ПМТФ, № 3, 1965

# О НЕЛИНЕЙНЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ В ПЛАЗМЕ С КУЛОНОВСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

*Н. П. Гиоргадзе, В. П. Силин*

*(Москва, Тбилиси)*

Теория термодинамических флуктуаций в плазме в настоящее время достаточно хорошо разработана [1–3]. Вместе с тем, на практике часто приходится сталкиваться с состояниями плазмы, весьма далекими от равновесных. Флуктуации в такие неравновесных состояниях исследовались в ряде работ [4–9]. При этом рассмотрении велось в рамках линейного приближения.

Следует, однако, отметить, что при определенных условиях пренебрежение нелинейными эффектами может оказаться неоправданным. Это, в особенности, касается состояний плазмы, близких к неустойчивым. Вблизи таких состояний флуктуации различных физических величин весьма велики. Подобная ситуация имеет место, например, при наблюденной на опыте «критической опалесценции» в плазме, т. е. при аномально сильном рассеянии неустойчивой плазмой электромагнитных волн [10]. Другим примером, иллюстрирующим недостаточность линейного приближения, может служить зависимость коэффициента переноса от ионно-звуковых колебаний при достаточно большом отношении электронной и ионной температур [11]. Наконец, нелинейные эффекты могут оказаться существенными в плазме с высоко развитой турбулентностью.

Все эти обстоятельства указывают на необходимость выразить различные корреляторы, характерные для флуктуационных процессов, через высшие корреляционные функции. При этом естественно ограничиться для начала первым по нелинейности приближением.

В настоящей работе эта задача решается для плазмы с кулоновским взаимодействием.

1. Как известно [12], состояние двукомпонентной плазмы с кулоновским взаимодействием может быть описано фазовой плотностью

$$N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ia}(t))\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{ia}(t))$$

удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{r}} - \sum_b \int d\mathbf{r}' d\mathbf{p}' \frac{\partial U_{ab}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \lambda)}{\partial \mathbf{r}} N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t)\frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

Здесь

$$U_{ab}(r, \lambda) = \frac{e_a e_b}{r}(1 - e^{-\lambda r}), \qquad \lambda > 0 \tag{1.1}$$

— модифицированное кулоновское взаимодействие, при $\lambda \to \infty$ переходящее в кулоновское. Введение взаимодействия (1.1) является общепринятым формальным приемом, применяемым для исключения собственно энергетических расходимостей, возникающих при описании системы частиц с кулоновским взаимодействием [13]. Фурье-образ (1.1) отличается от образа кулоновского взаимодействия множителем $\lambda^2 / (k^2 + \lambda^2)$, обеспечивающим сходимость интегралов в $\mathbf{k}$-пространстве, и смысл вышеуказанной процедуры заключается в том, что предельный переход $\lambda \to \infty$ осуществляется уже в конечных результатах. Можно, однако, проследить, что оператор $\lim (\lambda^2 / k^2 + \lambda^2)$ при $\lambda \to \infty$ эквивалентен замене несобственных интегралов по $\mathbf{k}$-пространству, возникающих в случае кулоновского взаимодействия, интегралами в смысле главного значения.

Последний подход является, по-видимому, более удобным, поскольку позволяет избавиться от дополнительного множителя.

Представим фазовую плотность в виде двух слагаемых

$$N_a = \langle N_a \rangle + \delta N_a$$

первое из которых представляет собой среднее по ансамблю от фазовой плотности, а второе — описывает флуктуации около среднего значения. По определению, $\langle \delta N_a \rangle = 0$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что плазма в целом нейтральна и что состояния квазиравновесны. Последнее условие подразумевает медленность пространственно-временных изменений средних значений фазовой плотности по сравнению с соответствующими масштабами флуктуаций.

Можно показать, что $\delta N_a$ подчиняется уравнениям

$$\frac{\partial \delta N_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \langle N_a \rangle}{\partial \mathbf{p}} \sum_b \int d\mathbf{r}' d\mathbf{p}' \frac{\partial U_{ab}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial \mathbf{r}} \delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) =$$

$$= \sum_b \int d\mathbf{r}' d\mathbf{p}' \frac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\delta Q_{ab} - \langle \delta Q_{ab} \rangle) \qquad (1.2)$$

$$\delta Q_{ab} = \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, \delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t)$$

Наконец, можно установить необходимые в дальнейшем соотношения [12]

$$\langle N_a \rangle = n_a f_a \qquad (1.3)$$

$$\langle \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, \delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) \rangle = \delta_{ab} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\, n_b f_b +$$
$$+ n_a n_b g_{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}') \qquad (1.4)$$

$$\langle \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, \delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t)\, \delta N_c(\mathbf{r}'', \mathbf{p}'', t) \rangle =$$
$$= \delta_{ab}\delta_{ac}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'')\, n_c f_c +$$
$$+ \delta_{ab}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\, n_a n_c g_{ac} + \delta_{ac}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'')\, n_c n_b g_{bc} +$$
$$+ \delta_{bc}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\, \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')\, n_a n_b g_{ab} + n_a n_b n_c d_{abc} \qquad (1.5)$$

$$g_{ab} = f_{ab} - f_a f_b, \quad d_{abc} = f_{abc} - g_{ab} f_c - g_{bc} f_a - g_{ac} f_b - f_a f_b f_c$$

Здесь $n_a$ — число частиц сорта $a$ в единице объема, а $g_{ab}$ и $d_{abc}$ — парная и тройная корреляционные функции соответственно.

2. Флуктуационные процессы в плазме определяются двувременным коррелятором

$$\langle \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, \delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) \rangle \qquad (2.1)$$

При его вычислении в рамках линейной теории тройным одновременным коррелятором пренебрегают, вследствие чего в системе уравнений (1.2) пренебрегают правой частью. Тогда система оказывается самосогласованной, что обеспечивает решение задачи. В первом, по нелинейности, приближении коррелятор (1.5) сохраняется и соответственно удерживается правая часть в (1.2). В силу этого возникает необходимость дополнить систему (1.2) уравнениями для $\delta Q_{ab}$. Оставляя, однако, на данной стадии этот вопрос открытым, примем формально правую часть в системе (1.2) заданной и решим для нее начальную задачу с начальным условием

$$\delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t=0) = \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0)$$

Для этого применим одностороннее преобразование Фурье по времени и преобразование Фурье по координатам

$$\delta N_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega) = \int_0^\infty dt \int d\mathbf{r}\, \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, e^{i[(\omega+i0)t-\mathbf{kr}]}$$

$$\delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int d\omega \delta N_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega)\, e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})}$$

Несложные вычисления дают

$$\delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \delta N_a(\mathbf{r}-\mathbf{v}t, \mathbf{p}, 0) - \sum_b \frac{4\pi i e_a e_b}{i(2\pi)^4} n_a \int d\mathbf{r}' d\mathbf{p}' \delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0) \times$$
$$\times \int d\mathbf{k} d\omega \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \frac{e^{-i[\omega t - i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]}}{k^2(\omega+i0-\mathbf{kv})(\omega+i0-\mathbf{kv}')\,\varepsilon(\omega+i0, \mathbf{k})} + \delta n_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \qquad (2.2)$$

где

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{k^2} n_a \int d\mathbf{p} \frac{1}{\omega - \mathbf{kv}} \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\delta n_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} d\omega e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})} \frac{1}{\omega - \mathbf{kv} + i0} \Big[ i A_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega) -$$
$$- \sum_b \frac{4\pi i e_a e_b}{k^2} n_a \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \int d\mathbf{p}' \frac{A_b(\mathbf{k}, \mathbf{p}', 0)}{(\omega+i0-\mathbf{kv}')\,\varepsilon(\omega+i0, \mathbf{k})} \Big] \qquad (2.3)$$

причем $A_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega)$ — фурье-трансформанта

$$A_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_b \int d\mathbf{r}' d\mathbf{p}' \frac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\delta Q_{ab} - \langle \delta Q_{ab} \rangle) \qquad (2.4)$$

Умножая (2.2) на $\delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0)$ и усредняя результат по ансамблю, без труда найдем

$$\langle \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, \delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k}\, d\omega e^{i[\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega t]} \times$$
$$\times (\delta N_a(\mathbf{p})\, \delta N_b(\mathbf{p}'))_{\mathbf{k}, \omega+i0} + \langle \delta n_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, \delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0) \rangle \qquad (2.5)$$

где

$$(\delta N_a(\mathbf{p})\, \delta N_b(\mathbf{p}'))_{\mathbf{k}, \omega+i0} = \frac{i}{\omega + i0 - \mathbf{kv}} \Big[ \delta_{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') n_b f_b +$$
$$+ n_a n_b G_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') - \frac{4\pi}{k^2} e_a e_b n_a n_b f_b \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \frac{1}{(\omega+i0-\mathbf{kv})\,\varepsilon(\omega+i0, k)} -$$
$$- \sum_c \frac{4\pi}{k^2} e_a e_b n_a n_b n_c \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \frac{1}{\varepsilon(\omega+i0, \mathbf{k})} \int d\mathbf{p}'' \frac{G_{cb}(\mathbf{k}, \mathbf{p}'', \mathbf{p}')}{(\omega+i0-\mathbf{kv}'')} \Big] \qquad (2.6)$$

Здесь $G_{ab}$ — фурье-трансформанта парной корреляционной функции

$$g_{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} G_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')\, e^{i\mathbf{kr}}$$

Первое слагаемое в (2.5) совпадает с результатом линейной теории [6] (при условии, что в качестве парной корреляционной функции используется «линейная» парная корреляционная функция). Нелинейность содержится как в последнем члене, так и в первом, поскольку теперь вместо $G_{ab}$ следует подставить «нелинейную» парную корреляционную функцию.

Если обратить внимание на структуру поправочного члена в (2.5), то становится очевидным, что второе слагаемое в (2.4) не вносит вклада в двувременной коррелятор. С учетом же лишь первого слагаемого получаем

$$A_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega) = \frac{4\pi i e_a}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\int d\mathbf{k}'\frac{\mathbf{k}'}{(k')^2}Q_a(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}', \mathbf{p}, \omega) \tag{2.7}$$

где

$$Q_a(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \omega) = \sum_b e_b\int d\mathbf{p}'\delta Q_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega) \tag{2.8}$$

Соотношение (2.5) удобно представить в несколько ином виде. Умножая (2.5) слева на оператор

$$\sum_a e_a\int d\mathbf{p}$$

без труда найдем

$$\langle\delta\rho(\mathbf{r}, t)\,\delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0)\rangle = \int\frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4}e^{i[\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega t]}(\delta\rho\delta N_b(\mathbf{p}'))_{\mathbf{k},\omega+i0,\mathbf{r}'} \tag{2.9}$$

где

$$(\delta\rho\delta N_b(\mathbf{p}'))_{\mathbf{k},\omega+i0,r'} = \Phi_b(\mathbf{k}, \omega+i0, \mathbf{p}') + \Psi_b(\mathbf{k}, \omega+i0, \mathbf{p}', \mathbf{r}'), \tag{2.10}$$

$$\Phi_b(\mathbf{k}, \omega+i0, p') = \frac{in_b}{\varepsilon(\omega+i0, \mathbf{k})}\left[\frac{e_b f_b}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}'+i0}+\sum_a e_a n_a\int d\mathbf{p}\frac{G_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}+i0}\right] \tag{2.11}$$

$$\Psi_b(\mathbf{k}, \omega+i0, \mathbf{p}', \mathbf{r}') = \frac{i}{\varepsilon(\omega+i0, \mathbf{k})}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\sum_a\frac{4\pi i}{(k')^2}e_a^2\times$$
$$\times\int d\mathbf{p}\frac{1}{\omega+i0-\mathbf{k}\mathbf{v}}\left(\mathbf{k}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\langle Q_a(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}', \mathbf{p}, \omega)\,\delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0)\rangle \tag{2.12}$$

Позднее увидим, что зависимость $\Psi_b$ от $\mathbf{r}'$ ложная. При помощи соотношений (2.10) — (2.12) нетрудно представить (2.5) в виде

$$\langle\delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\,\delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0)\rangle = \int\frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4}e^{i[\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega t]}\times$$
$$\times\left[\chi_{ab}(\mathbf{k}, \omega+i0, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{r}') - \frac{4\pi}{k^2}e_a n_a\mathbf{k}\frac{\partial f_a}{\partial\mathbf{p}}\frac{(\delta\rho\delta N_b(\mathbf{p}'))_{\mathbf{k},\omega+i0,\mathbf{r}'}}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}+i0}\right] \tag{2.13}$$

где

$$\chi_{ab}(\mathbf{k}, \omega+i0, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{r}') = \chi_{ab}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega+i0, \mathbf{p}, \mathbf{p}') +$$
$$+\chi_{ab}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega+i0, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{r}') \tag{2.14}$$

$$\chi_{ab}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega+i0, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{i}{\omega+i0-\mathbf{k}\mathbf{v}}[\delta_{ab}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')n_b f_b +$$
$$+n_a n_b G_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')] \tag{2.15}$$

$$\chi_{ab}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega+i0, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{r}') = \frac{i}{\omega+i0-\mathbf{k}\mathbf{v}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}\frac{4\pi i e_a}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{k}'}{(k')^2}\times$$
$$\times\mathbf{k}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\langle Q_a(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}', \mathbf{p}, \omega)\,\delta N_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0)\rangle \tag{2.16}$$

Следует заметить, что форма связи между корреляторами $\langle \delta N \delta N \rangle$ и $\langle \delta \rho \delta N \rangle$ того же вида, что и в линейной теории [6].

3. Соотношения (2.9) и (2.13) все еще будут лишь формальным решением поставленной задачи, поскольку входящая сюда функция $\delta Q_{ab}$ пока не определена. Поэтому необходимо построить систему уравнений, определяющих $\delta Q_{ab}$. Умножая уравнение для $\delta N_a$ на $\delta N_b$ и уравнение для $\delta N_b$ на $\delta N_a$ и складывая результаты, найдем

$$\frac{\partial \delta Q_{ab}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\right) \delta Q_{ab} - \sum_c \int d\mathbf{r}'' d\mathbf{p}'' \left[ n_a \frac{\partial U_{ac}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \delta Q_{bc} + \right.$$

$$\left. + n_b \frac{\partial U_{bc}}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}'} \delta Q_{ac} \right] = \sum_c \int d\mathbf{r}'' d\mathbf{p}'' \left[ \frac{\partial U_{ac}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\delta R_{abc} - \langle \delta Q_{ac} \rangle \delta N_b) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial U_{bc}}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} (\delta R_{abc} - \langle \delta Q_{bc} \rangle \delta N_a) \right] \tag{3.1}$$

где

$$\delta R_{abc} = \delta N_a \delta N_b \delta N_c$$

Система (3.1) позволяет выразить $\delta Q_{ab}$ через парную функцию распределения, флуктуацию фазовой плотности и тройной одновременной коррелятор. Если, однако, ограничиться учетом первых по нелинейности поправок, то правой частью (3.1) можно пренебречь, что автоматически замыкает задачу.

Решение начальной задачи для системы (3.1), без правой части, будем искать методом Фурье. При этом

$$\delta Q_{ab} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega) = \int_0^\infty dt \int d\mathbf{r} \, d\mathbf{r}' \delta Q_{ab} (\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \, e^{i[(\omega + i0)t - \mathbf{kr} - \mathbf{k}'\mathbf{r}']}$$

$$\delta Q_{ab} (\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) = \frac{1}{(2\pi)^7} \int d\mathbf{k} \, d\mathbf{k}' \int d\omega \delta Q_{ab} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega) \, e^{-i[\omega t - \mathbf{kr} - \mathbf{k}'\mathbf{r}']}$$

вследствие чего придем к уравнениям

$$\delta Q_{ab} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega) = \frac{i \delta Q_{ab} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', 0)}{\omega + i0 - \mathbf{kv} - \mathbf{k}'\mathbf{v}'} -$$

$$- \sum_c \frac{4\pi e_a e_c}{k^2} n_a \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \frac{1}{\omega + i0 - \mathbf{kv} - \mathbf{k}'\mathbf{v}'} \int d\mathbf{p}'' \delta Q_{bc} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}', \mathbf{p}'', \omega) -$$

$$- \sum_c \frac{4\pi e_b e_c}{k^2} n_b \mathbf{k}' \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}'} \frac{1}{\omega + i0 - \mathbf{kv} - \mathbf{k}'\mathbf{v}'} \int d\mathbf{p}'' \delta Q_{ac} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}', \mathbf{p}'', \omega) \tag{3.2}$$

$$\delta Q_{ab} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', 0) = \delta Q_{ab} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t = 0)$$

Заметим, что $\delta Q_{ab}$ симметрична относительно замены $a$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ соответственно на $b$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{p}'$, и наоборот. При решении (3.2) будем следовать методике, изложенной в работах [14,15]. Введем

$$Q_a (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \omega) = \sum_b e_b \int d\mathbf{p}' \delta Q_{ab} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', \omega)$$

Умножая (3.2) на $e_b$, суммируя по $b$ и интегрируя по $\mathbf{p}'$, найдем

$$\varepsilon (\omega - \mathbf{kv} + i0, \mathbf{k}') \, Q_a (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \omega) = \sum_b e_b \int d\mathbf{p}' \frac{i \delta Q_{ab} (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', 0)}{\omega + i0 - \mathbf{kv} - \mathbf{k}'\mathbf{v}'} -$$

$$- \frac{8\pi^2 i e_a}{k^2} n_a \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} M (\mathbf{k}', \mathbf{k}, \omega - \mathbf{kv} + i0, \omega) \tag{3.3}$$

где обозначено

$$M(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega, \omega') = \frac{1}{2\pi i}\sum_a e_a \int d\mathbf{p}\, \frac{Q_a(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \omega')}{\omega - \mathbf{kv}}$$

Умножая теперь (3.3) на $e_a\delta(\omega' - \omega + \mathbf{kv})$, суммируя по $a$ и интегрируя по $\mathbf{p}$, получим

$$\varepsilon(\omega' + i0, \mathbf{k}')\,[M(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega - \omega' - i0, \omega) - M(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega - \omega' + i0, \omega)] =$$

$$= \sum_a e_a \int d\mathbf{p} \sum_b e_b \int d\mathbf{p}'\, \frac{i\delta Q_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', 0)}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}' + i0}\,\delta(\omega - \omega' - \mathbf{kv}) -$$

$$- M(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \omega' + i0, \omega)\,[\varepsilon(\omega - \omega' - i0, \mathbf{k}) - \varepsilon(\omega - \omega' + i0, \mathbf{k})] \quad (3.4)$$

Вычитая из (3.4) уравнение, полученное заменой в нем $\mathbf{k} \rightleftarrows \mathbf{k}'$ и $\omega - \omega' \to \omega'$, будем иметь (3.5)

$$\varepsilon(\omega' + i0, \mathbf{k}')\,M(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega - \omega' - i0, \omega) + \varepsilon(\omega - \omega' - i0, \mathbf{k}) \times$$

$$\times M(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \omega' + i0, \omega) - \frac{1}{2\pi i}\sum_a e_a \int d\mathbf{p}' \sum_b \frac{i\delta Q_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', 0)\, e_b\, d\mathbf{p}}{(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}' + i0)(\omega - \omega' - \mathbf{kv} - i0)} =$$

$$= \varepsilon(\omega' - i0, \mathbf{k}')\; M(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega - \omega' + i0, \omega) + \varepsilon(\omega - \omega' + i0, \mathbf{k}) \times$$

$$\times M(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \omega' - i0, \omega) - \frac{1}{2\pi i}\sum_a e_a \int d\mathbf{p} \sum_b e_b \int \frac{i\delta Q_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', 0)\, d\mathbf{p}'}{(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}' - i0)(\omega - \omega' - \mathbf{kv} + i0)}$$

Рассматривая (3.5) как граничное соотношение для некоторой функции комплексного переменного $\omega'$, исчезающей при $|\omega'| \to \infty$, по известной теореме из теории аналитических функций заключаем

$$\varepsilon(\omega', \mathbf{k}')\,M(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega - \omega', \omega) + \varepsilon(\omega - \omega', \mathbf{k})\,M(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \omega', \omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_a e_a \int d\mathbf{p} \sum_b e_b \int d\mathbf{p}'\, \frac{i\delta Q_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', 0)}{(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}')(\omega - \omega' - \mathbf{kv})} \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) позволяет исключить из (3.4) величину $M(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega - \omega', \omega)$. В результате находим

$$\frac{M(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \omega' - i0, \omega)}{\varepsilon(\omega' - i0, \mathbf{k}')} - \frac{M(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \omega' + i0\omega)}{\varepsilon(\omega' + i0, \mathbf{k}')} =$$

$$= \sum_a e_a \int d\mathbf{p} \sum_b e_b \int d\mathbf{p}'\, \frac{1}{2\pi i}\, \frac{1}{\omega - \omega' - \mathbf{kv} + i0} \times$$

$$\times i\, \frac{\delta Q_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', 0)}{\varepsilon(\omega - \omega' + i0, \mathbf{k})} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega' - i0, \mathbf{k}')(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}' - i0)} - \frac{1}{\varepsilon(\omega' + i0, \mathbf{k}')(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}' + i0)}\right]$$

Откуда вследствие формул Сохоцкого — Племеля получим

$$\frac{M(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \omega', \omega)}{\varepsilon(\omega', \mathbf{k}')} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int \frac{du}{\omega' - u} \sum_a e_a \int d\mathbf{p} \sum_b e_b \int d\mathbf{p}' \times$$

$$\times \frac{i\delta Q_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', 0)}{\varepsilon(\omega - u + i0, \mathbf{k})(\omega - u - \mathbf{kv} + i0)} \left[\frac{1}{(u - \mathbf{k}'\mathbf{v}' - i0)\,\varepsilon(u - i0, \mathbf{k}')} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(u - \mathbf{k}'\mathbf{v}' + i0)\,\varepsilon(u + i0, k')}\right]$$

Подставляя (3.7) в (3.3), будем иметь

$$Q_a(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \omega) = \sum_b e_b \int d\mathbf{p}' \frac{i\delta Q_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', 0)}{\varepsilon(\omega - \mathbf{kv} + i0, \mathbf{k}')(\omega - \mathbf{kv} - \mathbf{k}'\mathbf{v}' + i0)} +$$

$$+ \sum_b e_b \int d\mathbf{p}' \sum_c e_c \int d\mathbf{p}'' \frac{4\pi}{k^2} e_a n_a \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{du}{\omega - \mathbf{kv} - u + i0} \times$$

$$\times \frac{i\delta Q_{bc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}', \mathbf{p}'', 0)}{\varepsilon(\omega - u + i0, \mathbf{k})\,\varepsilon(u + i0', \mathbf{k}')(\omega - u - \mathbf{k}'\mathbf{v}' + i0)(u - \mathbf{k}'\mathbf{v}'' + i0)}$$

Формула (3.8) и определяет явное выражение функции, входящей в искомые двувременные корреляторы (2.9) — (2.11).

4. Подставляя (3.8) в (2.16), представляя $\delta Q_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', 0)$ интегралом Фурье по координатному пространству, используя (1.5) и затем снова переходя к $\mathbf{k}$-представлению, после вычислений найдем

$$\chi_{ab}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega + i0, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{r}') = \chi_{ab}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega + i0, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\frac{4\pi i}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(k')^2} \times$$

$$\times \Big[\frac{e_a}{\omega - \mathbf{kv} + i0} \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \sum_c e_c \int d\mathbf{p}_1 \frac{N_{acb}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}')}{(\omega - \Delta\mathbf{kv} - \mathbf{k}'\mathbf{v}_1 + i0)\,\varepsilon(\omega - \Delta\mathbf{kv} + i0, \mathbf{k}')} +$$

$$+ \frac{4\pi}{(\Delta\mathbf{k})^2} \frac{1}{2\pi i} \int du \frac{\mathbf{k}'\eta_a(\omega + i0, \mathbf{k}, \omega - u + i0, \Delta\mathbf{k}, \mathbf{v})}{\varepsilon(\omega - u + i0, \Delta\mathbf{k})\,\varepsilon(u + i0, \mathbf{k}')} \times$$

$$\times \sum_c e_c \int d\mathbf{p}_1 \sum_d e_d \int d\mathbf{p}_2 \frac{N_{cdb}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}')}{(\omega - u - \Delta\mathbf{k}\mathbf{v}_2 + i0)(u - \mathbf{k}'\mathbf{v}_1 + i0)} \tag{4.1}$$

где $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ и

$$\eta(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}', \mathbf{v}) = e_a^2 n_a \frac{1}{\omega - \mathbf{kv}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}} \left(\mathbf{k}' \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}}\right) \tag{4.2}$$

$$N_{abc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \delta_{ab}\delta_{ac}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\,\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'')\, n_c f_c + \delta_{ab}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times \tag{4.3}$$

$$\times n_a n_c G_{ac}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'') + \delta_{ac}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'')\, n_c n_b G_{cb}(-\mathbf{k}', \mathbf{p}'', \mathbf{p}') + \delta_{bc}\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'') \times$$

$$\times n_b n_a G_{ab}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') + n_a n_b n_c D_{abc}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}', -\mathbf{k} + \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'')$$

$$d_{abc} = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' e^{i[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r} - \mathbf{k}'\mathbf{r}' - \mathbf{k}\mathbf{r}'']} D_{abc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k} - \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'') \tag{4.4}$$

Остается еще вычислить $\Psi_b$. Для этого воспользуемся очевидным соотношением

$$\Psi_b = \frac{1}{\varepsilon(\omega + i0, \mathbf{k})} \sum_a e_a \int d\mathbf{p}\, \chi_{ab}^{(2)}$$

в силу которого получим

$$\Psi_b = -\frac{4\pi i}{(2\pi)^3 \varepsilon(\omega + i0, \mathbf{k})} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(k')^2} \Big\{\sum_a e_a^2 \int d\mathbf{p} \sum_c e_c \int d\mathbf{p}_1 \frac{1}{\omega - \mathbf{kv} + i0} \times$$

$$\times \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \frac{N_{acb}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}')}{(\omega - \Delta\mathbf{kv} - \mathbf{k}'\mathbf{v}_1 + i0)\,\varepsilon(\omega - \Delta\mathbf{kv} + i0, \mathbf{k}')} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{du\, \mathbf{k}'\eta(\omega + i0, \mathbf{k}, \omega - u + i0, \Delta\mathbf{k})}{\varepsilon(\omega - u + i0, \Delta\mathbf{k})\,\varepsilon(u + i0, \mathbf{k}')\,\Delta} \frac{4\pi}{k^2} \times$$

$$\times \sum_c e_c \int d\mathbf{p}_1 \sum_d e_d \int d\mathbf{p}_2 \frac{N_{cdb}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}')}{(\omega - u - \Delta\mathbf{k}\mathbf{v}_2 + i0)(u - \mathbf{k}'\mathbf{v}_1 + i0)}\Big\}$$

где

$$\eta(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') = \sum_a e_a \int d\mathbf{p}\eta_a(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}', \mathbf{v})$$

— функция, введенная в [15].

Соотношения (2.9)—(2.11) и (4.5) в первом по нелинейности приближении определяют двувременной коррелятор плотности заряда с фазовой плотностью через первую функцию распределения, парную и тройную корреляционные функции. При этом для сохранения порядка малости подставляемые в (2.11) корреляционные функции должны соответствовать первому по нелинейности приближению, тогда как в соотношении (4.5) следует ограничиться линейными корреляционными функциями.

Аналогичные соотношения (2.13)—(2.15) и (4.1) совместно с фурье-образом (2.10), определенным выше, представляют через корреляционные функции двувременной коррелятор фазовой плотности и являются, тем самым, фактическим решением поставленной задачи.

Поступила 16 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтович М. А., Рытов С. М. О дифференциальном законе для интенсивности электрических флуктуаций и о влиянии на них скин-эффекта. Ж. эксперим. и теор. физ., 1952, т. 23, № 3.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.
3. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Атомиздат, 1961.
4. Hubbard I. The friction and diffusion coefficients of the Fokker — Planck equation in a plasma. Proc. Roy. Soc. A, 1961, vol. 260, p. 114.
5. Силин В. П. К теории электромагнитных флуктуаций в плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 41, № 3.
6. Климонтович Ю. Л., Силин В. П. К теории флуктуаций распределений частиц в плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 42, № 1.
7. Rostoker N. Fluctuations in plasma. Nucl. Fusion, 1961, vol. 1.
8. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Ситенко А. Г. К теории флуктуаций распределений в плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 41, № 2.
9. Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А., Силин В. П. О флуктуациях электромагнитного поля в неравновесной плазме. Радиофизика, 1962, т. 5, № 6.
10. Ichimaru S., Pines D., Rostoker N. Observation of critical fluctuations associated with plasma — wave instabilities. Phys. Rev. Letters, 1962, vol. 8, No. 6.
11. Силин В. П., Горбунов Л. М. К кинетике неизотермической плазмы. Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 6.
12. Климонтович Ю. Л. Вторичное квантование в фазовом пространстве. Докл. АН СССР, 1954, т. 96, № 1.
13. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, 1946.
14. Силин В. П. Тройные корреляции в плазме и интеграл столкновения для парной коррелятивной функции. Изв. высш. учебн. заведен., Физика, 1965, № 1.
15. Силин В. П. К кинетической теории взаимодействия плазменных волн. ПМТФ, 1964, № 1, стр. 32.