УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О РАСКЛИНИВАНИИ ПЛАСТИНКИ

Л. Г. Добордэкгинидзе

(*Тбилиси*)

Рассматривается плоская задача о расклинивании нелинейно-упругого тела из материала гармонического типа [1] в предположении, что действующие силы сохраняют величину и направление в процессе деформации [2].

Пусть в бесконечную пластинку из указанного хрупкого материала с упругими характеристиками E (модуль упругости) и ν (коэффициент Пуассона) вбивается жесткий полубесконечный клин постоянной толщины $2h$. В результате впереди клина образуется прямолинейная трещина, длину которой обозначим через L. Далее будем считать, что в концевой части трещины действуют силы сцепления с интенсивностью G, и введем в рассмотрение универсальную постоянную K материала, называемую модулем сцепления и определяемую формулой [3]

$$K = \int_0^d \frac{G(t)\,dt}{\sqrt{t}}, \tag{1}$$

где d — ширина концевой области.

Наши дальнейшие рассуждения опираются на следующие предположения, сформулированные в [3, 4]: 1) размер концевой области трещины пренебрежимо мал по сравнению с размером всей трещины; 2) распределение смещений в концевой области трещины не зависит от действующих нагрузок; 3) напряжения на кромках трещины принимают конечные значения.

Кроме этих условий, предполагаем, что силы трения на контактной области между клином и пластинкой отсутствуют.

В линейном случае эта задача решена в [3]. Ниже рассматривается задача в нелинейной постановке в том смысле, что окружающий трещину материал принимается за нелинейно-упругий указанного вида.

За физическую область примем плоскость переменной $z = x + iy$, разрезанную вдоль положительной части оси Oy, и предположим, что клин действует на промежутке $[L;\infty[$ этой оси. Длина образуемой перед клином трещины считается настолько большой по сравнению с h, что граничные условия со всей поверхности трещины можно снести на указанный разрез. Поэтому этот способ моделирования допустим и в рассматриваемом случае, поскольку нелинейный характер задачи определяется поведением окружающего клин упругого материала гармонического типа (об этом см. [1, 2], а также численные данные в конце статьи). После этого замечания граничные условия задачи можно представить в виде [5]

$$X_y = 0 \text{ на } [0;\infty[,\quad X_x = G(y) \text{ на } [0; d],\quad X_x = 0 \text{ на }]d; L]; \tag{2}$$

$$X_x = -f(y),\quad u(x+0,\,y) = h,\quad u(x-0,\,y) = -h \text{ на }]L;\infty[, \tag{3}$$

где X_x, Y_y, X_y — составляющие тензора напряжения; u, v — компоненты вектора смещения; $f(y)$ — заданная на $]L;\infty[$ действительная функция, характеризующая усилия, действующие на клин. Эта функция заранее не известна и подлежит определению.

Для решения задачи воспользуемся комплексными представлениями полей упругих элементов в области вне трещины через две аналитические в рассматриваемой области функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ (см. [6]):

$$X_x + Y_y + 4\mu = \frac{\lambda + 2\mu}{\sqrt{I}}\, q\Omega(q),\quad Y_y - X_x - 2iX_y = \tag{4}$$

$$= -\frac{4(\lambda + 2\mu)}{\sqrt{I}} \frac{\Omega(q)}{q} \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}};$$

(5) $$u + iv = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \int \varphi'^2(z)\,dz + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)}{\overline{\varphi'(z)}} + \overline{\psi(z)}\right] - z;$$

(6) $$\frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varphi'^2(z) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}},\quad \frac{\partial z^*}{\partial \bar z} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}} - \overline{\psi'(z)}\right],$$

где

(7) $$\sqrt{I} = \frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\partial \bar z^*}{\partial \bar z} - \frac{\partial z^*}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar z^*}{\partial z};\quad q = 2\left|\frac{\partial z^*}{\partial z}\right|;\quad \Omega(q) = q - \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu};$$

λ, μ — упругие постоянные Ламэ.

В рассматриваемом случае функция $\psi(z)$ ограничена на бесконечности, а $\varphi(z)$ при больших $|z|$ имеет асимптотику [6]

(8) $$\varphi(z) = z + \varphi_0(z),$$

где $\varphi_0(z)$ — аналитическая и ограниченная при $z = \infty$ функция.

Легко заметить, что соблюдение первого условия (2) на основании (4) и (6) приводит к соотношению

(9) $$\overline{\varphi(y)\varphi''(y)}/\varphi'^2(y) - \psi'(y) = 0 \quad \text{при } y \geqslant L.$$

Продифференцируем равенство (5) по y и в полученном соотношении учтем (9). Тогда после элементарных преобразований получим на $[L;\infty[$

(10) $$v'_y - iu'_y = \varphi'^2(y)\left[\frac{\mu}{\lambda+2\mu} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{|\varphi'^2(y)|}\right] - 1,\quad y \in [L;\infty[.$$

Далее из (4) с использованием (3), (6) и условия (9) приходим к соотношению

(11) $$X_x = 2\mu(\lambda+\mu)[|\varphi'^2(y)| - 1]/[\mu|\varphi'^2(y)| + \lambda + \mu] \text{ на } [L;\infty[.$$

После этого соотношением

(12) $$z = x + iy = \omega(\zeta) = i\zeta^2$$

отобразим рассматриваемую физическую область конформно и взаимно однозначно на нижнюю полуплоскость S плоскости переменной $\zeta = \xi + i\eta$ ($\zeta = \rho e^{i\theta}$) и для рассматриваемых функций сохраним прежние обозначения.

Исходя из (8) и (12), заключаем, что поведение $\varphi'(\zeta)$ при достаточно больших $|\zeta|$ характеризуется формулой

(13) $$\varphi'(\zeta) = 2i\zeta + O(\zeta^{-2}).$$

Обратимся теперь к соотношению (11), из которого с использованием (3) и (12) находим

(14) $$\left|\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right| = \sqrt{(\lambda+\mu)[2\mu - f(\sigma^2)]/\mu[2(\lambda+\mu) + f(\sigma^2)]}$$

$$\text{на } \gamma =]-\infty; -\sqrt{L}[\,\cup\,]\sqrt{L};\infty[.$$

Учитывая известные свойства голоморфных в области функций и соотношение (13), из (14) получим

(15) $$\varphi'(\zeta) = 2i\zeta \exp\frac{1}{\pi i\zeta}\int_\gamma \frac{\sigma F(\sigma^2)\,d\sigma}{\sigma - \zeta} \quad \text{при } \zeta \in S,$$

где

(16) $$F(\sigma^2) = \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\frac{2\mu - f(\sigma^2)}{2(\lambda+\mu) + f(\sigma^2)}.$$

Вернемся теперь к (4) и потребуем выполнение условия конечности напряжений на концах трещины. В преобразованной области это условие эквивалентно равенству $\varphi'(0) = 0$, что на основании (1) и (15) приводит к соотношению

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{L}} \frac{\sigma F(\sigma^2)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sqrt{L}}^{\infty} \frac{\sigma F(\sigma^2)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\sqrt{d}}^{\sqrt{d}} \frac{\sigma F(\sigma^2)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0,$$

или

$$\frac{2}{\pi i}\int\limits_{\sqrt{L}}^{\infty} F(\sigma^2)\,d\sigma - \frac{2}{\pi i}\int\limits_{0}^{\sqrt{d}} G(\sigma^2)\,d\sigma = 0.$$

Отсюда с учетом (1) на основании гипотез 1 и 2 получим (в старых координатах)

(17) $$\int\limits_{L}^{\infty} \frac{F(y)\,dy}{\sqrt{y}} = K.$$

Равенство (17) выражает условие равновесия трещины, но его левая часть не известна, поскольку f и, следовательно, F пока не определены.

Для этого обратимся к формуле (10) и подставим сюда значения, найденные по (12) и (15). Тогда после некоторых рассуждений и применений известных соотношений Сохоцкого — Племеля на основании (3) получим

$$\frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\frac{2\mu - f(\sigma_0^2)}{2(\lambda+\mu)+f(\sigma_0^2)}\,\mathrm{Im}\exp\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\sigma F(\sigma^2)\,d\sigma}{\sigma-\sigma_0} = 0,$$

или

(18) $$\int\limits_{\gamma} \frac{\sigma F(\sigma^2)\,d\sigma}{\sigma-\sigma_0} = 0.$$

Это равенство представляет собой сингулярное интегральное уравнение для определения функции F на γ и, как и условие (17), внешне похоже на соответствующие соотношения линейной классической теории. Разница в том, что функция $F(y)$ в рассматриваемом случае через $f(y)$ определяется нелинейным соотношением (16) (в линейной теории $F(y) = f(y)$).

Сингулярное интегральное уравнение (18) с учетом (12) имеет решение

(19) $$F(y) = A\sqrt{L}/\sqrt{y(y-L)},$$

где A — неизвестная пока постоянная. Для ее определения внесем (19) в левую часть (17). Тогда после элементарных вычислений получим $A = K/\pi$, и, следовательно, решение (19) будет иметь вид

(20) $$F(y) = K\sqrt{L}/[\pi\sqrt{y(y-L)}].$$

С учетом (20) находим значения $f(y)$ из 16 в виде

$$f(y) = 2\mu\left[\exp\frac{K\sqrt{L}}{\pi\sqrt{y(y-L)}} - 1\right]\Big/\left[1 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp\frac{K\sqrt{L}}{\pi\sqrt{y(y-L)}}\right].$$

Напомним, что по линейной теории

$$f(y) = K\sqrt{L}/[\pi\sqrt{y(y-L)}].$$

Для определения длины L рассматриваемой трещины подставим (15) в (10) и потребуем, чтобы при $y \to \infty$ левая часть этого соотношения по модулю равнялось h. Тогда, как легко убедиться, при больших y должно быть

(21) $$F(y) = E\arcsin h/[2\pi(1-\nu^2)y] + O(y^{-2}).$$

Из сравнения (20) и (21) находим искомую формулу в виде

(22) $$L = E^2(\arcsin h)^2/(4(1-\nu^2)^2K^2).$$

Таблица 1

h	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
δ	1,0040	1,0080	1,0140	1,0217	1,0316	1,0432	1,0582	1,0760	1,0966

Таблица 2

h	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
L	18,40 18,40	40,41 41,77	73,61 74,72	115,02 117,59	165,63 170,78	294,45 311,57	470,08 504,62

Таблица 3

h	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
L	20,78 20,78	46,77 47,17	83,12 84,37	129,87 132,58	187,02 192,84	332,48 351,81	519,50 569,79

По линейной классической теории, как известно,

$$L = E^2h^2/(4(1-\nu^2)^2K^2. \tag{23}$$

Формулы (15), (20), (22) и определяют искомую функцию (15), после чего находятся остальные неизвестные задачи [6].

Из сравнения (22) и (23) следует

$$\delta = L_{\text{н}}/L_{\text{л}} = (\arcsin h/h)^2.$$

В табл. 1 приводятся значения для этого отношения при различных h, откуда видно, что длина образуемой перед клином трещины возрастает согласно нелинейной теории по сравнению с линейной.

Кроме того, подсчитаем, например, длину прямолинейной трещины для различных материалов при различных значениях h. В табл. 2, 3 приведены результаты вычислений для стали 4330 с модулем упругости $E = 2\cdot 10^6$ кг/см^2 и с модулем сцепления $K = 2{,}5\cdot 10^4$ кг/см$^{3/2}$ (коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}26$), а затем для алюминия 2219-Т87 с характеристиками $E = 0{,}8\cdot 10^6$ кг/см^2, $K = 10^4$ кг/см$^{3/2}$ ($\nu = 0{,}35$) [4]. При этом в табл. 2, 3 сначала приводятся значения по линейной, а затем нелинейной теориям.

Как показывают эти данные, нелинейная теория приводит к увеличению длины трещины по сравнению с линейной (классической) теорией. Увеличение тем значительнее, чем больше значение толщины жесткого клина. В первом случае при $h = 0{,}15$; 0,3 и 0,5 разница составляет 2,5; 3,1 и 7,2% соответственно, во втором случае при $h = 0{,}15$; 0,3 и 0,5—0,9; 3,2 и 9,8%.

ЛИТЕРАТУРА

1. **John F.** Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type.— Commun. Pure Applied Math., 1960, v. 13, N 2.
2. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
3. **Баренблатт Г. И.** О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
4. **Христианович С. А.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1981.
5. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
6. **Добордагинидзе Л. Г.** Комплексное представление смещений и напряжений для нелинейно-упругого материала гармонического типа.— Тр. Тбил. мат. ин-та, 1979, т. 61, с. 37.

Поступила 3/IV 1983 г.