УДК 519.246.8

МЕТОД РЕТРОСПЕКТИВНОГО ПРОГНОЗА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРОГНОЗИРОВАНИЮ ТРЕНДА СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В. Г. Алексеев

Учреждение Российской академии наук
Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН,
119017, Москва, пер. Пыжевский, 3
E-mail: aleks.v.g@mail.ru

Предложен эффективный алгоритм прогнозирования тренда (детерминированной основы) $m(t)$ стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$. Исходная информация относительно случайного процесса $X(t)$ ограничивается предположением, что его среднее значение (математическое ожидание) равно нулю. Интервал наблюдения $[0, T]$ за суммой тренда $m(t)$ и реализации $x(t)$ случайного процесса $X(t)$ предполагается конечным. Построение прогнозирующей оценки $\mu(T+\tau)$, где τ — интервал упреждения, обеспечивает автоматический учёт статистических характеристик случайного процесса $X(t)$.

Ключевые слова: стационарный случайный процесс, тренд (аддитивная детерминированная составляющая), прогнозирующая оценка.

Введение. Необходимость возможно более точного выделения и прогноза тренда случайного процесса естественным образом возникает в климатологии, гидрологии и многих других разделах геофизики. Например, в журнале «Метеорология и гидрология» слово «тренд» можно встретить если не в каждой, то, по крайней мере, в каждой второй работе. Речь идёт, в частности, о тренде такого важного для всех нас метеоэлемента, как приземная температура воздуха. Ряд технических приложений задачи выделения и прогноза тренда указан в [1–3]. В данном сообщении представлен разработанный до деталей алгоритм, позволяющий при весьма широких условиях и весьма скудной информации относительно исследуемого случайного процесса строить прогноз его тренда достаточно высокого качества.

Приступая к прогнозированию тренда того или иного случайного процесса, мы опираемся на его реализацию конечной длины, причём качество предлагаемого прогноза будет тем выше, чем эта реализация длиннее. Вся информация относительно исследуемого случайного процесса, которая может быть из этой реализации извлечена, в полной мере используется при построении статистической оценки, реализующей искомый прогноз.

Построение прогнозирующей оценки. Пусть временно́й ряд

$$y(t) = m(t) + x(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

описывает результаты наблюдений за тем или иным физическим или техническим объектом. Относительно слагаемых $m(t)$ и $x(t)$ в правой части соотношения (1) будем предполагать, что первое из них описывает тренд (аддитивную детерминированную составляющую) временно́го ряда $y(t)$, а второе представляет собой реализацию некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$ со средним $\langle X(t)\rangle \equiv 0$. Будем, кроме того, предполагать в дальнейшем, что при заданном интервале упреждения τ длина T интервала наблюдения не настолько мала, чтобы ограничить нас в выборе прогнозирующей оценки. Мы не будем предполагать, что функция $m(t)$ известна с точностью до одного или нескольких числовых параметров. Наш подход к прогнозированию тренда $m(t)$

является сугубо непараметрическим. Будем предполагать лишь, что функция $m(t)$ имеет непрерывную производную. Каких-либо дополнительных предположений относительно случайного процесса $X(t)$ мы также делать не будем. Учёт статистических характеристик случайного процесса $X(t)$ осуществляется при построении прогнозирующей оценки (см. далее) автоматически.

Построение прогнозирующей оценки начнём с построения оценки самого тренда $m(t)$, которую в точке $t = t_0$ будем искать в виде

$$\mu_1(t_0) = h^{-1} \int\limits_{-h}^{h} w(t/h) y(t_0 + t) dt \tag{2}$$

или

$$\mu_2(t_0) = h_0^{-1} \int\limits_{-h_0}^{0} u(t/h_0) y(t_0 + t) dt. \tag{3}$$

Здесь параметры h и h_0 положительны, а весовые функции $w(t)$, $-1 \leq t \leq 1$, и $u(t)$, $-1 \leq t \leq 0$, ограничены и удовлетворяют следующим условиям:

$$w(-t) = w(t), \quad \int\limits_{-1}^{1} w(t) dt = \int\limits_{-1}^{0} u(t) dt = 1.$$

В качестве простейших весовых функций $w(t)$ и $u(t)$, удовлетворяющих сформулированным выше условиям, могут быть рекомендованы функции

$$w(t) = (3/4)(1 - t^2), \quad -1 \leq t \leq 1; \quad u(t) = 2(1 + t), \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Оценку (2) будем называть симметричной оценкой тренда $m(t)$, оценку (3) — его левосторонней оценкой. Разумеется, левосторонняя оценка менее точна в сравнении с симметричной, но она позволяет оценить тренд $m(t)$ в конечной точке интервала наблюдения, т. е. там, где симметричная оценка не может быть построена.

Полуинтервал осреднения h для построения оценки $\mu_1(t)$ выберем произвольным образом (однако, с таким расчётом, чтобы длина интервала $[h, T - h]$ была сравнима с T). В основу выбора полуинтервала осреднения h кладутся наши априорные представления о временны́х масштабах колебаний, которые мы желаем отнести к тренду. Выбрав тем или иным образом параметр h в формуле (2), положим

$$m(t) \equiv \mu_1(t). \tag{4}$$

Отождествление (4) не противоречит исходному предположению (1), так как для реальных (не модулируемых искусственно) временны́х рядов вопрос о том, что отнести к тренду, а что — к низкочастотной составляющей случайного процесса $X(t)$, не имеет однозначного решения. В выборе масштаба колебаний, относящихся к тренду, всегда имеется известная доля произвола.

Наряду с оценкой тренда $m(t)$ далее потребуется левосторонняя оценка его производной, которую будем искать в виде

$$D\mu(t_0) = h_1^{-1} \int\limits_{-h_1}^{0} v(t/h_1) y(t_0 + t) dt, \tag{5}$$

где $h_1 > 0$, а функция $v(t)$ ограничена и удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{-1}^{0} t^r v(t)dt = \begin{cases} 0, & r = 0, \\ 1, & r = 1. \end{cases} \tag{6}$$

В качестве одной из простейших весовых функций, удовлетворяющих сформулированным выше условиям, может быть рекомендована функция

$$v(t) = 12(1 + 4t + 3t^2), \quad -1 \le t \le 0.$$

Здесь автору хотелось бы обратить внимание читателя на одну тонкость сугубо вычислительного характера. При вычислении на ЭВМ оценки $D\mu(t)$ интеграл в правой части формулы (5) заменяется конечной суммой. При этом весовая функция $v(t)$ заменяется набором весовых коэффициентов $\{v(t_j)\}$, где $t_j = -j\Delta t/h_1$ и Δt — шаг разбиения интервала $[-h_1, 0]$ при переходе от интеграла к интегральной сумме. Что же касается условий (6) для весовой функции $v(t)$, то они заменяются соотношениями

$$\sum_{j=0}^{n} v(t_j) = 0; \quad -\Delta t \sum_{j=1}^{n} jv(t_j) = 1, \tag{7}$$

где $n = h_1/\Delta t$ (интервал осреднения h_1 предполагаем кратным величине Δt). Путём надлежащей нормировки весовых коэффициентов $v(t_j)$ нетрудно добиться того, чтобы второе из равенств (7) выполнялось точно (в пределах точности, определяемой избранной нами длиной ячейки памяти ЭВМ). При этом, однако, первое из соотношений (7) будет выполняться лишь приближённо. Возникающая здесь «невязка» может в определённых условиях существенно исказить результаты вычислений. Чтобы этого не произошло, следует перед вычислением оценки $D\mu(t)$ вычесть из исходного ряда наблюдений его постоянную составляющую (т. е. среднее арифметическое всех наблюдений).

Далее будем видеть свою задачу в том, чтобы, используя левосторонние оценки $\mu_2(t)$ и $D\mu(t)$, наилучшим образом аппроксимировать и прогнозировать заданный соотношением (4) тренд $m(t)$.

Прежде всего, располагая избранным нами значением параметра h в формуле (2), приступим к определению параметра h_0 (интервала осреднения в формуле (3)). Введём в рассмотрение постоянную c_0, сравнимую с h ($c_0 > h$). Параметр h_0 в формуле (3) определим таким образом, чтобы интеграл

$$B(h_0) = (T - h - c_0)^{-1} \int\limits_{c_0}^{T-h} [\mu_2(t) - m(t)]^2 dt \tag{8}$$

обращался в минимум, т. е. чтобы левосторонняя оценка $\mu_2(t)$ наилучшим образом (в пределах интервала $[c_0, T - h]$) аппроксимировала тренд $m(t)$. При этом следует иметь в виду, что функция $B(h_0)$ может иметь не один, а несколько (скорее всего, не более двух) локальных минимумов. Это обстоятельство требует вычисления и просмотра значений функции $B(h_0)$ на достаточно широком интервале значений её аргумента.

Пусть теперь τ — интервал упреждения при построении прогноза тренда $m(t)$ (это значит, что, располагая реализацией (1), мы хотели бы получить представление о величине $m(T + \tau)$). Оценку величины $m(T + \tau)$ будем искать в следующем виде:

$$\mu(T + \tau) = \mu_2(T) + \theta\tau D\mu(T). \tag{9}$$

Здесь $D\mu(t)$ — левосторонняя оценка производной тренда $m(t)$ и $\theta > 0$. Параметр θ в формуле (9) нельзя с самого начала брать равным 1, так как тренд $m(t)$ и его производная $m'(t)$ оцениваются с различной относительной точностью. Правая часть формулы (9) содержит два неизвестных параметра: интервал осреднения h_1, входящий в формулу (5) для оценки $D\mu(t)$, и числовой параметр θ. Введём в рассмотрение постоянную c_1, сравнимую с h ($c_1 > \max[h, h_0]$). Параметры h_1 и θ выберем таким образом, чтобы интеграл

$$A(h_1, \theta) = (T - h - \tau - c_1)^{-1} \int\limits_{c_1}^{T-h-\tau} [\mu_2(t) + \theta\tau D\mu(t) - m(t+\tau)]^2 dt \qquad (10)$$

обращался в минимум, т. е. чтобы оценка $\mu_2(t) + \theta\tau D\mu(t)$ наилучшим образом (в пределах интервала $[c_1, T - h - \tau]$) аппроксимировала упреждённый тренд $m(t + \tau)$. Величина $A(h_1, \theta)$, по-видимому, никакого строгого вероятностного смысла не имеет. Однако, поскольку какой-либо иной мерой ошибки прогнозирования тренда мы не располагаем, у нас нет возможности избежать использования величины $A(h_1, \theta)$. Условно назовём квадратный корень из неё эмпирическим стандартным отклонением прогнозирующей оценки $\mu(T+\tau)$. Вычисляя прогнозирующую оценку (9), всегда желательно рядом с ней привести её «эмпирическое стандартное отклонение» $[A(h_1, \theta)]^{1/2}$.

Выше отмечено, что функция $B(h_0)$, определённая формулой (8), может иметь не один, а несколько локальных минимумов. То же самое может быть сказано и о функции $A(h_1, \theta)$, определённой формулой (10). Поэтому о выявлении абсолютного минимума функции $A(h_1, \theta)$ можно говорить лишь после вычисления и просмотра значений, принимаемых ею в достаточно широкой области изменения двумерного параметра (h_1, θ).

Для точки (h_1, θ), минимизирующей функцию $A(h_1, \theta)$, представляет интерес также величина

$$\lambda(h_1, \theta) = [A(h_1, 0) - A(h_1, \theta)]/A(h_1, 0),$$

характеризующая выигрыш в точности прогнозирования $m(t)$, достигаемый за счёт использования левосторонней оценки $D\mu(t)$.

После того как прогнозирующая оценка (9) построена по реализации (1) (т. е. определены все её параметры), получаем возможность прогнозировать тренд $m(t)$ в режиме реального времени, если только а) статистические характеристики случайного процесса $X(t)$ остаются неизменными и б) характер поведения тренда $m(t)$ не претерпевает каких-либо резких изменений. Однако здесь следует указать, что предположение «а» имеет строгий вероятностный смысл: случайный процесс $X(t)$ стационарен в пределах интервала наблюдения. Что же касается предположения «б», то оно носит, очевидно, описательный характер. Вопрос о том, происходят ли существенные изменения в поведении тренда $m(t)$, исследователь должен решить, что называется «на глазок», опираясь, например, на графическое изображение исследуемого временно́го ряда.

Заключение. Предложенное в данной работе решение задачи прогноза тренда $m(t)$ по реализации (1), по-видимому, может найти применение в геофизике, а также в ряде разделов технических наук. Способ построения прогнозирующей оценки $\mu(T+\tau)$ позволяет классифицировать рассмотренный метод как метод ретроспективного прогноза.

Разумеется, прогнозирующая оценка (9) не является единственно возможной. При некоторых дополнительных условиях может быть рассмотрена оценка

$$\mu(T + \tau) = \mu_2(T) + \theta_1\tau D\mu(T) + \theta_2\tau^2 D^2\mu(T),$$

где θ_1 и θ_2 — числовые параметры, а $D^2\mu(T)$ — левосторонняя оценка второй производной тренда $m(t)$. При этом следует иметь в виду, что вычисление левосторонней оценки $D^2\mu(T)$ требует предварительного удаления из исходной реализации её линейной составляющей.

Можно ожидать, что метод ретроспективного прогноза (в той или иной его постановке) окажется полезным широкому кругу исследователей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ромащев А. А.** О применении сглаженных величин // АиТ. 1984. № 7. С. 169–172.
2. **Бывайков М. Е., Ромащев А. А.** О синтезе разностного уравнения для статистического оценивания и прогнозирования // АиТ. 1987. № 9. С. 51–57.
3. **Бывайков М. Е., Ромащев А. А.** Линейные разностные уравнения для прогнозирующих фильтров // АиТ. 1990. № 1. С. 53–65.

Поступила в редакцию 1 апреля 2011 г.