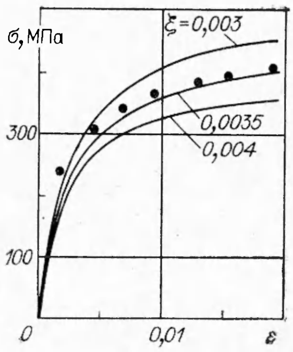

чае выражаются через элементарные функции, и процедура вычисления инвариантов α, γ легко реализуется на ЭВМ [7].

Построим диаграмму растяжения рассматриваемого композита по формулам (2.3), (2.4). Уравнения (2.3) при одноосном растяжении принимают вид

$$\langle\sigma_{11}\rangle = \frac{9K^*\mu^*}{4K^*+\mu^*}\langle\varepsilon_{11}\rangle. \tag{2.5}$$

Зададим вид функций модулей пластичности $\mu_{m,f}(e)$. Согласно [1], участок диаграммы растяжения алюминиевой матрицы будем аппроксимировать экспоненциальной зависимостью, для которой

$$\mu_m(e) = \frac{k_m}{2e}\left(1 - \exp\left(-\frac{2G_m e}{k_m}\right)\right). \tag{2.6}$$

Здесь G_m — модуль сдвига; k_m — предельное напряжение сдвига на данном участке (предел текучести). Материал включений (высокопрочных и высокомодульных частиц окиси алюминия) будем считать идеально упругим во время всего процесса деформирования: $\mu_f = \text{const}$. Уравнения (2.4)—(2.6) решались численно на ЭВМ методом последовательных приближений.

На рисунке приведено сравнение теоретических диаграмм растяжения композита САП (14 % Al_2O_3), рассчитанных по формулам (2.4)—(2.6), с экспериментальными результатами, приведенными в [8], сплошные линии — расчеты по формулам (2.4)—(2.6), точки — экспериментальные данные. Расчетные значения величин следующие: $E_m = 71$ ГПа, $E_f = 2500$ ГПа, $\nu_m = 0{,}34$, $\nu_f = 0{,}2$, $k_m = 25$ МПа, $c_f = 0{,}14$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сараев Л. А.** Упругопластические свойства многокомпонентных композиционных материалов // ПМТФ.— 1988.— № 4.
2. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
3. **Сараев Л. А.** Поверхность текучести композиционного материала с однонаправленным распределением включений // Механика деформируемых сред.— Куйбышев: КГУ, 1978.— Вып. 3.
4. **Левин В. М.** К определению упругих и термоупругих постоянных композитных материалов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 6.
5. **Сараев Л. А.** Эффективный закон пластического течения хаотически армированного композиционного материала // Прочность и долговечность элементов конструкций.— Куйбышев: КПтИ, КуАИ, 1983.
6. **Основы** материаловедения/Под ред. И. И. Сидорина.— М.: Машиностроение, 1976.
7. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций.— М.: ИЛ, 1963.
8. **Клявин О. В.** Физика пластичности кристаллов при гелиевых температурах.— М.: Наука, 1987.

г. Самара *Поступила 12/IV 1990 г.*

УДК 539.3

А. Д. Дроздов, В. Б. Колмановский

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СЛУЧАЙНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Изучается устойчивость на бесконечном интервале времени вязкоупругого стержня, сжатого случайной силой. Изгиб стержня рассматривается в динамической постановке. Сформулированы условия устойчивости в среднем квадратичном вязкоупругого стержня при произвольном виде меры релаксации напряжений и различных типах закрепления концов. Показано, что при выполнении полученных условий вязкоупругий стержень устойчив, а соответствующий упругий стержень с длительным модулем упругости неустойчив. Вопросы устойчивости стержней из стареющего вязкоупругого

материала при произвольном ядре релаксации рассматривались в [1, 2]. Задача изучалась в квазистатической постановке при детерминированной сжимающей нагрузке. Обзор исследований устойчивости вязкоупругих элементов конструкций содержится в [3]. Условия устойчивости упругих тел при случайной нагрузке приведены в [4]. Анализ устойчивости упругих и вязкоупругих стержней при случайной продольной нагрузке проведен в [5—7]. В данной работе с помощью второго метода Ляпунова для систем с последействием получены достаточные условия устойчивости вязкоупругих стержней.

1. Модель вязкоупругого тела. До приложения внешней нагрузки тело находится в естественном состоянии, в момент времени $t = 0$ к нему прикладываются усилия, под действием которых оно деформируется. При одноосном напряженном состоянии напряжение $\sigma(t)$ связано с деформацией $e(t)$ соотношением

$$\sigma(t) = E\left[e(t) + \int_0^t Q^{\cdot}(t-\tau)\, e(\tau)\, d\tau\right], \tag{1.1}$$

где E — постоянный модуль Юнга; $Q(t)$ — мера релаксации; $Q^{\cdot}(t) = dQ(t)/dt$; $Q(0) = 0$. Ограничимся изучением регулярных мер релаксации, для которых функция $Q(t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Считаем, что для любого $t > 0$ выполняются условия

$$-1 < Q(\infty) < Q(t) < 0; \tag{1.2}$$

$$Q^{\cdot}(t) < 0,\ Q^{\cdot}(\infty) = 0; \tag{1.3}$$

$$Q^{\cdot\cdot}(t) > 0,\ Q^{\cdot\cdot}(\infty) = 0 \tag{1.4}$$

и существует такая постоянная $T_0 > 0$, что для любого $t \geqslant 0$

$$Q^{\cdot\cdot}(t) > T_0^{-2}\,[Q(t) - Q(\infty)]. \tag{1.5}$$

Поясним механический смысл этих предположений. Рассмотрим процесс деформирования образца вида

$$e_1(t) = 0\ \ (0 \leqslant t \leqslant t_1);\ \ e_1(t) = e^0 > 0\ \ (t > t_1). \tag{1.6}$$

Из (1.1), (1.6) найдем напряжение $\sigma_1(t)$ и его производную по времени $\sigma_1^{\cdot}(t)$:

$$\sigma_1(t) = 0,\quad \sigma_1^{\cdot}(t) = 0\quad (0 \leqslant t \leqslant t_1); \tag{1.7}$$

$$\sigma_1(t) = E\,[1 + Q(t - t_1)]\, e^0,\quad \sigma_1^{\cdot}(t) = EQ^{\cdot}(t - t_1)\, e^0\quad (t > t_1).$$

Согласно (1.3), (1.7), напряжение в образце убывает со временем. Из (1.2) следует, что при $t \to \infty$ напряжение стремится к положительному предельному значению, не зависящему от момента загружения t_1(условие ограниченной ползучести [8]). В соответствии с (1.4) скорость релаксации $|\sigma_1^{\cdot}(t)|$ монотонно убывает и стремится к нулю при $t \to \infty$. Отметим, что условия (1.2)—(1.4) сформулированы в [9, 10]. Положим $y(t) = Q(t) - Q(\infty)$. Из (1.2), (1.3) вытекает, что $y(t) > 0$ при $t \geqslant 0$ и $y(\infty) = 0$. Перепишем соотношение (1.5) в виде $y^{\cdot\cdot}(t) > T_0^{-2} y(t)$. Умножим это неравенство на $y^{\cdot}(t) < 0$ и проинтегрируем от t до бесконечности. Учитывая (1.3), получим $y^{\cdot}(t) < -T_0^{-1} y(t)$. Интегрируя это неравенство и возвращаясь к исходным обозначениям, найдем

$$0 < Q(t) - Q(\infty) < -Q(\infty) \exp(-t/T_0). \tag{1.8}$$

Согласно (1.8), условие (1.5) означает, что при $t \to \infty$ мера релаксации стремится к своему предельному значению быстрее экспоненты с характерным временем T_0.

Введем безразмерное время $\tau = t/T_0$. Положим $Q_0(\tau) = Q(T_0\tau)$. На основании (1.5)

$$Q_0^{\cdot\cdot}(\tau) > Q_0(\tau) - Q_0(\infty)\quad (\tau \geqslant 0). \tag{1.9}$$

В дальнейшем потребуется оценка функции

$$R(t) = -Q_0^{\cdot}(t) + \int_0^t [Q_0(t-\tau) - Q_0(\infty)]\, d\tau.$$

В силу (1.9) производная функции $R(t)$ отрицательна и $R(t) > R(\infty)$ для любого $t \geqslant 0$. Согласно (1.3),

$$R(t) \geqslant \lim_\tau \int_0^\tau [Q_0(s) - Q_0(\infty)]\, ds \quad (\tau \to \infty).$$

Интегрируя по частям и учитывая (1.8), получим

$$R(t) \geqslant \int_0^\infty |Q_0^{\cdot}(s)|\, s\, ds \quad (t \geqslant 0). \tag{1.10}$$

2. Постановка задачи устойчивости стержня. Рассмотрим прямолинейный стержень длины l из вязкоупругого материала. Поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии, центр тяжести сечения лежит на продольной оси. Введем ось x, направленную вдоль продольной оси стержня в недеформированном состоянии. Обозначим через ρ плотность материала, S — площадь поперечного сечения, I — момент инерции сечения относительно продольной оси. Величины ρ, S, I считаем постоянными. В момент времени $t = 0$ к торцам стержня прикладываются сжимающие усилия интенсивностью P и стержень изгибается в плоскости симметрии. Пусть $v_1(x)$ — начальный прогиб стержня, $v_2(x)$ — начальная скорость прогиба, $u(t, x)$ — прогиб стержня в точке $x \in [0, l]$ в момент времени $t \geqslant 0$. Считаем, что прогиб стержня достаточно мал, так что можно пренебречь величиной $(u')^2 = (\partial u/\partial x)^2$ по сравнению с единицей, и выполнена гипотеза плоских сечений. Если поведение материала подчиняется уравнению состояния (1.1), то функция u удовлетворяет уравнению [11]

$$\rho S u^{\cdot\cdot}(t) = -Pu''(t) - EI\left[u^{\mathrm{IV}}(t) + \int_0^t Q^{\cdot}(t-\tau)\, u^{\mathrm{IV}}(\tau)\, d\tau\right] \tag{2.1}$$

с начальными условиями

$$u(0) = v_1, \quad u^{\cdot}(0) = v_2. \tag{2.2}$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записи аргумент x опускаем. На торцах стержня выполняется одна из групп условий

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \; u''(t, 0) = u''(t, l) = 0; \tag{2.3}$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \; u'(t, 0) = u'(t, l) = 0; \tag{2.4}$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \; u'(t, 0) = 0, \; u''(t, l) = 0. \tag{2.5}$$

Соотношения (2.3) характеризуют шарнирно опертый стержень, (2.4)— стержень, концы которого жестко защемлены, а (2.5)— стержень, у которого один конец жестко защемлен, а другой шарнирно оперт.

Предположим, что $P = P_0 + P_1 w^{\cdot}(t)$, где P_0, P_1 — постоянные величины, $w(t)$— стандартный винеровский процесс, $w^{\cdot}(t)$— белый шум. Уравнение (2.1) с начальными условиями (2.2) и одним из граничных условий (2.3)—(2.5) описывает прогиб вязкоупругого стержня под действием сжимающей случайной нагрузки и, согласно [12], имеет единственное обобщенное решение, если начальные условия v_i принадлежат пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, норму в котором можно определить по формуле [13]

$$\|v_i\|^2 = \int_0^l [v_i'(x)]^2\, dx.$$

Определение. Стержень называется устойчивым в среднем квадратичном, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 < \delta$ следует оценка $\sup_{t,x} Mu^2(t, x) < \varepsilon$ ($t \geqslant 0$, $x \in [0, l]$, M — символ математического ожидания). Задача состоит в нахождении ограничений на параметры P_0, P_1, которые гарантируют устойчивость стержня.

3. Преобразование определяющих уравнений. Обозначим через v_* максимальное значение начального прогиба стержня. Введем безразмерные величины и параметры: $x_* = x/l$, $t_* = t/T_0$, $v_{1*}(x_*) = v_1(x)/v_*$, $v_{2*}(x_*) = T_0 v_2(x)/v_*$, $u_{1*}(t_*, x_*) = u(t, x)/v_*$, $u_{2*}(t_*, x_*) = T_0 u^{\cdot}(t, x)/v_*$, $w_*(t_*) = T_0^{1/2} w(t)$, $a = EIT_0^2/(\rho S l^4)$, $P_{0*} = P_0 l^2/(EI)$, $P_{1*} = T_0^{3/2} P_1/(\rho S l^2)$. Согласно [14], случайный процесс $w_*(t_*)$ является винеровским. В новых обозначениях соотношения (2.1)—(2.5) принимают вид (для сокращения записи звездочку опускаем)

$$du_1 = u_2(t)dt, \tag{3.1}$$

$$du_2 = -a\left[u^{\mathrm{IV}}(t) + \int_0^t Q_0^{\cdot}(t-\tau)\, u_1^{\mathrm{IV}}(\tau)\, d\tau + P_0 u''(t)\right] dt - P_1 u_1''(t)\, dw(t);$$

$$u_1(0) = v_1,\ u_2(0) = v_2; \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} u_1(t,0) = u_1(t,1) = 0,\ u_1''(t,0) = u_1''(t,1) = 0,\\ u_1(t,0) = u_1(t,1) = 0,\ u_1'(t,0) = u_1'(t,1) = 0,\\ u_1(t,0) = u_1(t,1) = 0,\ u_1'(t,0) = u_1''(t,1) = 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$Y^{\mathrm{IV}}(x) + \lambda Y''(x) = 0 \tag{3.4}$$

с одним из граничных условий (3.3). Согласно [15], существует монотонно возрастающая последовательность положительных собственных значений λ_k и ненулевых собственных функций $\varphi_k(x)$, удовлетворяющих условиям (δ_{kl} — символы Кронекера):

$$\int_0^1 \varphi_k'(x)\, \varphi_l'(x)\, dx = \delta_{kl},\quad \int_0^1 \varphi_k''(x)\, \varphi_l''(x) dx = \lambda_k \delta_{kl}. \tag{3.5}$$

Последовательность $\{\varphi_k(x)\}$ является полной на подпространстве W_2^2, элементы которого удовлетворяют граничным условиям (3.3). Поэтому функции $u_i(t, x)$, $v_i(x)$ можно представить в виде рядов

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} z_{ik}(t)\, \varphi_k(x),\quad v_i = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{ik} \varphi_k(x). \tag{3.6}$$

Подставим выражения (3.6) в (3.1), (3.2). Умножим каждое из равенств на $\varphi_n''(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до 1. Интегрируя по частям и учитывая (3.3)—(3.5), получим

$$dz_{1n} = z_{2n}(t)dt, \tag{3.7}$$

$$dz_{2n} = -a\lambda_n^2\left[\left(1 - P_0\lambda_n^{-1}\right) z_{1n}(t) + \int_0^t Q_0^{\cdot}(t-\tau)\, z_{1n}(\tau)\, d\tau\right] dt + {}$$

$$+ P_1 \lambda_n z_{1n}(t)\, dw(t),$$

$$z_{1n}(0) = \zeta_{1n},\ z_{2n}(0) = \zeta_{2n}\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Из (3.3), (3.5), (3.6) и неравенства Коши следует, что для любых $t \geqslant 0$, $x \in [0, 1]$

$$u_1^2(t,x) = \left[\int_0^x u_1'(t,\xi)\, d\xi\right]^2 \leqslant \int_0^1 [u_1'(t,\xi)]^2 d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} z_{1k}^2(t), \tag{3.8}$$

$$\|v_i\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{ik}^2.$$

4. Условия устойчивости стержня. В [1] показано, что при детерминированной нагрузке и квазистатическом процессе деформирования для устойчивости вязкоупругого стержня необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$P_0 < \lambda_1[1 + Q_0(\infty)]. \tag{4.1}$$

Теорема. Предположим, что выполняется условие (4.1) и

$$P_1^2 < a\{1 + [a\lambda_1^2(1 + Q_0(\infty) - P_0\lambda_1^{-1})]^{-1}\}^{-1} \int_0^{\infty} |Q_0^{\cdot}(s)|\, s\, ds. \tag{4.2}$$

Тогда вязкоупругий стержень устойчив в среднем квадратичном под действием случайной сжимающей нагрузки.

Максимальный период собственных изгибных колебаний упругого стержня с модулем Юнга $E_0 = E[1 + Q_0(\infty)]$ определяется по формуле $T_1 = 2\pi\left[\rho S l^4/(E_0 I \lambda_1^2)\right]^{1/2}$. Запишем через $P_e = E_0 I \lambda_1 l^{-2}$ эйлерову критическую силу для упругого стержня. В исходных обозначениях условия устойчивости вязкоупругого стержня (4.1), (4.2) принимают вид

$$P_0/P_e < 1, \tag{4.3}$$

$$(P_0/P_e)^2 < N(1 - P_0/P_e)[1 + 4\pi^2(T_0/T_1)^2(1 - P_0/P_e)]^{-1},$$

$$N = [1 + Q(\infty)]^{-1} \int_0^{\infty} |Q^{\cdot}(s)|\, s\, ds.$$

В качестве примера рассмотрим стандартный вязкоупругий материал, поведение которого описывается уравнением $\sigma^{\cdot} + T_0^{-1}\sigma = Ee^{\cdot} + E_0 T_0^{-1} e$. Здесь E, E_0 — мгновенный и длительный модули упругости, T_0 — характерное время релаксации. При $P_0 = 0$ условие устойчивости стержня принимает вид

$$|P_1| < P_e[(E/E_0 - 1)T_0]^{1/2}[1 + 4\pi^2(T_0/T_1)^2]^{-1}.$$

5. Предварительные оценки. Согласно (4.1), существует такое $\alpha > 0$, что для любого $n \geqslant 1$

$$\alpha_n = 1 + Q_0(\infty) - P_0\lambda_n^{-1} \geqslant 1 + Q_0(\infty) - P_0\lambda_1^{-1} \geqslant \alpha. \tag{5.1}$$

Функция $\psi(x) = ax^2[1 + Q_0(\infty) - P_0 x^{-1}]$ монотонно возрастает при $x \geqslant P_0[2(1 + Q_0(\infty))]^{-1}$. Отсюда и из (4.1) следует, что для любого $n > 1$

$$\psi_n > \psi_1 \quad (\psi_n = \psi(\lambda_n)). \tag{5.2}$$

На основе (4.2) существует такое $\beta > 0$, что

$$\int_0^{\infty} |Q_0^{\cdot}(s)|\, s\, ds - P_1^2 a^{-1}(1 + \psi_1^{-1}) \geqslant \beta. \tag{5.3}$$

Из (1.10), (5.2) и (5.3) вытекает, что

$$R(t) - P_1^2 a^{-1}(1 + \psi_1^{-1}) \geqslant \beta. \tag{5.4}$$

6. Доказательство теоремы. Вычислим дифференциал функционала

$$W_{1n}(t) = z_{2n}^2(t) + a\lambda_n^2\Big[(1 + Q_0(t) - P_0\lambda_n^{-1})\, z_{1n}^2(t) - \tag{6.1}$$

$$- \int_0^t Q_0^{\cdot}(t-\tau)(z_{1n}(t) - z_{1n}(\tau))^2\, d\tau\Big].$$

Из формулы Ито и (3.7) получим

$$(6.2)\qquad dW_{1n} = -a\lambda_n^2\left[\int_0^t Q_0^{\cdot}(t-\tau)(z_{1n}(t)-z_{1n}(\tau))^2\,d\tau - \right.$$

$$\left. -\left(Q_0^{\cdot}(t) + P_1^2a^{-1}\right)z_{1n}^2(t)\right]dt + 2P_1\lambda_n z_{1n}(t)\,z_{2n}(t)\,dw(t).$$

Найдем дифференциал функционала

$$(6.3)\qquad W_{2n}(t) = z_{2n}(t) + a\lambda_n^2\int_0^t [Q_0(t-\tau) - Q_0(\infty)]\,z_{1n}(\tau)\,d\tau.$$

Следуя (3.7), имеем

$$(6.4)\qquad dW_{2n} = -a\lambda_n^2\alpha_n z_{1n}(t)\,dt + P_1\lambda_n z_{1n}(t)\,dw(t).$$

Из соотношений (3.7), (6.2)—(6.4) вытекает, что дифференциал функционала

$$(6.5)\qquad W_{3n}(t) = W_{2n}^2(t) + \psi_n\left[z_{1n}^2(t) + W_{1n}(t)\right]$$

равен

$$(6.6)\qquad dW_{3n} = -a\lambda_n^2\psi_n\left[-\left(Q_0^{\cdot}(t) + P_1^2a^{-1}\left(1+\psi_n^{-1}\right)\right)z_{1n}^2(t) + \right.$$

$$+\int_0^t Q_0^{\cdot\cdot}(t-\tau)(z_{1n}(t)-z_{1n}(\tau))^2\,d\tau + 2z_{1n}(t)\int_0^t (Q_0(t-\tau) -$$

$$\left. - Q_0(\infty))\,z_{1n}(\tau)\,d\tau\right]dt + 2P_1\lambda_n z_{1n}(t)\left[W_{2n}(t) + \psi_n z_{2n}(t)\right]dw(t).$$

Преобразуем выражения в правой части (6.6):

$$(6.7)\qquad 2z_{1n}(t)\int_0^t (Q_0(t-\tau) - Q_0(\infty))\,z_{1n}(\tau)\,d\tau = -\int_0^t (Q_0(t-\tau) -$$

$$- Q_0(\infty))(z_{1n}(t) - z_{1n}(\tau))^2\,d\tau + z_{1n}^2(t)\int_0^t (Q_0(t-\tau) - Q_0(\infty))\,d\tau +$$

$$+\int_0^t (Q_0(t-\tau) - Q_0(\infty))\,z_{1n}^2(\tau)\,d\tau.$$

Из соотношений (6.6), (6.7) следует, что

$$(6.8)\qquad dW_{3n} = -a\lambda_n^2\psi_n\left[\int_0^t Q_0^{\cdot\cdot}(t-\tau) - (Q_0(t-\tau) - \right.$$

$$- Q_0(\infty))(z_{1n}(t) - z_{1n}(\tau))^2\,d\tau + \left(R(t) - P_1^2a^{-1}\left(1+\psi_n^{-1}\right)\right)z_{1n}^2(t) +$$

$$\left. +\int_0^t (Q_0(t-\tau) - Q_0(\infty))\,z_{1n}^2(\tau)\,d\tau\right]dt + 2P_1\lambda_n z_{1n}(t)\left(W_{2n}(t) + \psi_n z_{2n}(t)\right)\,dw(t).$$

Проинтегрируем соотношение (6.8) от 0 до t и вычислим математическое ожидание от обеих частей полученного равенства. Учитывая (1.9), (5.1), (5.4) и условия (1.2)—(1.4), найдем $MW_{3n}(t) \leqslant MW_{3n}(0)$. Подставляя в это соотношение выражения (6.1), (6.3), (6.5) и усиливая неравенство, имеем

$$(6.9)\qquad I_n(t) = M\left\{\left[z_{2n}(t) + a\lambda_n^2\int_0^t (Q_0(t-\tau) - Q_0(\infty))\,z_{1n}(\tau)\,d\tau\right]^2 + \right.$$

$$+\psi_n\left[z_{1n}^2(t) + z_{2n}^2(t) + a\lambda_n^2\left(\left(1 + Q_0(t) - P_0\lambda_n^{-1}\right)z_{1n}^2(t) - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -\int_0^t Q_0^{\cdot}(t-\tau)(z_{1n}(t) - z_{1n}(\tau))^2\,d\tau\right)\right]\right\} \leqslant a\lambda_n^2\left(1 + a\lambda_n^2\right)\zeta_{1n}^2 + \left(1 + a\lambda_n^2\right)\zeta_{2n}^2.$$

Из соотношений (5.1), (5.2), (6.9) и условий (1.2)—(1.4) следует $I_n \geqslant \geqslant \alpha a\lambda_n^2 (1 + \alpha a\lambda_n^2) Mz_{1n}^2(t)$. Из этого соотношения и (6.9) вытекает, что существует такая не зависящая от n постоянная $c_3 > 0$, что при $t \geqslant 0$

$$Mz_{1n}^2(t) \leqslant c_3 (\zeta_{1n}^2 + \zeta_{2n}^2). \tag{6.10}$$

Просуммируем неравенства (6.10) по n. Учитывая (3.8), получим

$$Mu_1^2(t, x) \leqslant c_3 (\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2) \quad (t \geqslant 0,\ x \in [0, 1]). \tag{6.11}$$

Утверждение теоремы следует из неравенства (6.11).

7. Неустойчивость упругого стержня при случайной сжимающей нагрузке. Рассмотрим изгиб упругого стержня, сжатого по торцам силой P, $P_0 < P_e$. Выберем безразмерное начальное возмущение в виде $v_1 = 0$, $v_2 = \delta\varphi_1(x)$ ($\delta = \mathrm{const}$). При этом безразмерные величины $u_i(t, x)$ определяются по формулам

$$u_1 = \delta z_1(t)\varphi_1(x),\ u_2 = \delta z_2(t)\varphi_1(x). \tag{7.1}$$

Коэффициенты $z_1(t)$ и $z_2(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$dz_1 = z_2\,dt,\ dz_2 = -a\lambda_1^2 (1 - P_0\lambda_1^{-1}) z_1\,dt + P_1\lambda_1 z_1\,dw(t), \quad z_1(0) = 0,\ z_2(0) = 1. \tag{7.2}$$

Из (7.2) и формулы Ито вытекает, что функции $X_1 = Mz_1^2(t)$, $X_2 = Mz_1(t)z_2(t)$, $X_3 = Mz_2^2(t)$ — решения системы уравнений $(\psi_1 = a\lambda_1^2 \times \times (1 - P_0\lambda_1^{-1}),\ \ \theta_1 = P_1^2\lambda_1^2)$

$$X_1^{\cdot} = 2X_2,\ X_2^{\cdot} = -\psi_1 X_1 + X_3,\ X_3^{\cdot} = \theta_1 X_1 - 2\psi_1 X_2, \quad X_1(0) = 0,\ X_2(0) = 0,\ X_3(0) = 1. \tag{7.3}$$

Запишем характеристическое уравнение для системы (7.3):

$$f(k) = 0,\ f(x) = x^3 + 4\psi_1 x - 2\theta_1. \tag{7.4}$$

Функция $f(x)$ монотонно возрастает, $f(0) = -2\theta_1$, $f(\infty) = \infty$. Значит, при $P_1 \neq 0$ у уравнения (7.4) единственный вещественный положительный корень $k_1 = \varkappa$. Два других корня определяются по формулам $k_{2,3} = (-\varkappa \pm i\omega)/2$, $\omega^2 = 3\varkappa^2 + 16\psi_1 > 0$. Решение системы уравнений (7.3) запишем в форме

$$\begin{aligned} X_1 = {}& -[\varkappa(A \cos \omega t/2 - B \sin \omega t/2) + \omega(A \sin \omega t/2 + \\ & + B \cos \omega t/2)] \exp(-\varkappa t/2) + 2C\varkappa \exp(\varkappa t), \\ X_2 = {}& (1/4)[(\varkappa^2 - \omega^2)(A \cos \omega t/2 - B \sin \omega t/2) + 2\varkappa\omega(A \sin \omega t/2 + \\ & + B \cos \omega t/2)] \exp(-\varkappa t/2) + C\varkappa^2 \exp(\varkappa t), \\ X_3 = {}& [(2\theta_1 + \psi_1\varkappa)(A \cos \omega t/2 - B \sin \omega t/2) + \psi_1\omega(A \sin \omega t/2 + \\ & + B \cos \omega t/2)] \exp(-\varkappa t/2) + 2(\theta_1 - \psi_1\varkappa)C \exp(\varkappa t). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Постоянные A, B, C имеют вид $A = 4\varkappa^2[\theta_1(9\varkappa^2 + \omega^2)]^{-1}$, $B = \varkappa(\omega^2 - 3\varkappa^2)[\theta_1\omega(9\varkappa^2 + \omega^2)]^{-1}$, $C = (\varkappa^2 + \omega^2)[2\theta_1(9\varkappa^2 + \omega^2)]^{-1}$.

Из соотношений (7.1), (7.5) вытекает, что для любого $\delta > 0$ величина $Mu_1^2(t, x)$ стремится к бесконечности при $t \to \infty$. Следовательно, упругий стержень неустойчив в среднем квадратичном при наличии случайной составляющей нагрузки типа белого шума произвольной интенсивности.

Согласно (4.1), при детерминированной продольной нагрузке вязкость материала приводит к уменьшению критического усилия. Как показывает приведенный пример, при случайной продольной нагрузке наличие вязкости играет положительную роль: при выполнении неравенств (4.3) вязкоупругий стержень устойчив, а упругий неустойчив.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.** Устойчивость стержней из неоднородно стареющего вязкоупругого материала // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 2.
2. **Дроздов А. Д., Колмановский В. Б.** Об устойчивости конструкций из вязкоупругого материала // Механика деформируемых тел и конструкций.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1985.
3. **Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Колмановский В. Б.** Устойчивость вязкоупругих тел и элементов конструкций // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела/ВИНИТИ.— 1987.— Т. 19.
4. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем.— М.: Наука, 1979.
5. **Потапов В. Д.** Устойчивость вязкоупругих конструкций при действии стационарных случайных сжимающих нагрузок // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 3.
6. **Потапов В. Д.** Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций.— М.: Стройиздат, 1985.
7. **Потапов В. Д.** Об устойчивости стержней при стохастическом возбуждении // ПММ.— 1989.— Т. 53, вып. 6.
8. **Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.** Теория ползучести неоднородных тел.— М.: Наука, 1983.
9. **Dafermos C. M.** An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity // J. Diff. Equations.— 1970.— V. 7, N 3.
10. **Dafermos C. M.** Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1970.— V. 37, N 3.
11. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем.— М.: Физматгиз, 1963.
12. **Гихман И. И.** О первой начально-краевой задаче для стохастического гиперболического уравнения // Теория случайных процессов.— 1980.— № 8.
13. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики.— М.: Наука, 1973.
14. **Скороход А. В.** Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1987.
15. **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения.— М.: Наука, 1968.

г. Москва *Поступила 24/IV 1990 г.*

УДК 539.3

В. В. Кузнецов

К ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК, ОСНОВАННОЙ НА ИНВАРИАНТАХ

Рассмотрена точная теория конечных деформаций трехмерного тела, подчиненного гипотезе сохранения нормального элемента к базовой (срединной) поверхности. В качестве мер физических деформаций использованы первый и второй инварианты тензора деформаций Грина поверхности, параллельной базовой. Показано, что по инвариантам физических деформаций можно определить любую инвариантную характеристику упругого тела: энергию, инварианты тензора напряжений, интенсивность напряжений и т. д. Дано общее определение инвариантов деформаций произвольной поверхности как составляющих относительного изменения квадрата элемента площади. Проведено упрощение инвариантов при малых деформациях и любых искривлениях тонких оболочек. Получены выражения для изменения коэффициентов первой и второй квадратичных форм срединной поверхности для малых деформаций, произвольных и малых перемещений.

1. Геометрия трехмерного тела. Примем, что $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки трехмерного тела в недеформированном состоянии, который выражается через радиус-вектор базовой поверхности $\mathbf{r}$ и единичный орт нормали к поверхности $\mathbf{n}$ в виде $\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\mathbf{n}$. В общем случае $\mathbf{r}$ будем считать зависящим от произвольных криволинейных координат α_i. Коэффициенты первой квадратичной формы базовой поверхности $a_{ij} = \mathbf{r}_{,i}\mathbf{r}_{,j}$, а поверхности $z = \mathrm{const}$ $A_{ij} = \mathbf{R}_{,i}\mathbf{R}_{,j}$. Здесь и далее $i,j = 1, 2$; индексы после запятой означают дифференцирование по α_i. Вектор нормали к поверхности $z = \mathrm{const}$ совпадает с вектором нормали к базовой: $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_{,1} \times \times \mathbf{r}_{,2})\, d_{aa}^{-1/2}$. Для дальнейшего удобно принять следующее определение величины $d_{\beta\gamma}$, зависящее от коэффициентов двух любых квадратичных форм β_{ij}, $\gamma_{ij} (d_{\beta\gamma} \neq d_{\gamma\beta})$:

$$d_{\beta\gamma} = \det\begin{Vmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{Vmatrix} - \beta_{11}\gamma_{22} - \beta_{12}\gamma_{21}.$$