УДК 533.6:536.24:622.4

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПИСАНИЯ ПРИСТЕННОГО СЛОЯ

В. А. Зеленецкий, Т. В. Богатко*

Бердский филиал Новосибирского государственного технического университета, 633004 Бердск

* Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: bogatko1@mail.ru

Представлены модели течения с учетом шероховатости в трубе. Для некоторых видов шероховатости описана бета-функция. Проведено сравнение полученных результатов моделирования с данными классических экспериментов.

Ключевые слова: пристенный слой, динамическая длина, высота и радиус кривизны элементов шероховатости, первый и второй предельные режимы.

Введение. Связь между гидравлическим трением и теплопередачей при течении жидкости (газа), например в трубе, описана в работе [1]. Понятие пристенного слоя (слоя "постоянного напряжения") введено и подробно рассмотрено в работе [2]. В турбулентном ядре между буферным слоем и так называемым следом [2] существует область, в которой скорость описывается логарифмическим профилем Прандтля

$$\varphi = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{\xi}{\xi_0}. \qquad (1)$$

Здесь $\xi = y/r_0$ — нормированное расстояние от стенки; $\xi_0 = y_0/r_0$ — нормированная толщина пристенного слоя; y — расстояние от стенки; r_0 — радиус трубы; $\varkappa = 0{,}4$ — первая гидродинамическая постоянная (константа Кармана); $\varphi = u/v_*$ — безразмерная скорость; $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ — динамическая скорость; τ_0 — касательные напряжения на стенке; ρ — плотность жидкости (газа).

Для представления профиля скорости вблизи стенки вместо координат φ, ξ принято использовать безразмерные координаты φ, η ($\eta = y/l_*$ — безразмерное расстояние от стенки; $l_* = \nu/v_*$ — динамическая длина; $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость; μ — динамическая вязкость) [3].

В случае течения с гладкими стенками или гидравлически гладкого течения (выступы шероховатости скрыты вязким подслоем, и их влияние не проявляется) толщина пристенного слоя полагается пропорциональной динамической длине: $y_0 = \beta l_*$ ($\beta = 0{,}111$ — вторая гидродинамическая постоянная) [4].

Умножая числитель и знаменатель отношения, стоящего под знаком логарифма в формуле (1), на величину r_0/l_*, получаем профиль скорости в виде

$$\varphi = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{\eta}{\beta}. \qquad (2)$$

В случае течения с проявлением шероховатости стенок трубы существенную роль играет так называемая бета-функция (B-функция).

Способы задания B-функции. По мнению Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, в случае если толщина пристенного слоя y_0 и высота элемента шероховатости Δ соизмеримы,

“…никаких общих формул написать нельзя” [5]. Ими предложено вместо y_0 использовать Δ. При этом выражение для продольной относительной скорости течения принимает вид

$$\varphi = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{\eta}{\eta_\Delta}, \tag{3}$$

где $\eta_\Delta = \Delta v_*/\nu$ — “локальное число Рейнольдса”. Такая модель обозначается $B = 0$. Следует отметить, что результаты расчетов по формуле (3) значительно отличаются от экспериментальных данных.

Г. Шлихтинг предложил считать y_0 пропорциональным Δ: $y_0 = \gamma\Delta$ ($\gamma = 0{,}0336$ — третья гидродинамическая постоянная (константа Шлихтинга)) [4], что приводит к профилю безразмерной скорости вида

$$\varphi = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{\eta}{\eta_\Delta} + B, \tag{4}$$

где $B = \ln(1/\gamma)$.

Экспериментально установлено, что при умеренных значениях η_Δ величина B не является постоянной, а зависит от η_Δ. Лишь при больших значениях η_Δ величина B асимптотически стремится к постоянному значению $B = 8{,}48$. Модель $B = \mathrm{const}$ также не описывает переходный режим.

Итак, в гидродинамике возникла задача построения B-функции, не зная которую невозможно описать классические опыты И. Никурадзе для течения вблизи стенок с песочной шероховатостью, а также определить влияние сегментообразной (заклепочной) шероховатости на теплообмен. Влияние максимальной высоты сегмента и диаметра его основания на число Нуссельта было определено в экспериментальных работах [6, 7].

В работе [8] для учета технической шероховатости стенок предложена аддитивная модель пристенного слоя $y_0 = \beta l_* + \gamma\Delta$, которая при $\gamma\Delta \ll \beta l_*$ описывает гидравлически гладкую стенку (см. (2)), а при $\gamma\Delta \gg \beta l_*$ — шероховатую стенку (см. (4)). В случае когда слагаемые $\gamma\Delta$ и βl_* соизмеримы, аддитивная модель соответствует эмпирической формуле сопротивления Колбрука — Уайта в работе [4] для технической шероховатости во всем переходном режиме.

Характерным примером технической шероховатости являются остроконечные выступы скальных пород на стенках горных выработок, пройденных взрывной отбойкой. В работе [9] определялся коэффициент аэродинамического сопротивления таких выработок. Установлено, что результаты расчетов с использованием аддитивной модели и данные натурного эксперимента хорошо согласуются.

В работе [10] предложена обобщенная форма данной модели

$$y_0 = \beta l_* + \gamma\Delta z(l_*, \Delta, R), \tag{5}$$

с помощью которой впервые было получено аналитическое описание кривых сопротивления, построенных И. Никурадзе для течения с песочной шероховатостью стенок.

В работе [10] представлена система дифференциальных уравнений для пристенного слоя

$$\frac{\partial y_0}{\partial l_*} = \beta + \frac{R}{l_*} \frac{\partial y_0}{\partial R}, \qquad \frac{\partial y_0}{\partial \Delta} = -\Big(\gamma \frac{\Delta}{l_*} + 2\frac{R}{\Delta}\Big) \frac{\partial y_0}{\partial R}, \tag{6}$$

где R — радиус кривизны выступов шероховатости. Система (6), записанная относительно функции z, имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial l_*} = \frac{R}{l_*} \frac{\partial z}{\partial R}, \qquad z + \Delta \frac{\partial z}{\partial \Delta} = -\Big(\gamma \frac{\Delta^2}{l_*} + 2R\Big) \frac{\partial z}{\partial R}. \tag{7}$$

Следует отметить, что в работе [10] на основе анализа (5), (6) получена функция z в явном виде

$$z = \exp\left[-Rl_*/(\gamma\Delta^2)\right]. \tag{8}$$

Из системы (7) следует дифференциальное уравнение для скалярной функции трех переменных $z = z(l_*, \Delta, R)$:

$$(\boldsymbol{A} \cdot \nabla z) = -z. \tag{9}$$

Здесь $\boldsymbol{A}$ — вектор с координатами $(2l_*, \gamma\Delta^2/l_*, \Delta)$; $\nabla = (\partial/\partial l_*)\boldsymbol{i} + (\partial/\partial R)\boldsymbol{j} + (\partial/\partial\Delta)\boldsymbol{k}$ — дифференциальный оператор Гамильтона (набла-вектор). Действительно, подставляя во второе уравнение системы (7) первое уравнение этой системы $R\,\partial z/\partial R = l_*\,\partial z/\partial l_*$, получаем слева скалярное произведение двух векторов

$$2l_*\,\frac{\partial z}{\partial l_*} + \gamma\,\frac{\Delta^2}{l_*}\,\frac{\partial z}{\partial R} + \Delta\,\frac{\partial z}{\partial \Delta} = -z, \tag{10}$$

или уравнение (9) в развернутом виде.

Ставится следующая задача: найти общее решение дифференциального уравнения (10) и выделить частное решение, удовлетворяющее условию $z = 1$ при $R = 0$.

Если искать решение в форме неявной функции

$$F(l_*, R, \Delta, z) = 0, \tag{11}$$

то неоднородное уравнение (10) сведется к следующему однородному уравнению [11]:

$$2l_*\,\frac{\partial F}{\partial l_*} + \gamma\,\frac{\Delta^2}{l_*}\,\frac{\partial F}{\partial R} + \Delta\,\frac{\partial F}{\partial \Delta} - z\,\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

Уравнению (12) соответствует симметрическая система обыкновенных уравнений

$$\frac{dl_*}{2l_*} = \frac{l_*}{\gamma\Delta^2}\,dR = \frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{dz}{-z}, \tag{13}$$

которая имеет три независимых интеграла [11]: $\psi_1(l_*, R, \Delta, z)$, $\psi_2(l_*, R, \Delta, z)$, $\psi_3(l_*, R, \Delta, z)$. Следовательно,

$$F = \Phi(\psi_1, \psi_2, \psi_3). \tag{14}$$

Подставляя (14) в (11), получаем искомое решение в виде

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = 0. \tag{15}$$

Если выражение (15) можно разрешить относительно z, то его можно представить в явном виде [11]

$$z = f(l_*, R, \Delta).$$

Первый независимый интеграл вычисляется из первых двух членов уравнения (13):

$$\psi_1 = C_1 = l_*\exp\left(-2l_*R/(\gamma\Delta^2)\right),$$

второй — из уравнения $dl_*/(2l_*) = d\Delta/\Delta$:

$$\psi_2 = C_2 = l_*/\Delta^2.$$

Третий независимый интеграл вычисляется из уравнения $dl_*/(2l_*) = -dz/z$:

$$\psi_3 = C_3 = l_* z^2.$$

Общее решение (15) имеет следующий вид:

$$\Phi(l_* \exp(-2l_* R/(\gamma\Delta^2)), l_*/\Delta^2, l_* z^2) = 0. \tag{16}$$

В (16) вторая переменная l_*/Δ^2 содержится в показателе экспоненты первой переменной, поэтому общее решение является функцией лишь двух переменных:

$$\Phi(\psi_1, \psi_3) = 0.$$

Выражая вторую переменную явно, получаем $\psi_3 = f(\psi_1)$, или

$$l_* z^2 = f[l_* \exp(-2l_* R/(\gamma\Delta^2))].$$

Частное решение найдем с помощью условия $z = 1$ при $R = 0$:

$$l_* = f[l_*],$$

тогда $l_* z^2 = l_* \exp(-2l_* R/(\gamma\Delta^2))$, откуда следует $z = \exp(-l_* R/(\gamma\Delta^2))$.

Таким образом, в работе [10] представлено частное решение (см. (8)), которое можно получить, например, используя теорию размерностей. В этом случае уравнение (9) допускает поиск решения в экспоненциальном виде

$$z = C \exp(a l_*^n R^m \Delta^p), \tag{17}$$

где C, a — безразмерные постоянные.

Согласно теории размерностей справедливо следующее условие:

$$n + m + p = 0. \tag{18}$$

Подставляя (17) в первое уравнение системы (7), получаем $n = m$, поэтому согласно (18) $p = -2n$ и (17) принимает вид

$$z = C \exp[a(l_* R/\Delta^2)^n]. \tag{19}$$

Подстановка (19) во второе уравнение системы (7) дает равенство

$$-\gamma a n \frac{(l_* R)^{n-1}}{\Delta^{2(n-1)}} = 1,$$

из которого следует, что при $n = 1$ постоянная a равна $-1/\gamma$. Постоянную C можно определить, перейдя к модели технической шероховатости. В этом случае $R = 0$, $z = 1$, поэтому $C = 1$.

Таким образом, в предложенной модели пристенного слоя B-функция имеет вид

$$B(\eta_\Delta) = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{\eta_\Delta}{\beta + \gamma\eta_\Delta \exp[-(l_* R/(\gamma\Delta^2))]}. \tag{20}$$

При проведении расчетов показатель экспоненты в формуле (20) целесообразно представлять в виде $-r/(\gamma\eta_\Delta^2)$, где $r = R/l_*$.

Частные случаи шероховатости. Получим выражения для B-функции в некоторых частных случаях.

1. В случае технической шероховатости (остроконечные элементы естественной и искусственной шероховатости) $R \to 0$. Тогда

$$B(\eta_\Delta) = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{\eta_\Delta}{\beta + \gamma\eta_\Delta}.$$

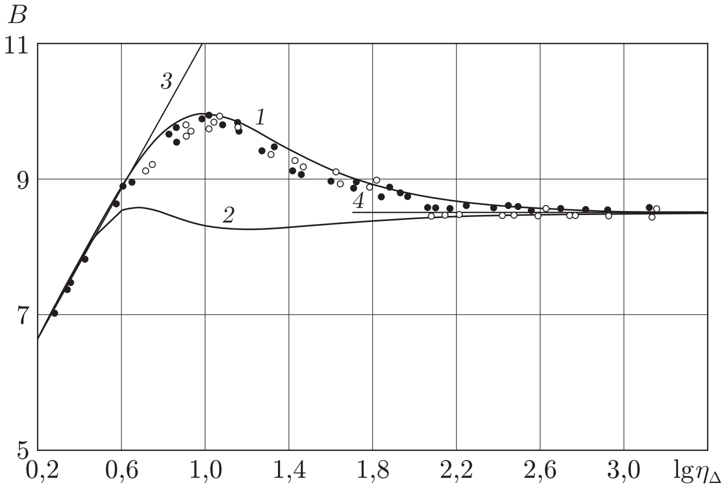

Рис. 1. Бета-функция в случае песочной шероховатости в трубе:
1 — расчет по формуле (21); *2* — расчет по формуле (22); *3* — первый предельный режим; *4* — второй предельный режим; точки — экспериментальные данные [1, 3, 4] (светлые точки — результаты измерений продольной скорости на различных расстояниях от стенки трубы; темные точки — результаты измерений коэффициента гидравлического трения шероховатой трубы)

2. В случае песочной шероховатости (песчинка в виде шара) $R = \Delta/2$. Тогда

$$B(\eta_\Delta) = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{\eta_\Delta}{\beta + \gamma\eta_\Delta \exp\left[-1/(2\gamma\eta_\Delta)\right]}. \tag{21}$$

На рис. 1 представлены результаты расчета B-функции по формуле (21), а также экспериментальные данные И. Никурадзе [1, 3, 4].

3. В случае сегментообразной (заклепочной) шероховатости (выступающая в поток заклепка является шаровым сегментом) $\Delta = kR$, $0 \leqslant k \leqslant 1$ (рис. 2). Тогда

$$B(\eta_\Delta) = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{\eta_\Delta}{\beta + \gamma\eta_\Delta \exp\left[-1/(k\gamma\eta_\Delta)\right]}.$$

При $k = 0$ (первый предельный режим, соответствующий гидравлически гладкому течению)

$$B(\eta_\Delta) = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{\eta_\Delta}{\beta}.$$

Общее решение уравнения (9) допускает существование бесконечного множества решений, определяемых неявной функцией (16). В настоящей работе получено три таких решения — векторы с координатами $(2l_*, \gamma\Delta^2/l_*, \Delta)$, $(\gamma\Delta^2/R, 2R, \Delta)$, $(\gamma\Delta^2/(2l_*R))(2l_*, 2R, \Delta)$. Вопрос о физической интерпретации данных векторов пока остается открытым. Неизвестный ранее вид течения, в котором проявляется влияние шероховатости, можно описать, анализируя модули этих векторов:

$$A_1 = \frac{1}{l_*} \sqrt{4l_*^4 + \gamma^2\Delta^4 + \Delta^2 l_*^2}, \qquad A_2 = \frac{1}{R} \sqrt{\gamma^2\Delta^4 + 4R^4 + \Delta^2 R^2},$$

$$A_3 = \frac{\gamma\Delta^2}{2l_*R} \sqrt{4l_*^2 + 4R^2 + \Delta^2}.$$

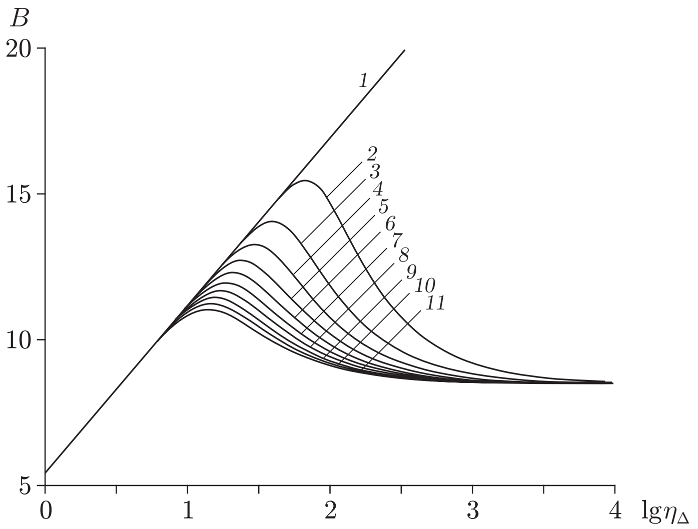

Рис. 2. Бета-функция в случае заклепочной шероховатости в трубе:
1 — $k = 0$; *2* — $k = 0{,}1$; *3* — $k = 0{,}2$; *4* — $k = 0{,}3$; *5* — $k = 0{,}4$; *6* — $k = 0{,}5$; *7* — $k = 0{,}6$; *8* — $k = 0{,}7$; *9* — $k = 0{,}8$; *10* — $k = 0{,}9$; *11* — $k = 1{,}0$

Первые два вектора совпадают при условии $R = l_*$ (радиус кривизны элементов шероховатости равен динамической длине). В этом случае бета-функция (20) принимает вид

$$B(\eta_\Delta) = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{\eta_\Delta}{\beta + \gamma\eta_\Delta \exp\left[-1/(\gamma\eta_\Delta^2)\right]}. \qquad (22)$$

Функция (22) с двумя экстремумами представлена на рис. 1 (кривая *2*). Видно, что модель $B \approx \mathrm{const}$ удовлетворительно описывается данной функцией, что согласуется с гипотезой Г. Шлихтинга.

Следует отметить, что слой “постоянного напряжения” — весьма тонкий слой, характеризующийся сильным взаимодействием молекул жидкости (газа) с молекулами твердого тела (стенки), которое проявляется в значительном искривлении свободной поверхности жидкости вблизи стенок (мениски). Данное взаимодействие молекул газа и твердого тела учтено в поправке “на давление” Ван-дер-Ваальса, так как взаимодействие молекул газа в пристенной области ослабляет импульсное воздействие молекул газа на стенку [12]. В таблице представлены параметры пристенного слоя в абсолютных величинах для предельных режимов турбулентного течения в трубе диаметром 0,5 м. Из таблицы следует неверность утверждения, что влияние шероховатости начинает проявляться в тот момент, когда высота элемента шероховатости становится больше толщины пристенного слоя “постоянного напряжения” [5]. Строки 3, 5, 7, 9 таблицы показывают, что течение остается гидравлически гладким, несмотря на то что высота элемента шероховатости превышает толщину пристенного слоя в 5, 25, 50 раз. Режим течения, коэффициент гидравлического трения, коэффициент теплоотдачи существенно зависят от радиуса кривизны элемента шероховатости. Эта зависимость может быть использована при создании искусственной шероховатости для защиты быстродвижущихся объектов от перегрева.

Заключение. В работе кратко изложены сведения о B-функции, управляющей переходом от режима гидравлически гладкого течения к режиму течения с проявлением влияния шероховатости в трубе.

Показано, что z-функция, определяющая толщину слоя “постоянного напряжения”, является частным решением дифференциального уравнения (9).

Параметры пристенного слоя для предельных режимов турбулентного течения в трубе

Re*	λ^{**}	l_*, мм	Δ, мм	R, мм	y_0, мм	Тип течения
$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^{-2}$	1,8	0	—	0,2	Течение в отсутствие шероховатости
10^6	$1{,}165 \cdot 10^{-2}$	0,013	0	—	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$	
$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^{-2}$	1,8	1	25	0,2	Гидравлически гладкое течение
10^6	$2{,}34 \cdot 10^{-2}$	$9{,}25 \cdot 10^{-3}$	1	25	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$	Течение с проявлением влияния шероховатости
$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^{-2}$	1,8	5	25	0,2	Гидравлически гладкое течение
10^6	$3{,}8 \cdot 10^{-2}$	$7{,}27 \cdot 10^{-3}$	5	25	0,14	Течение с проявлением влияния шероховатости
$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^{-2}$	1,8	5	10	0,2	Гидравлически гладкое течение
10^6	$3{,}8 \cdot 10^{-2}$	$7{,}27 \cdot 10^{-3}$	5	10	0,16	Течение с проявлением влияния шероховатости
$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^{-2}$	1,8	10	10	0,2	Гидравлически гладкое течение
10^6	$4{,}86 \cdot 10^{-2}$	$6{,}415 \cdot 10^{-3}$	10	10	0,33	Течение с проявлением влияния шероховатости

* Re — число Рейнольдса.

** λ — коэффициент гидравлического трения.

Установлено, что модель $B \approx \text{const}$ справедлива, если радиус кривизны элементов шероховатости равен динамической длине.

Получена B-функция для случая сегментообразной (заклепочной) шероховатости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гинзбург И. П.** Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1970.
2. **Турбулентность** / Под ред. П. Брэдшоу. М.: Машиностроение, 1980. (Сер. Проблемы прикладной физики).
3. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
4. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
5. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
6. **Себан Р., Колдуэлл Ж.** Влияние сферической выпуклости на местную теплоотдачу в турбулентный пограничный слой // Теплопередача. 1968. Т. 90, сер. С, № 4. С. 42–47.
7. **Евенко В. И., Шишков В. М., Анисин А. К.** Влияние формы и расположения шероховатости на эффективность теплопередачи в трубах // Энергомашиностроение. 1977. № 7. С. 14–16.

8. **Зеленецкий В. А.** Методическое руководство по определению аэродинамического сопротивления горных выработок железорудных шахт Сибири. Новокузнецк: Новокузнецк. полиграфкомбинат, 1988.
9. **Зеленецкий В. А., Клубов С. Я., Усанова Л. В. и др.** Исследование коэффициента аэродинамического сопротивления горных выработок // Горн. журн. 1991. № 2. С. 47–50.
10. **Зеленецкий В. А.** Аналитика кривых И. Никурадзе // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, вып. 3. С. 67–73.
11. **Матвеев Н. М.** Дифференциальные уравнения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1963.
12. **Гершензон Е. М.** Курс общей физики: Молекулярная физика / Е. М. Гершензон, Н. Н. Малов, А. Н. Мансуров, В. С. Эткин. М.: Просвещение, 1982.

Поступила в редакцию 29/IX 2009 г.,
в окончательном варианте — 16/II 2010 г.