

УДК 539.3;534.1

О ВЛИЯНИИ ПОПЕРЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ

А. Е. Алексеев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: volk@hydro.nsc.ru

Решена задача о потере устойчивости центрально-сжатой бесконечной пластины с учетом поперечного обжатия постоянной нагрузкой при различных граничных условиях на торцах. Используется линеаризованная система нелинейных уравнений упругого деформирования тонких пластин с учетом поперечного сдвига и обжатия по толщине. Полученные критические нагрузки сравниваются с известными.

Ключевые слова: устойчивость, упругость, пластина, полиномы Лежандра.

В работе [1] на основе разложений по полиномам Лежандра исходная трехмерная задача нелинейной теории упругости сводится к последовательности двумерных. Получены нелинейные и соответствующие им линеаризованные уравнения упругого деформирования пластин с произвольными граничными условиями на лицевых поверхностях. Для тонких пластин линеаризованные уравнения первого приближения, в которых учитываются поперечный сдвиг и обжатие, приводятся в [2].

С целью иллюстрации эффективности использования таких уравнений в настоящей работе решается задача о потере устойчивости центрально-сжатой бесконечной пластины. Помимо осевой силы на лицевых поверхностях прикладывается равномерно распределенная постоянная по величине и направлению нормальная нагрузка.

Приложенные к пластине нагрузки, постоянные по величине и направлению (“мертвые” нагрузки), относятся к классу консервативных. В этом случае потеря устойчивости происходит по типу статической неустойчивости [3, 4]. Для определения критической нагрузки применим статический метод (метод Эйлера), который используется в настоящей работе. Получены критические нагрузки для пяти вариантов граничных условий на торцах, аналогичных условиям, принимаемым в классической теории устойчивости центрально-сжатых стержней [5, 6].

Для некоторых частных случаев нагружения, рассматриваемых в настоящей работе, подобная задача была решена другими методами [7, 8].

В [7] энергетическим методом решена задача об устойчивости сжатой полосы с условиями на торцах: один край жестко зашпелен, другой может скользить по поверхности пуансона. В [8] решена задача об устойчивости шарнирно опертой полосы при всестороннем сжатии “мертвой” нагрузкой. Задача рассматривалась в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости при конечных и малых докритических деформациях [9].

Рассмотрим бесконечно длинную пластину ширины l и толщины $2h$. Пусть x_k — декартова система координат с базисом e_k . Ось x_1 ($x_1 \in [0, l]$) направлена по ширине

пластины, ось x_2 — по длине, ось x_3 ($x_3 \in [-h, h]$) — по толщине. В условиях плоской деформации решается задача о потере устойчивости пластины при сжатии вдоль оси x_1 силой интенсивности p , приложенной на торцах ($x_1 = 0, l$). На лицевых поверхностях ($x_3 = \pm h$) пластина нагружена равномерно распределенной постоянной по величине и направлению поперечной силой интенсивности q .

Введем систему координат Лагранжа ξ^k с ковариантным базисом \mathbf{g}_k . В недеформированном состоянии

$$x_\alpha = \xi^\alpha \quad (\alpha = 1, 2), \quad x_3 = h\xi^3, \quad \mathring{\mathbf{g}}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathring{\mathbf{g}}_3 = h\mathbf{e}_3. \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем кружок над символом означает, что соответствующая величина относится к недеформированному состоянию.

Пусть \mathbf{u} — вектор перемещений докритического состояния; $\hat{\mathbf{t}}^i = \mathring{J}\tau^{ij}\mathbf{g}_j$ — величины, характеризующие докритическое напряженное состояние; τ^{ij} — контравариантные компоненты второго тензора напряжений Пиола — Кирхгофа [4]; $J = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)$ — якобиан преобразования координат ξ^k . Ковариантный базис докритического состояния \mathbf{g}_k связан с вектором перемещений \mathbf{u} соотношениями

$$\mathbf{g}_i = \mathring{\mathbf{g}}_i + \mathbf{u}_{,i}.$$

Наряду с докритическим состоянием рассмотрим возмущенное, которому соответствуют возмущенные величины

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}, \quad \tilde{\mathbf{t}}^i = \hat{\mathbf{t}}^i + \Delta\hat{\mathbf{t}}^i, \quad \tilde{\mathbf{g}}_i = \mathbf{g}_i + \Delta\mathbf{g}_i, \quad \Delta\mathbf{g}_i = \Delta\mathbf{u}_{,i}. \quad (2)$$

Из (1) следует, что координата $\xi^3 \in [-1, 1]$. Возмущения $\Delta\mathbf{u}$, $\Delta\hat{\mathbf{t}}^i$ в (2) представим в виде рядов по полиномам Лежандра $P_k(\xi^3)$:

$$\Delta\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} [\Delta\mathbf{u}]^k P_k, \quad \Delta\hat{\mathbf{t}}^i = \sum_{k=0}^{\infty} [\Delta\hat{\mathbf{t}}^i]^k P_k. \quad (3)$$

Здесь $[\Delta\mathbf{u}]^k$, $[\Delta\hat{\mathbf{t}}^i]^k$ — коэффициенты разложений, зависящие в случае плоской деформации от одной координаты ξ^1 :

$$[\Delta\mathbf{u}]^k = \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^1 \Delta\mathbf{u} P_k d\xi^3, \quad [\Delta\hat{\mathbf{t}}^i]^k = \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^1 \Delta\hat{\mathbf{t}}^i P_k d\xi^3.$$

Принимаются следующие предположения:

— докритическое состояние описывается геометрически линейными уравнениями и в формулах (2) следует положить

$$\mathbf{g}_i \cong \mathring{\mathbf{g}}_i; \quad (4)$$

— докритическое напряженное состояние однородно:

$$\tau^{11} = -p, \quad \tau^{33} = -q/h^2, \quad \tau^{ij} = 0 \quad (i \neq j); \quad (5)$$

— материал пластины изотропный.

Следуя результатам работы [2], величины $\Delta\hat{\mathbf{t}}^i$, характеризующие возмущения напряжений в (2), в первом приближении аппроксимируются отрезками рядов (3):

$$\begin{aligned} 2h(\mathbf{e}_1 \cdot \Delta\hat{\mathbf{t}}^1) &\cong N + 3MP_1/h, & (\mathbf{e}_3 \cdot \Delta\hat{\mathbf{t}}^3) &\cong p_0 + p_\Delta P_1, \\ 2h(\mathbf{e}_1 \cdot \Delta\hat{\mathbf{t}}^3) &\cong Q + 2hq_\Delta P_1 + (2hq_0 - Q)P_2, & 2h(\mathbf{e}_3 \cdot \Delta\hat{\mathbf{t}}^1) &\cong F, \\ q_\Delta &= (q^+ - q^-)/2, & q_0 &= (q^+ + q^-)/2, \\ p_\Delta &= (p^+ - p^-)/2, & p_0 &= (p^+ + p^-)/2. \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (6) приняты обозначения

$$\begin{aligned} N &= 2he_1 \cdot [\Delta \hat{\mathbf{t}}^1]^0, & F &= 2he_3 \cdot [\Delta \hat{\mathbf{t}}^1]^0, & Q &= 2he_1 \cdot [\Delta \hat{\mathbf{t}}^3]^0, \\ M &= (2/3)h^2 e_3 \cdot [\Delta \hat{\mathbf{t}}^1]^1, & p^\pm &= e_3 \cdot \Delta \hat{\mathbf{t}}^3 \Big|_{\xi^3=\pm 1}, & q^\pm &= e_1 \cdot \Delta \hat{\mathbf{t}}^3 \Big|_{\xi^3=\pm 1}. \end{aligned} \quad (7)$$

При плоской деформации уравнения равновесия для возмущений в проекциях на оси координат x_1, x_3 имеют вид

$$e_1 \cdot (\Delta \hat{\mathbf{t}}_{,1}^1 + \Delta \hat{\mathbf{t}}_{,3}^3) = 0, \quad e_3 \cdot (\Delta \hat{\mathbf{t}}_{,1}^1 + \Delta \hat{\mathbf{t}}_{,3}^3) = 0. \quad (8)$$

Интегрируя выражения (8) по толщине, получаем уравнения равновесия для возмущений усилий, моментов и поверхностных сил на лицевых поверхностях (7):

$$N_{,1} + 2hq_\Delta = 0, \quad M_{,1} - hQ + 2h^2q_0 = 0, \quad F_{,1} + 2hp_\Delta = 0. \quad (9)$$

Согласно [1] в предположении линейности докритического состояния (4) закон Гука для возмущений $\Delta \hat{\mathbf{t}}^i$ аппроксимируется по формулам

$$\Delta \hat{\mathbf{t}}^i \cong \overset{\circ}{J} \tilde{C}^{ijmn} (\overset{\circ}{g}_m \cdot \Delta \mathbf{G}_n) \overset{\circ}{g}_j. \quad (10)$$

В (10) аппроксимации $\Delta \mathbf{G}_n$ возмущений векторов ковариантного базиса $\Delta \mathbf{g}_n$ принимаются в виде

$$\Delta \mathbf{g}_n \cong \Delta \mathbf{G}_n, \quad \Delta \mathbf{G}_1 = \Delta \mathbf{U}'_{,1}, \quad \Delta \mathbf{G}_2 = 0, \quad \Delta \mathbf{G}_3 = \Delta \mathbf{U}''_{,3}. \quad (11)$$

Векторы $\Delta \mathbf{U}'$, $\Delta \mathbf{U}''$ в (11) являются аппроксимациями вектора возмущений перемещений $\Delta \mathbf{u}$: первая используется при вычислении производной по координате ξ^1 , вторая — по координате ξ^3 . Эти аппроксимации различаются по количеству членов, удерживаемых в разложениях в ряды по полиномам Лежандра (3):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &\cong \Delta \mathbf{U}' = e_1(u + \psi P_1) + e_3 v, \\ \Delta \mathbf{u} &\cong \Delta \mathbf{U}'' = \Delta \mathbf{U}' + e_1([u]^2 P_2 + [u]^3 P_3) + e_3([v]^1 P_1 + [v]^2 P_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Для изотропной среды

$$\tilde{C}^{ijmn} = \lambda \overset{\circ}{g}^{ij} \overset{\circ}{g}^{mn} + \mu (\overset{\circ}{g}^{im} \overset{\circ}{g}^{jn} + \overset{\circ}{g}^{in} \overset{\circ}{g}^{jm}) + \tau^{in} \overset{\circ}{g}^{mj}$$

(λ, μ — параметры Ламе).

В силу (1) контравариантные компоненты метрического тензора $\overset{\circ}{g}^{ij}$ системы координат ξ^k в недеформированном состоянии равны:

$$\overset{\circ}{g}^{11} = 1, \quad \overset{\circ}{g}^{22} = 1, \quad \overset{\circ}{g}^{33} = 1/h^2, \quad \overset{\circ}{g}^{ij} = 0 \quad (i \neq j). \quad (13)$$

Из (5), (13) следует, что компоненты \tilde{C}^{ijmn} равны нулю за исключением следующих:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{1111} &= \lambda + 2\mu - p, & \tilde{C}^{1133} &= \tilde{C}^{3311} = \lambda/h^2, \\ \tilde{C}^{1331} &= (\mu - p)/h^2, & \tilde{C}^{3113} &= (\mu - q)/h^2, \\ \tilde{C}^{1313} &= \tilde{C}^{3131} = \mu/h^2, & \tilde{C}^{3333} &= (\lambda + 2\mu - q)/h^4. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставим формулы (11)–(14) в (10). Полученные выражения для возмущений $\Delta \hat{\mathbf{t}}^i$ подставим в (7). В результате получим две группы равенств. В первую группу входят уравнения, содержащие возмущения усилий и моментов:

$$\begin{aligned} N/(2h^2) &= (\lambda + 2\mu - p)u_{,1} + \lambda[v]^1/h, & 3M/(2h^3) &= (\lambda + 2\mu - p)\psi_{,1} + 3\lambda[v]^2/h, \\ Q/(2h) &= \mu v_{,1} + (\mu - q)(\psi + [u]^3)/h, & F/(2h^2) &= (\mu - q)v_{,1} + \mu(\psi + [u]^3)/h, \end{aligned} \quad (15)$$

во вторую — уравнения, содержащие возмущения внешних сил на лицевых поверхностях:

$$\begin{aligned} p_0 &= \lambda u_{,1} + (\lambda + 2\mu - q)[v]^1/h, & p_\Delta &= \lambda \psi_{,1} + 3(\lambda + 2\mu - q)[v]^2/h, \\ q_\Delta &= 3(\mu - q)[u]^2/h, & q_0 - Q/(2h) &= 5(\mu - q)[u]^3/h. \end{aligned} \quad (16)$$

Совокупность уравнений равновесия (9) и уравнений закона Гука (15), (16) представляет собой систему линейризованных уравнений первого приближения нелинейной задачи упругого деформирования тонких пластин с учетом поперечного сдвига и обжатия.

При статическом методе решения задач устойчивости возмущения внешних сил полагают равными нулю, т. е. рассматриваются возможные равновесные состояния. Следовательно, на лицевых поверхностях

$$q_0 = 0, \quad q_\Delta = 0, \quad p_0 = 0, \quad p_\Delta = 0. \quad (17)$$

Система четырех алгебраических уравнений (16), (17) относительно четырех неизвестных функций $[u]^2$, $[u]^3$, $[v]^2$, $[v]^3$ имеет решение:

$$\begin{aligned} [u]^2 &= 0, & [u]^3 &= -\frac{1}{6} \left(\psi + \frac{\mu}{\mu - q} h v_{,1} \right), \\ [v]^1 &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu - q} h u_{,1}, & [v]^2 &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu - q} h \psi_{,1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (15), (18) следует

$$\begin{aligned} N &= 2h^2 \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu - q} - p \right) u_{,1}, & M &= \frac{2}{3} h^3 \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu - q} - p \right) \psi_{,1}, \\ Q &= \frac{5}{3} h \left(\mu v_{,1} + (\mu - q) \frac{\psi}{h} \right), & F &= 2h^2 \left(\left(\mu - p - \frac{\mu^2}{6(\mu - q)} \right) v_{,1} + \frac{5}{6} \mu \frac{\psi}{h} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим выражения (17), (19) в уравнения равновесия (9). В результате имеем линейную систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций u , v , ψ :

$$\begin{aligned} u_{,11} &= 0, \\ \left(\frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \lambda^2 - q^2}{\lambda + 2\mu - q} - p - q \right) \psi_{,11} - \frac{5}{2h} \left((\mu - q) \frac{\psi}{h} + \mu v_{,1} \right) &= 0, \\ \psi_{,1} + \frac{6}{5} \left(1 - \frac{p}{\mu} - \frac{\mu}{6(\mu - q)} \right) h v_{,11} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Исключая ψ , получаем уравнение для определения прогиба v

$$v_{,1111} + \alpha^2 v_{,11}/h^2 = 0, \quad \alpha^2 = B/A, \quad (21)$$

где

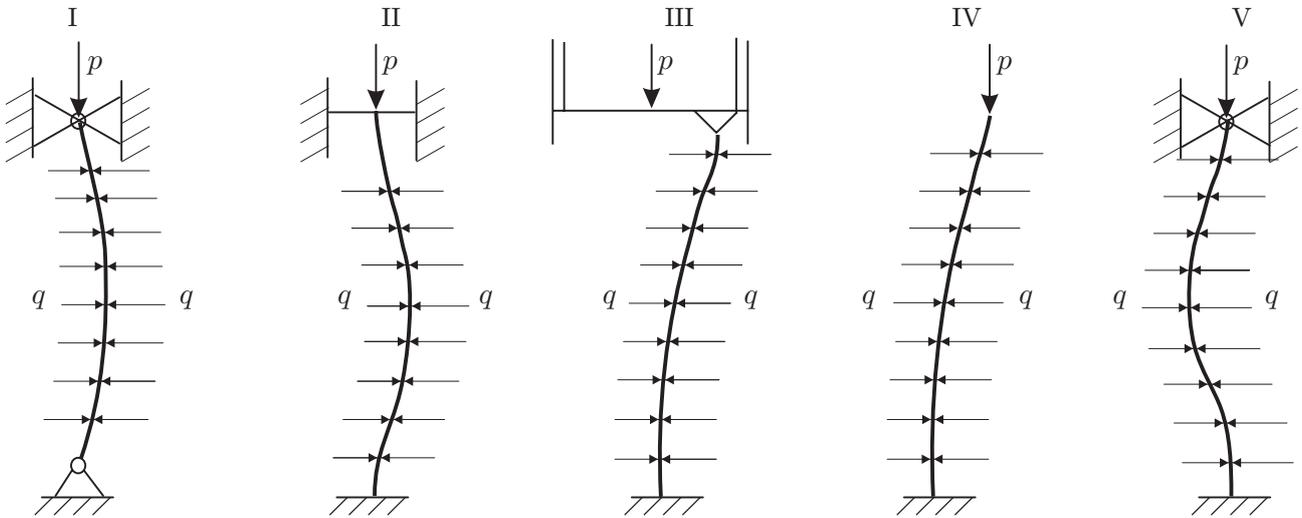
$$\begin{aligned} A &= (\gamma - \bar{p})(5/6 - \bar{p})/(1 - \varepsilon)^2, & B &= 5\bar{p}/2, \\ \varepsilon &= q/\mu, & \gamma &= \beta(2 - \varepsilon)^2/(\beta + (1 - \varepsilon)), & \beta &= (\lambda + \mu)/\mu, & \bar{p} &= (q + p(1 - \varepsilon))/\mu. \end{aligned}$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (21) имеет вид

$$v = C_1 + C_2 x + C_3 \sin(\alpha x/h) + C_4 \cos(\alpha x/h). \quad (22)$$

Подставляя (22) в систему уравнений (20), находим общее решение для функции ψ

$$\psi = -(hC_2 + \alpha(1 - 6\bar{p}/5)(C_3 \cos(\alpha x/h) - C_4 \sin(\alpha x/h)))/(1 - \varepsilon). \quad (23)$$



Последнее равенство в (21) представляет собой квадратное уравнение относительно \bar{p}

$$(\gamma - \bar{p})(5/6 - \bar{p})\bar{\alpha}^2 = 5\bar{p}/2, \quad \bar{\alpha} = \alpha/(1 - \varepsilon). \quad (24)$$

Выбирая меньший корень квадратного уравнения (24), находим значение предельной нагрузки

$$\bar{p}(\bar{\alpha}) = 2\gamma\bar{\alpha}^2/(3\phi(\bar{\alpha})), \quad \phi(\bar{\alpha}) = 1 + a_1\bar{\alpha}^2 + \sqrt{1 + 2a_1\bar{\alpha}^2 + a_2^2\bar{\alpha}^4}, \quad (25)$$

$$a_1 = (5 + 6\gamma)/15, \quad a_2 = (5 - 6\gamma)/15.$$

В формулах (22), (23), (25) неизвестные функции v , ψ и предельная нагрузка \bar{p} зависят от постоянных C_i , α , которые определяются из граничных условий на торцах пластины. Аналогично классическому случаю [5] можно составить пять различных вариантов краевой задачи (см. рисунок). Под классическим случаем понимается решение задачи о потере устойчивости пластины (стержня) при $q = 0$, которое получено на основе гипотез Кирхгофа — Лява (решение Эйлера).

ВАРИАНТ I. На торцах задаются условия шарнирного закрепления

$$v = 0, \quad M = 0 \quad \text{при } x = 0, l. \quad (26)$$

Используя выражение для возмущения момента M в (19), подставим (22), (23) в граничные условия (26) и получим однородную систему четырех линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} C_1 + C_4 = 0, \quad C_1 + C_2l + C_3 \sin(\alpha l/h) + C_4 \cos(\alpha l/h) = 0, \\ C_4 = 0, \quad C_3 \sin(\alpha l/h) + C_4 \cos(\alpha l/h) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Чтобы система однородных уравнений (27) имела нетривиальное решение, определитель ее Δ_1 (нижний индекс означает номер варианта) должен равняться нулю:

$$\Delta_1 = l \sin(\alpha l/h) = 0.$$

Выбирая из множества решений этого уравнения наименьшее положительное значение α , получаем

$$\alpha_1 = \pi h/l. \quad (28)$$

Решение системы (27) определяется с точностью до произвольной постоянной C и имеет вид: $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $C_3 = C$. Соответствующие выражения для v , ψ находятся из формул (22), (23):

$$v_1 = C \sin(\alpha_1 x/h), \quad \psi_1 = -C\bar{\alpha}_1(1 - 6\bar{p}_1/5) \cos(\alpha_1 x/h). \quad (29)$$

Выражения (29) определяют форму потери устойчивости. Выражение для прогиба v не зависит от поперечного давления q и совпадает с классическим случаем.

Значение предельной нагрузки $\bar{p}_1 = \bar{p}(\bar{\alpha}_1)$ вычисляется подстановкой (28) в (25).

Для остальных вариантов граничных условий на торцах последовательность проводимых операций аналогична варианту I. Поэтому, опуская промежуточные вычисления, будем останавливаться только на основных моментах.

ВАРИАНТ II. На торцах задаются условия жесткой заделки:

$$v = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } x = 0, l. \quad (30)$$

Подставив выражения (22), (23) в (30), получим систему однородных уравнений, определитель которой Δ_2 приравняем к нулю:

$$\Delta_2 = 2\alpha \left(1 - \frac{6}{5} \bar{p}(\bar{\alpha}) \sin \frac{\alpha l}{2h} \left(2h \sin \frac{\alpha l}{2h} - l\alpha \left(1 - \frac{6}{5} \bar{p}(\bar{\alpha}) \right) \cos \frac{\alpha l}{2h} \right) \right) = 0. \quad (31)$$

Из равенства (31) следует либо $\sin(\alpha l/(2h)) = 0$, либо $\operatorname{tg}(\alpha l/(2h)) = (1 - 6\bar{p}(\bar{\alpha})/5)\alpha l/(2h)$. В первом случае наименьшее положительное значение α равно

$$\alpha_2 = 2\pi h/l. \quad (32)$$

Из решения однородной системы с точностью до произвольной постоянной C определяются неизвестные C_i , а соответствующие выражения для v , ψ находятся из формул (22), (23):

$$v_2 = C \sin^2(\alpha_2 x/(2h)), \quad \psi_2 = C \bar{\alpha}_2 (1 - 6\bar{p}_2/5) \sin(\alpha_2 x/h). \quad (33)$$

Выражения (33) определяют форму потери устойчивости. Как и в случае варианта I, выражение для прогиба v_2 не зависит от поперечного давления q и совпадает с классическим случаем.

Значение предельной нагрузки $\bar{p}_2 = \bar{p}(\bar{\alpha}_2)$ вычисляется подстановкой (32) в (25).

Во втором случае α определяется из трансцендентного уравнения:

$$\operatorname{tg}(\alpha l/(2h)) = \alpha l(1 - 6\bar{p}(\bar{\alpha})/5)/(2h),$$

приближенное решение которого равно

$$\alpha = (2h/l)(4,4934 + O(h^2/l^2)).$$

Соответствующее значение предельной нагрузки будет больше, чем в первом случае, поэтому этот вариант исключается из рассмотрения.

ВАРИАНТ III. На торцах задаются следующие условия:

$$v = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad F = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } x = l. \quad (34)$$

Используя выражение для возмущения F из (19), подставим (22), (23) в (34), получим систему однородных уравнений, определитель которой Δ_3 приравняем к нулю:

$$\Delta_3 = -\alpha^2 (1 - 6\bar{p}(\bar{\alpha})/5)^2 \sin(\alpha l/h) = 0. \quad (35)$$

Из (35) получаем, что наименьшее положительное α равно

$$\alpha_3 = \pi h/l. \quad (36)$$

Из решения однородной системы с точностью до произвольной постоянной C определяются неизвестные C_i , а соответствующие выражения для v , ψ находятся из формул (22), (23):

$$v_3 = C \sin^2(\alpha_3 x/(2h)), \quad \psi_3 = C \bar{\alpha}_3 (1 - 6\bar{p}_3/5) \sin(\alpha_3 x/h). \quad (37)$$

Выражения (37) определяют форму потери устойчивости. Как и в предыдущих случаях, выражение для прогиба v_3 не зависит от давления q и совпадает с классическим случаем.

Значение предельной нагрузки $\bar{p}_3 = \bar{p}(\bar{\alpha}_3)$ вычисляется подстановкой (36) в (25).

ВАРИАНТ IV. На торцах задаются следующие условия:

$$v = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad F = 0, \quad M = 0 \quad \text{при } x = l. \quad (38)$$

Используя выражения возмущений F, M в (19), подставим (22), (23) в (38), получим систему однородных уравнений, определитель которой Δ_4 приравняем к нулю:

$$\Delta_4 = -\alpha(1 - 6\bar{p}(\bar{\alpha})/5) \cos(\alpha l/h) = 0. \quad (39)$$

Из (39) получаем, что наименьшее положительное значение α равно

$$\alpha_4 = \pi h/(2l). \quad (40)$$

Из решения однородной системы с точностью до произвольной постоянной C определяются неизвестные C_i , а соответствующие выражения для v, ψ находятся из формул (22), (23):

$$v_4 = C \sin^2(\alpha_4 x/(2h)), \quad \psi_4 = C \bar{\alpha}_4(1 - 6\bar{p}_4/5) \sin(\alpha_4 x/h). \quad (41)$$

Формулы (41) определяют форму потери устойчивости. Как и ранее, выражение для прогиба v_4 не зависит от поперечного давления q и совпадает с классическим случаем.

Значение предельной нагрузки $\bar{p}_4 = \bar{p}(\alpha_4)$ вычисляется подстановкой (40) в (25).

ВАРИАНТ V. На торцах задаются следующие условия:

$$v = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad v = 0, \quad M = 0 \quad \text{при } x = l. \quad (42)$$

Используя выражение возмущения момента M из (19), подставим (22), (23) в (42), получим систему однородных уравнений, определитель которой Δ_5 приравняем к нулю:

$$\Delta_5 = h \cos(\alpha l/h) - l\alpha(1 - 6\bar{p}(\bar{\alpha})/5) \sin(\alpha l/h) = 0. \quad (43)$$

Из (43) получаем трансцендентное уравнение для определения α_5

$$\text{tg}(\alpha l/h) = (\alpha l/h)(1 - 6\bar{p}(\alpha)/5),$$

приближенное решение которого равно

$$\alpha_5 = (h/l)(4,4934 + O(h^2/l^2)) \simeq 4,4934h/l. \quad (44)$$

Из решения однородной системы с точностью до произвольной постоянной C определяются неизвестные C_i , а соответствующие выражения для v, ψ находятся из формул (22), (23):

$$\begin{aligned} v_5 &= C(1 - x/l + \text{ctg}(\alpha_5 l/h) \sin(\alpha_5 x/h) - \cos(\alpha_5 x/h)), \\ \psi_5 &= C(h/l)(1 - \cos(\alpha_5 x/h) - \text{tg}(\alpha_5 l/h) \sin(\alpha_5 x/h))/(1 - \varepsilon). \end{aligned} \quad (45)$$

Выражения (45) определяют форму потери устойчивости. Выражение для прогиба v_5 не зависит от поперечного давления q и совпадает с классическим случаем.

Значение предельной нагрузки $\bar{p}_5 = \bar{p}(\bar{\alpha}_5)$ вычисляется подстановкой (44) в (25).

Если аналогично классическим формулам использовать понятие приведенной длины, впервые введенное Ясинским [6], то можно записать

$$\alpha_i = \pi h/l_i, \quad i = \overline{1, 5}, \quad (46)$$

где l_i — приведенная длина: $l_1 = l, l_2 = l/2, l_3 = l, l_4 = 2l, l_5 \simeq 0,7l$. В этом случае формула (25) для вычисления предельной нагрузки \bar{p}_i при всех вариантах граничных условий на торцах записывается в одинаковом виде:

$$\bar{p}_i = 2\gamma\alpha_i^2/(3\phi_i), \quad \phi_i = \phi(\bar{\alpha}_i) = 1 + \bar{\alpha}_i^2 a_1 + \sqrt{1 + 2\bar{\alpha}_i^2 a_1 + \bar{\alpha}_i^4 a_2^2},$$

откуда, разлагая правую часть в ряд по степеням $\bar{\alpha}_i^2$, с точностью до $\bar{\alpha}_i^4$ получаем

$$\bar{p}_i = 2\gamma\alpha_i^2(1 - \bar{\alpha}_i^2 a_1)/3. \quad (47)$$

Таким образом, предельная нагрузка, полученная для основного случая (вариант I), может быть использована для других граничных условий на торцах при помощи замены действительной ширины пластины l на приведенную l_i .

В дальнейшем будем полагать, что $q \ll \mu$. В таком случае $1 \pm \varepsilon \simeq 1$ и постоянные в формулах (47), содержащие ε , принимают вид

$$\bar{\alpha} \simeq \alpha, \quad \gamma \simeq \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} = \frac{2}{1 - \nu}, \quad a_1 \simeq \frac{17 - 5\nu}{15(1 - \nu)}, \quad \bar{p} = \frac{q + p}{\mu}$$

(ν — коэффициент Пуассона).

Формулу (47) можно записать в эквивалентной форме

$$(p + q)_i = p_{ei} \left(1 - \alpha_i^2 \frac{17 - 5\nu}{15(1 - \nu)} \right), \quad (48)$$

где $p_{ei} = \alpha_i^2 E / (3(1 - \nu^2))$ — критическая нагрузка Эйлера; E — модуль Юнга.

Критическая нагрузка (48) определяется суммой осевой и поперечной нагрузок. С ростом q осевая нагрузка p уменьшается. В работе [7] получен аналогичный результат для частного случая граничных условий на торцах (вариант III).

В монографии [8] приводится решение задачи об устойчивости шарнирно опертой полосы (вариант I) при всестороннем сжатии “мертвой” нагрузкой. Получены критические нагрузки p_L , p_N для случаев линейного и нелинейного докритического состояния соответственно:

$$p_L = \frac{1}{2} p_{e1} \left(1 - \alpha_1^2 \frac{14 - 23\nu + \nu^2}{30(1 - \nu)^2} \right), \quad p_N = \frac{1}{2} p_{e1} \left(1 - \alpha_1^2 \frac{2 + 3\nu}{15(1 - \nu)} \right). \quad (49)$$

При всестороннем сжатии $p = q$ и формула (48) записывается в виде

$$p_1 = \frac{1}{2} p_{e1} \left(1 - \alpha_1^2 \frac{17 - 5\nu}{15(1 - \nu)} \right). \quad (50)$$

Сравнение критических нагрузок (49), (50) приводит к неравенствам

$$p_1 < p_N < p_L \quad \text{при} \quad 0 \leq \nu \leq 0,5.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ предельная нагрузка (48) приближается к нагрузке Эйлера.

Следует отметить, что при любых условиях закрепления на торцах поперечное давление на лицевых поверхностях не влияет на форму потери устойчивости, совпадающую с классической.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А. Е. Нелинейные уравнения упругого деформирования пластин // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 3. С. 135–145.
2. Алексеев А. Е. Линеаризованные уравнения нелинейных задач упругого деформирования тонких пластин // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 160–167.
3. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
4. Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

5. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971.
6. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехтеоретиздат, 1946.
7. Керр А. Д., Тан С. Влияние поперечного давления на потерю устойчивости упругих тел, в частности, для стержней и пластин // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Прикл. механика. 1966. Т. 11, № 5. С. 159–165.
8. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Киев: Наук. думка, 1979.
9. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973.

*Поступила в редакцию 14/IV 2004 г.,
в окончательном варианте — 24/VI 2004 г.*
