ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ
ВОПРОСЫ ГОРНЫХ НАУК Том 6, № 1, 2019

УДК 539.3 DOI: 10.15372/FPVGN2019060134

РЕШЕНИЕ ТРЕХ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В. Е. Миренков

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: mirenkov@misd.ru,
Красный проспект 54, Новосибирск 630091, Россия

Наибольший интерес практически во всех областях техники имеет решение задачи для полуплоскости. Однако в них отсутствуют соотношения, связывающие значения всех компонент напряженно-деформированного состояния на границе полуплоскости. В работе показано, что произвольная формулировка граничных условий может существенно упростить интегральные уравнения, переводя их в класс уравнений типа Фредгольма первого рода. Учитывая симметрию, задача для плоскости с математическим разрезом сведена к рассмотрению границы полуплоскости. Установлено, что вне зависимости от метода решения задача становится некорректной.

Уравнение, решение, полуплоскость, граничные условия, некорректность

SOLUTION OF THREE BASIC PROBLEMS OF ELASTICITY FOR HALF-PLANE

V. E. Mirenkov

Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Science
E-mail: mirenkov@misd.ru, *Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

Solution of elastic problem for half-plane is of the highest concern in almost every field of engineering. However, there are no relations binding the values of all components of the stress-strain state at the half-plane boundary This paper shows that arbitrary formulation of the boundary conditions considerably simplifies integral equations and transfers them to the class of Fredholm's first kind equations. Considering symmetry, the problem for half-plane with mathematical cut is reduced to the problem on half-plane boundary. Regardless of the method, any solution is reduced to ill-posed problem.

Equation, solution, half-plane, boundary conditions, ill-posedness

Число некорректных задач в механике большое и продолжает увеличиваться. В основе многих из них лежит полуплоскость. Для решения конкретных задач для полуплоскости выводят интегральные уравнения, которые требуют формулировки граничных условий. Последние, как правило, подбираются в виде простейших представлений (идеальное проскальзывание на участке границы, сцепление с абсолютно твердым телом, когда принимаются на конечном отрезке границы значения компонент смещений, равные нулю и т. д.) (рис. 1). Конечно, перечислить все возможности нельзя. Введение в теорию упругости понятия сосредоточенной силы, являющейся чуждой и неуклюжей попыткой поставить в соответствие сосредоточенной силе аналитическое решение [1], в принципе некорректно. Но такие некорректные решения удобно использовать в различных областях знаний (в силу аналитичности решения) при исследовании различных закономерностей, которые не могут, в свою очередь, считаться корректными.

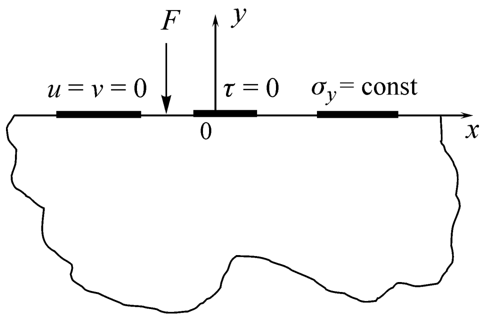

Рис. 1. Возможные формулировки граничных условий на различных участках оси x: u, v — компоненты смещений, σ_y, τ — компоненты напряжений, F — сосредоточенная сила

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Общий случай системы сингулярных интегральных уравнений имеет вид [2]

$$\begin{gathered} f(t_0)+2\mu g(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)+2\mu g(t)}{t-t_0}dt, \\ \kappa\overline{f(t_0)}-2\mu\overline{g(t_0)}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\kappa\overline{f(t)}-2\mu\overline{g(t)}}{t-t_0}dt=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}[f(t)+2\mu \mathrm{g}(t)]\,d\,\frac{\overline{t}-\overline{t_0}}{t-t_0}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\kappa = 3 - 4w$; $\mu = E[2(1 + w)]^{-1}$; E — модуль Юнга; w — коэффициент Пуассона,

$$f(t)=i\int\limits_{0}^{t}(X_n+iY_n)\,ds=f_1+if_2 \tag{2}$$

X_n, Y_n — компоненты усилий в направлении осей x и y; $g = u + iv$; u, v – компоненты смещений в направлении осей x и y; i — мнимая единица; черта над функцией обозначает комплексно сопряженное значение; Γ — граница рассматриваемой области; t_0 — аффикс точки границы Γ.

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ГРАНИЦЫ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Представим искомую связь исходя из (1), (2), когда Γ — граница полуплоскости совпадает с осью x. Учитывая, что

$$d\,\frac{\overline{t}-\overline{t_0}}{t-t_0}=0$$

для границы полуплоскости, систему (1) перепишем в виде:

$$\begin{gathered} f_1+if_2+2\mu(u+iv)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1+if_2+2\mu(u+iv)}{t-x}dt, \\ \kappa(f_1-if_2)-2\mu(u-iv)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\kappa(f_1-if_2)-2\mu(u-iv)}{t-x}dt, \end{gathered}$$

откуда действительная часть дает

$$\begin{gathered} f_1+2\mu u=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f_2+2\mu v}{t-x}dt, \\ \kappa f_1-2\mu u=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\kappa f_2-2\mu v}{t-x}dt, \end{gathered} \tag{3}$$

Соответственно, мнимая

$$\begin{gathered} f_2+2\mu v=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1+2\mu u}{t-x}dt, \\ \kappa f_2+2\mu v=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\kappa f_2-2\mu u}{t-x}dt, \end{gathered} \tag{4}$$

Исключим из (3) слагаемое с f_2, а из (4) – с f_1

$$2\kappa f_1 = 2\mu(\kappa-1)u + \frac{\kappa+1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\mu v}{t-x}dt,$$
$$2\kappa f_2 = 2\mu(\kappa-1)v - \frac{\kappa+1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\mu u}{t-x}dt, \tag{5}$$

Теперь, наоборот, исключая соответственно v и u из (3), (4) имеем

$$4\mu u = (\kappa-1)f_1 + \frac{\kappa+1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_2}{t-x}dt,$$
$$4\mu v = (\kappa-1)f_2 - \frac{\kappa+1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1}{t-x}dt, \tag{6}$$

Продифференцировав (5) по x, т. е. переходя в левой части непосредственно к компонентам напряжений, можно записать:

$$\sigma_y = \frac{\kappa-1}{\kappa}\mu u' + \frac{\kappa+1}{\kappa}\frac{\mu}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v'}{t-x}dt,$$
$$\tau_{xy} = \frac{\kappa-1}{\kappa}\mu v' - \frac{\kappa+1}{\kappa}\frac{\mu}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u'}{t-x}dt. \tag{7}$$

Аналогично, продифференцировав (6), получим

$$u' = \frac{\kappa-1}{4\mu}\sigma_y + \frac{\kappa+1}{4\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_{xy}}{t-x}dt,$$
$$v' = \frac{\kappa-1}{4\mu}\tau_{xy} - \frac{\kappa+1}{4\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_y}{t-x}dt. \tag{8}$$

В результате система (7) определяет значения нормальных и касательных напряжений через производные от смещений, а система (8) — наоборот. Иначе говоря, системы (7), (8) представляют в квадратурах решения трех основных задач теории упругости для границы полуплоскости.

Отметим, что уравнения (6) и (7) относятся к типу уравнений Фредгольма второго рода и необходимо следить за формулируемыми граничными условиями для конкретной задачи. При неудачной формулировке граничных условий системы (или одно из уравнений систем (6), (7)) переходят в разряд уравнений Фредгольма первого рода и требуют регуляризации или изменения граничных условий.

Оставшаяся неопределенной последняя компонента напряженного состояния на границе полуплоскости находится из соотношения [2]

$$(\kappa+1)\varphi(x) = f(x) + 2\mu g(x),$$

которое перепишем в виде

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\varphi'(x) = \frac{4}{\kappa+1}(\sigma_y + 2\mu u').$$

Подставляя в последнее равенство значение u' из (8), окончательно получим

$$\sigma_x = \sigma_y + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_{xy}}{t-x}dt. \tag{9}$$

Таким образом, все известные решения для границы полуплоскости легко получаются из (7), (8) и (9). Например, если $\tau_{xy} = 0$ всюду на границе полуплоскости то, как следует из (8), (9)

$$u' = \frac{\kappa-1}{4\mu}\sigma_y, \quad v' = -\frac{\kappa+1}{4\mu\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_y}{t-x}dt, \quad \sigma_x(x) = \sigma_y(x).$$

что совпадает с решением Вестергарда [2]. Для перехода в область граничные значения потенциалов Колосова – Мусхелишвили имеют вид

$$(\kappa+1)\varphi(t)=f(t)+2\mu g(t),$$
$$(\kappa+1)\varphi(t)=\kappa\overline{f(t)}-2\mu\overline{g(t)}-t\varphi'(t),$$

тогда

$$(\kappa+1)\varphi(\mathrm{z})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)+2\mu g(t)}{t-z}dt,$$
$$(\kappa+1)\varphi(\mathrm{z})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\kappa\overline{f(t)}-2\mu\overline{g(t)}}{t-z}dt-z\varphi'(z)\,.$$

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ

Остановимся на получении из (7), (8) и (9) решения для плоскости с разрезом длиной $2a$, расклиниваемом постоянными усилиями $\sigma_y=-\sigma_0$, $\tau=0$. В силу симметрии рассмотрим смешанную задачу для полуплоскости, где граничные условия сформулируем в следующем виде (рис. 2)

$$\sigma_y=-\sigma_0,\ \ |x|\le a;\quad \tau_{xy}=0,\ |x|<\infty,\ v(x)=0,\ |x|\ge a\,.$$

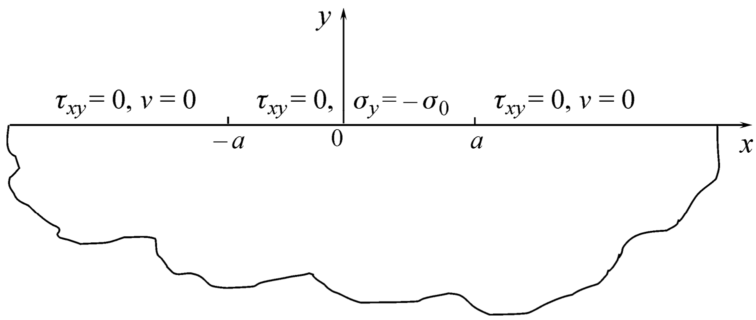

Рис. 2. Формулировка граничных условий в задаче для разреза

Как можно видеть, из (8), (7)

$$u'(x)=\frac{\kappa-1}{4\mu}\begin{cases}-\sigma_0, & |x|\le a,\\ \sigma_y, & |x|>a,\end{cases}. \tag{10}$$
$$\sigma_y=-\frac{\kappa-1}{\kappa}\mu u'+\frac{\kappa+1}{\kappa}\frac{\mu}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{v'}{t-x}dt$$

или для $|x|\le a$

$$\frac{\mu}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{v'}{t-x}dt=-\frac{\kappa+1}{4}\sigma_0\,.$$

Обращая последнее уравнение, следуя [4], получим

$$\mu v'=\frac{\kappa+1}{\kappa}\sigma_0\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad |x|\le a\,,$$

откуда для $|x|>a$

$$\sigma_y=\frac{\mu}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{v'}{t-x}dt=\frac{\kappa+1}{4}\sigma_0\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}-1\right]. \tag{11}$$

Последнее решение (11) совпадает с полученным в [2], используя конформное отображение эллипса на математический разрез и является некорректным из-за нарушения конформности в двух точках. Остается найти причину, почему решение (11) некорректно. Первое уравнение (10) снимает вопрос, так как предполагает непрерывность напряжений σ_y, что существенно в теории упругости.

ВЫВОДЫ

Впервые получено решение всех трех основных задач теории упругости для границы полуплоскости в квадратурах.

Показано, что произвольно формулируемые граничные условия могут свести проблему к некорректной, и поэтому необходимо следить за тонкой гранью, нарушение которой переводит корректную задачу в некорректную. Это особенно важно, если при решении используются численные методы слишком грубые для тонкой грани.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Timoshenko S. P. and Goodier J. N.** Theory of elasticity, McGraw Hill Book Company, 1951, 576 pp. [**Тимошенко С. П., Гудьер Д. Н.** Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.]
2. **Kurlenya M. V. and Mirenkov V. E.** Methods of mathematical modeling of underground excavations. Novosibirsk. Nauka, 1994, 188 pp. [**Курленя М. В., Миренков В. Е.** Методы математического моделирования подземных сооружений. — Новосибирск: Наука, 1994. — 188 с.]
3. **Muskhelishvili N. I.** Some basic problems of mathematical theory of elasticity, Moscow, Nauka, 1966, 708 pp. [**Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 708 с.]
4. **Muskhelishvili N. I.** Singular integral equations, Moscow, Nauka, 1966, 606 pp. [**Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966. — 606 с.]