихле — Неймана $v = N(\eta; z_c)\varphi$ (оператора “нормальная производная”).

3. Начальная асимптотика движения жидкости из состояния покоя. Рассматривается движение цилиндра с вектором ускорения $\mathbf{w} = w(\cos \theta, \sin \theta)$, где абсолютная величина ускорения w и угол θ наклона к горизонту постоянны. Выберем в качестве масштаба скорости величину $u_0 = \sqrt{wh/2}$ (h — начальное заглубление оси цилиндра). Тогда в безразмерных комплексных переменных траектория центра сечения цилиндра будет задаваться выражением

$$z_c(t) = -i + t^2 e^{i\theta}. \quad (9)$$

Решение уравнений (6), (7) при начальных данных $\eta(x, 0) = u(x, 0) = v(x, 0) = 0$ будем искать в виде степенных рядов

$$\eta = t^2 \eta_2(x) + t^3 \eta_3(x) + \dots, \quad u = t^3 u_3(x) + t^4 u_4(x) + \dots, \quad v = t v_1(x) + t^2 v_2(x) + \dots,$$

коэффициенты которых в силу дифференциальных уравнений (6) связаны рекуррентными соотношениями

$$\eta_{n+1} = \frac{1}{n+1} v_n \quad (n \geq 1), \quad u_3 = \frac{1}{6} (v_1^2 - \lambda v_1)_x, \quad u_4 = \frac{1}{4} (v_1 v_2)_x - \frac{1}{12} \lambda v_{2x}, \dots \quad (10)$$

При этом граничное интегральное уравнение (7) дает рекуррентную цепочку интегральных уравнений Фредгольма второго рода для коэффициентов v_n :

$$\pi v_n(x) + r^2 \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - r^2 p(x))q'(x) - (s - r^2 q(x))p'(x)}{(1 - r^2 p(x))^2 + (s - r^2 q(x))^2} v_n(s) = f_n(x) \quad (11)$$

с ядрами Пуассона

$$p(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad q(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (12)$$

и правыми частями

$$f_1(x) = 4r^2 (q'(x) \sin \theta - p'(x) \cos \theta), \quad f_n = f_n(v_1, \dots, v_{n-1}), \quad n \geq 2.$$

Решая уравнение (11) с помощью метода возмущений по малому параметру r (радиусу цилиндра), для коэффициентов разложения формы свободной поверхности до порядка t^4 включительно получаем следующие выражения через ядра Пуассона (12):

$$\eta_2(x) = 2r^2 \left(1 - \frac{r^2}{4} \right) (q'(x) \sin \theta - p'(x) \cos \theta) + O(r^6), \quad \eta_3(x) \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} \eta_4(x) = & r^2 \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) \left[p''(x) \left(\cos 2\theta + \frac{\lambda}{6} \sin \theta \right) + \left(\frac{\lambda}{6} \cos 2\theta - \sin 2\theta \right) q''(x) \right] + \\ & + \frac{r^4}{4} \left[p'(x) \left(\sin 2\theta - \frac{\lambda}{3} \cos \theta \right) + \left(\frac{\lambda}{3} \sin \theta + \cos 2\theta \right) q'(x) \right] + \\ & + \frac{r^4}{3} \left(p''(x) - \frac{7}{4} q'(x) \right) + \frac{r^4}{9} \left(p^{(4)}(x) \cos 2\theta - q^{(4)}(x) \sin 2\theta \right) + O(r^6). \end{aligned} \quad (13)$$

Асимптотическое решение (13) построено в работе [13], в которой изложена описанная выше схема редукции исходной нелинейной задачи на свободную поверхность, предложенная в [7]. Главный член асимптотики по r , имеющий дипольный порядок r^2 , впервые вычислен в работе [10] с использованием метода конформных отображений. Данное приближение адекватно описывает поведение нестационарного течения, возникающего при разгоне цилиндра. В частности, оно моделирует формирование и перенос инерционного слоя жидкости при вертикальном подъеме тела, образование струи всплеска на свободной границе при его погружении, а также начальную стадию генерации волнового следа за горизонтально ускоряющимся цилиндром.

Учет квадрупольных членов порядка r^4 в решении (13) позволяет описать нестационарные эффекты, обусловленные включением нелинейных механизмов в переходных процессах, развивающихся вслед за линейной стадией движения жидкости из состояния покоя. Так, при погружении цилиндра над ним могут возникать скатывающиеся навстречу друг другу мелкомасштабные вторичные волны, усиливающие кумулятивный эффект струи всплеска. В работе [14] на основе аналитического подхода [13] для режима вертикального погружения цилиндра реализована смешанная численно-аналитическая схема расчета течения, в которой используются степенное по t разложение решения интегродифференциальных уравнений (6), (7) и численное решение рекуррентной последовательности интегральных уравнений (11). На основе проведенных таким способом серийных расчетов с учетом в разложении функции $\eta(x, t)$ степеней t^n до $n = 10$ включительно в работе [14] составлены карты режимов течений и подтвержден обнаруженный в [13] при анализе решения с t^4 нелинейный эффект волнового воздействия на струю всплеска. В указанных работах гидродинамические реакции не рассматривались, поскольку для этого необходимо аналитическое продолжение решения граничных уравнений внутрь области течения. Данная процедура осуществляется в настоящей работе.

4. Общая формула для определения гидродинамических сил. При нахождении вектора нагрузок (X, Y) , действующих со стороны жидкости на ускоряющийся цилиндр, используем формулу Седова [32]

$$X + iY = \frac{i}{2} \int_C \overline{F^2(z, t)} dz + \frac{d}{dt} \left(\frac{d(Sz_c(t))}{dt} + i \int_C z F(z, t) dz \right), \quad (14)$$

где замкнутый контур C — граница тела; S — площадь, охватываемая этим контуром. В рассматриваемом случае таким контуром C является движущаяся окружность $S_c(t)$, для которой площадь $S = \pi r^2$ постоянна во времени. Для вычисления контурных интегралов в формуле (14) используем представление (7) для комплексной скорости $F(z, t)$, которое содержит интегралы только по свободной границе $\Gamma(t)$ с известным на ней решением системы (6), (7). Раскладывая величину $z_*(t) = z_c(t) + r^2 / \overline{z - z_c(t)}$ в ряд по степеням r , запишем представление (8) в виде мультипольного разложения

$$F(z, t) = H(z, t) + \frac{r^2 \dot{z}_c(t)}{(z - z_c(t))^2} - \frac{r^2}{(z - z_c(t))^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n} \overline{H^{(n)}(z_c(t), t)}}{n!(z - z_c(t))^n}, \quad (15)$$

где

$$H^{(n)}(z, t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma(t)} \frac{F(\zeta, t) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad (16)$$

$H(z, t) \stackrel{\text{def}}{=} H^{(0)}(z, t)$. Заметим, что из определения коэффициентов $H^{(n)}(z, t)$, аналитических при $\text{Im } z < \eta(x, t)$, и теоремы о вычетах следуют равенства

$$\int_C \frac{H(z, t)}{(z - z_c(t))^{n+2}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_c(t)} \left(\frac{H(z, t)}{(z - z_c(t))^{n+2}} \right) = 2\pi i \frac{H^{(n+1)}(z_c(t), t)}{(n+1)!}.$$

Поэтому, подставляя выражения (15) в формулу Седова (14) и вычисляя возникающие интегралы также с помощью теоремы о вычетах, имеем выражение для нагрузок

$$\begin{aligned} \frac{X + iY}{2\pi r^2} = & \overline{H'_z(z_c(t), t)} (H(z_c(t), t) - \overline{\dot{z}_c(t)}) + \frac{d}{dt} \overline{H(z_c(t), t)} - \\ & - \frac{1}{2} \ddot{z}_c(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n} H^{(n)}(z_c(t), t) \overline{H^{(n+1)}(z_c(t), t)}}{n!(n+1)!}. \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что данное представление гидродинамических сил через аналитические функции $H^{(n)}(z, t)$, зависящие только от формы свободной границы $\Gamma(t)$ и поля скоростей на ней, является общим в том смысле, что оно справедливо для произвольного гладкого закона движения цилиндра $z = z_c(t)$ из состояния покоя $z_c(0) = -i$, $\dot{z}_c(0) = 0$. Представление (17) в целом сохраняет структуру формулы (14), различие заключается лишь в том, что в бесконечном ряду выделено слагаемое с $n = 0$ (квадратичный член, содержащий функции H и H'_z), которое играет основную роль при вычислении нагрузок.

5. Начальная по времени асимптотика для нагрузок. Для конкретизации формулы (17) в случае движения цилиндра с постоянным ускорением используем асимптотическое решение с коэффициентами разложения формы свободной поверхности (13). Для функции $H(z, t)$, которая задается граничным интегралом (16) с $n = 0$, имеем асимптотическое разложение

$$H(z, t) = it \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_1(x) dx}{x - z} - t^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(u_3(x) - iv_3(x)) dx}{x - z} + t^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_1(x)\eta_2(x) dx}{(x - z)^2} + O(t^5), \quad (18)$$

где $v_1 = 2\eta_2$; коэффициенты v_3, u_3 записываются через η_2 и η_4 по формулам (10). Согласно формулам (10), (13) для вещественных величин u_3, v_3 и $v_1\eta_2$ справедливо следующее комплексное представление через функции p, q и их производные:

$$\begin{aligned} u_3(x) = & \frac{2ir^4}{9} e^{-2i\theta} p^{(4)}(x) + \frac{2r^4}{3} (p'(x) + ip''(x)) + \frac{2\lambda r^2}{3} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) e^{-i\theta} p''(x), \\ v_3(x) = & 4r^2 \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) \left(e^{-2i\theta} + \frac{\lambda i}{6} e^{-i\theta}\right) p''(x) + \frac{4r^4}{9} e^{-2i\theta} p^{(4)}(x) + \\ & + r^4 \left(i e^{-2i\theta} - \frac{\lambda}{3} e^{-i\theta}\right) p'(x) + \frac{4r^4}{3} \left(p''(x) - \frac{7i}{4} p'(x)\right), \quad (19) \\ v_1(x)\eta_2(x) = & \frac{i}{12} e^{-2i\theta} p'''(x) + \frac{1}{4} p(x) + \frac{i}{4} p'(x). \end{aligned}$$

Для получения выражений типа (19) используются свойства ядер Пуассона p и q , которые являются базисными элементами в дифференциальном кольце рациональных функций,

возникающих в (16) в нелинейных выражениях для $F(\zeta, t)$ под знаком интеграла. В частности, как и в работе [13], при рассмотрении квадратичных нелинейностей основную роль играют тождества

$$p'(x)q'(x) = -\frac{1}{12}p^{(4)}(x), \quad p'(x)^2 = \frac{1}{4}p(x) + \frac{1}{4}q'(x) + \frac{1}{12}q^{(4)}(x)$$

и подобные им равенства. Таким образом, при вычислении интегралов в правой части формулы (18) достаточно использовать соотношения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^{(n)}(x) dx}{(x-z)^m} = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^{(n)}(x) dx}{(x-z)^m} = \frac{(-1)^{m+n}(n+m-1)!}{(m-1)!(z-i)^{m+n}} \quad (\text{Im } z < 0)$$

($m \geq 1, n \geq 0$ — целые числа; $p^{(n)} = \partial_x^n p, q^{(n)} = \partial_x^n q$). В результате получаем следующую асимптотическую формулу для функции $H(z, t)$, аналитической при $\text{Im } z < 0$:

$$H(z, t) = -2tr^2 \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) \left(\frac{e^{-i\theta}}{(z-i)^2} + \frac{2t^2}{3} \frac{\lambda i e^{-i\theta} + 3e^{-2i\theta}}{(z-i)^3}\right) - \frac{t^3 r^4}{6} \left(\frac{\lambda e^{-i\theta} - i(3e^{-2i\theta} - 11)}{(z-i)^2} + \frac{16}{(z-i)^3} + \frac{64e^{-2i\theta}}{(z-i)^5}\right) + O(t^5 + r^6). \quad (20)$$

Аналогичным образом выводятся асимптотические формулы для производных $H'_z(z, t)$ и $H'_t(z, t)$, вид которых может быть получен формальным дифференцированием равенства (20) по независимым переменным z и t . Этого достаточно для определения нагрузок на цилиндр в пределах погрешности приближенного решения (13), поскольку бесконечная сумма в формуле (17) начинается с членов порядка r^6 и не дает вклада в асимптотику. Таким образом, для нагрузок имеем приближенное выражение

$$\frac{X + iY}{2\pi r^2} = \overline{H'_z(z_c(t), t)} H(z_c(t), t) + \overline{H'_t(z_c(t), t)} - \ddot{z}_c(t)/2 + O(t^4 + r^6), \quad (21)$$

где зависимость $z_c(t)$ определяется формулой (9) в случае равноускоренного движения цилиндра под углом θ к горизонту. В итоге получаем следующую асимптотическую формулу, описывающую зависимость гидродинамических нагрузок от времени t при разгоне цилиндра из первоначального состояния покоя:

$$\begin{aligned} \frac{X + iY}{2\pi r^2} = & -e^{i\theta} - 2r^2 \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) \left(\frac{e^{i\theta}}{(t^2 e^{-i\theta} + 2i)^2} + 2t^2 \frac{3e^{2i\theta} - \lambda i e^{i\theta}}{(t^2 e^{-i\theta} + 2i)^3}\right) - \\ & - t^2 r^4 \left(\frac{\lambda e^{i\theta} + i(3e^{2i\theta} - 11)}{2(t^2 e^{-i\theta} + 2i)^2} + \frac{8}{(t^2 e^{-i\theta} + 2i)^3} + \frac{8}{(t^2 e^{-i\theta} + 2i)^3 (t^2 e^{i\theta} - 2i)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{32e^{2i\theta}}{(t^2 e^{-i\theta} + 2i)^5}\right) + O(t^4 + r^6). \quad (22) \end{aligned}$$

Остаток в (22) имеет порядок t^4 , поскольку именно такая точность гарантируется для производной $H'_t(z, t)$ в асимптотическом равенстве (21). Дробно-рациональная зависимость от времени t в формуле (22) наследуется из интегрального представления (8) для комплексной скорости $F(z, t)$, в котором одновременно учитываются эволюция свободной границы $\Gamma(t)$ с полем скоростей на ней и закон движения цилиндра $z = z_c(t)$ внутри области течения. Более простое, но более грубое приближение для нагрузок получается из формулы (22), если в ней пренебречь всеми слагаемыми, содержащими t^2 в числителях дробей:

$$\frac{X + iY}{2\pi r^2} = -e^{i\theta} - 2r^2 \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) \frac{e^{i\theta}}{(t^2 e^{-i\theta} + 2i)^2} + O(t^2 + r^6). \quad (23)$$

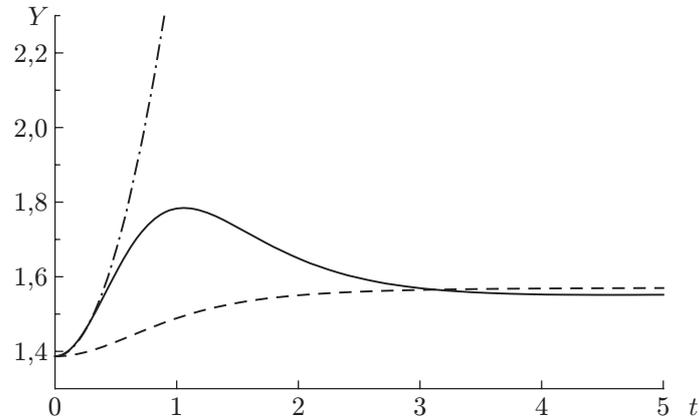


Рис. 2. Зависимость от времени вертикальной составляющей нагрузки на цилиндр в случае его погружения при $r = 0,5$, $\lambda = 5$, $\theta = -\pi/2$: сплошная линия — расчет по формуле (22), штриховая — расчет по формуле (23), штрихпунктирная — расчет по формуле (24)

Еще один вариант упрощенной формулы для нагрузок получаем из (22) путем разложения всех дробей по степеням t :

$$\frac{X + iY}{2\pi r^2} = -e^{i\theta} + \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) e^{i\theta} - \frac{t^2 r^2}{2} (3i e^{2i\theta} + \lambda e^{i\theta} - i) + \frac{t^2 r^4}{4} (7i e^{2i\theta} + 2\lambda e^{i\theta} - 9i) + O(t^4 + r^6). \quad (24)$$

В отличие от рационального приближения (23) степенное разложение (24) при малых временах t сохраняет порядок точности t^4 исходной асимптотики (22).

6. Результаты расчетов. На рис. 2, 3 представлены характерные зависимости от времени гидродинамических нагрузок на цилиндр, полученные по формулам (22)–(24). Сплошной линией на рис. 2, 3 показаны расчеты по основной формуле (22) дробно-рационального приближения, учитывающего в асимптотическом решении (10), (13) члены порядка t^4 , штриховой — расчеты по упрощенной формуле (23), а штрихпунктирной линией — расчеты по формуле степенного разложения (24), в котором, как и в (22), учитываются члены порядка t^4 в решении (10), (13). На рис. 2 представлен случай вертикального погружения цилиндра ($\theta = -\pi/2$) с постоянным ускорением при значениях безразмерных параметров $r = 0,5$, $\lambda = 5$, на рис. 3 — случай горизонтального разгона цилиндра ($\theta = 0$) при тех же значениях параметров $r = 0,5$, $\lambda = 5$. При $r = 0,5$ верхняя кромка цилиндра в начальный момент времени согласно выбору исходных масштабов погружена под свободную поверхность на глубину, равную его радиусу. Выбор значения параметра $\lambda = 5$ обеспечивает безотрывный характер течения за цилиндром, поскольку в рассматриваемой постановке задачи кавитационные явления согласно результатам численно-аналитического моделирования [12] проявляются при $\lambda \leq 1,13$.

При сравнении зависимостей нагрузок на рис. 2, 3 видно, что степенное разложение (24) даже при учете членов порядка t^4 в решении (10), (13) стремится к бесконечности монотонным образом. Дробно-рациональное приближение (23) представляется более адекватным, поскольку описывает колебания нагрузок на начальном и переходном этапах разгона тела. Эти осцилляции гидродинамических сил соответствуют немонотонному по времени t характеру течения как при формировании струи всплеска над погружающимся цилиндром, так и при его горизонтальном разгоне, инициирующем формирование волнового следа за телом.

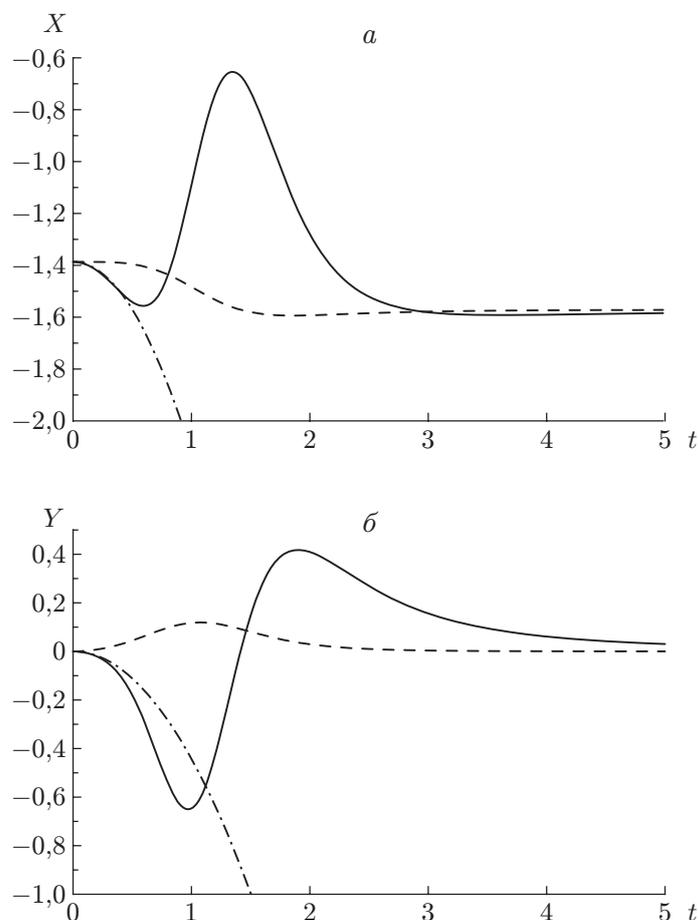


Рис. 3. Зависимости от времени горизонтальной (*a*) и вертикальной (*б*) составляющих нагрузки в случае горизонтального движения цилиндра при $r = 0,5$, $\lambda = 5$, $\theta = 0$ (обозначения те же, что на рис. 2)

Заключение. В работе исследована нелинейная задача о движении жидкости со свободной границей, вызванном погруженным в нее круговым цилиндром. Рассмотрена эквивалентная система интегродифференциальных уравнений на свободной поверхности, для решения которой в работе [13] найдена начальная по времени асимптотика. Построено аналитическое продолжение поля скоростей внутрь области течения и получены три варианта приближенных формул для нестационарных нагрузок на цилиндр, действующих на начальной стадии его равноускоренного движения (дробно-рациональные приближения, имеющие точность $O(t^4)$ и $O(t^2)$, и степенное разложение по времени t). Показано, что дробно-рациональное приближение является предпочтительным, поскольку описывает немонотонное по времени поведение нагрузок, соответствующее вынужденным осцилляциям свободной границы при разгоне тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ньюмен Дж. Морская гидродинамика. Л.: Судостроение, 1985.
2. Mei С. С. The applied dynamics of ocean surface waves. Singapore: World Sci., 1989.
3. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.

4. **Степанянц Ю. А., Стурова И. В., Теодорович Э. В.** Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа.* М.: ВИНТИ, 1987. Т. 21. С. 92–179.
5. **Mei C. C.** Theory and applications of ocean surface waves. Pt 1. Linear aspects / C. C. Mei, M. Stiassnie, D. K.-P. Yue. Singapore: World Sci., 2005.
6. **Макаренко Н. И.** Неустановившиеся поверхностные волны при наличии погруженного препятствия // *Вычисл. технологии.* 1995. Т. 11, № 4. С. 179–175.
7. **Makarenko N. I.** Nonlinear interaction of submerged cylinder with free surface // *Trans. ASME. J. Offshore Mech. Arctic Engng.* 2003. V. 125, N 1. P. 72–75.
8. **Овсянников Л. В.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Наллимов, П. И. Плотников, В. Ю. Ляпидевский, И. В. Стурова, В. И. Букреев, В. А. Владимиров. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
9. **Tyvand P. A., Miloh T.** Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 286. P. 67–101.
10. **Tyvand P. A., Miloh T.** Free-surface flow generated by a small submerged circular cylinder starting from the rest // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 286. P. 103–117.
11. **Tyvand P. A., Landrini M.** Free-surface flow of a fluid body with an inner circular cylinder in impulsive motion // *J. Engng Math.* 2001. V. 40. P. 109–140.
12. **Норкин М. В.** Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // *ПМТФ.* 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82.
13. **Kostikov V. K., Makarenko N. I.** Unsteady free surface flow above the moving circular cylinder // *J. Engng Math.* 2018. V. 112. P. 1–17.
14. **Martin Pardo R., Nedic J.** Free-surface disturbances due to the submersion of a cylindrical obstacle // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 926. A1. DOI: 10.1017/jfm.2021.462.
15. **Пяткина Е. В.** Начальная асимптотика волнового движения, генерируемого погруженной сферой // *ПМТФ.* 2003. Т. 44, № 1. С. 39–52.
16. **Пяткина Е. В.** Обоснование дипольного приближения в задаче о генерации нелинейных волн погруженной сферой // *Сиб. мат. журн.* 2005. Т. 46, № 4. С. 907–927.
17. **Hausling H. J., Coleman R. M.** Nonlinear water waves generated by an accelerated circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 461. P. 343–364.
18. **Terentiev A. G., Afanasiev K. E., Afanasieva M. M.** Simulation of unsteady free surface flow problems by the direct boundary element method // *Proc. IUTAM Symp. advanced boundary element methods, San-Antonio (USA), 13–16 Apr., 1987. Heidelberg: Springer, 1988. P. 427–434.*
19. **Горлов С. И.** Численные методы решения нелинейных нестационарных задач генерации волн погруженным в жидкость телом // *Вычисл. технологии.* 1998. Т. 3, № 6. С. 9–20.
20. **Greenhow M., Moyo S.** Free motion of a cylinder moving below and through a free surface // *Appl. Ocean Res.* 2000. V. 22. P. 31–44.
21. **Wu G. X., Eatock Taylor R.** The coupled finite element and boundary element analysis of nonlinear interactions between waves and bodies // *Ocean Engng.* 2003. V. 30. P. 387–400.
22. **Zhu X., Faltinsen O. M., Hu C.** Water entry and exit of a horizontal circular cylinder // *Trans. ASME. J. Offshore Mech. Arctic Engng.* 2007. V. 129, N 4. P. 253–264.
23. **Guerber E., Benoit M., Grilli S., Buvat C.** A fully nonlinear implicit model for wave interaction with submerged structures in forced or free motion // *Engng Anal. Boundary Elements.* 2012. V. 36, N 7. P. 1151–1173.
24. **Greenhow M., Lin W.-M.** Nonlinear free surface effects: experiments and theory: Tech. Rep. / MIT. N 83-19. Cambridge, 1983.

25. **Greenhow M., Moyo S.** Water entry and exit of horizontal circular cylinder // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1997. V. 355. P. 551–563.
26. **Ogilvie F.** First- and second-order forces on a cylinder submerged under free surface // J. Fluid Mech. 1963. V. 16. P. 451–472.
27. **Wu G. X.** Hydrodynamic forces on a submerged circular cylinder undergoing large-amplitude motion // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 41–58.
28. **Tuck E. O.** The effect of non-linearity at the free surface on flow past a submerged cylinder // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 401–404.
29. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
30. **Wehausen J. V., Laitone E. V.** Surface waves. Berlin: Springer Verlag, 1960. S. 446–778. (Handbuch der Physik; Bd 9).
31. **Захаров В. Е.** Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
32. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980.

*Поступила в редакцию 29/XI 2021 г.,
после доработки — 29/XI 2021 г.
Принята к публикации 29/XI 2021 г.*
