ПМТФ, № 2, 1960

О РАСЧЕТЕ СКОРОСТИ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ГЕТЕРОГЕННЫХ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЯХ СО СМЕШАННОЙ КИНЕТИКОЙ

А. М. Супоницкий

(*Москва*)

Рассматривается задача расчета скорости переноса вещества в ламинарном потоке жидкости при гетерогенных химических реакциях со смешанной кинетикой. В § 1 приводится постановка задачи и дается обзор некоторых предшествующих работ. В § 2 дается частное точное решение задачи для случая независимости нормальной компоненты скорости от координаты вдоль тела. В § 3 и 4 изучается конвективная диффузия в пограничном слое тела; для решения применяется метод разложения в ряд по параметру; в § 3 показано, что при применении метода интегральных соотношений пограничного слоя конечной толщины нахождение любого k-го члена в разложении приводится к вычислению квадратуры; в § 4 члены ряда определяются последовательно из решения системы интегральных уравнений. В качестве примера в § 3 и 4 рассмотрена задача о химических реакциях n-го порядка на пластине и приведено сравнение при $n = 1$ с точным решением В. Г. Левича и Н. Н. Меймана.

Автор выражает глубокую благодарность Г. И. Баренблатту за предложенную задачу и ценные советы.

§ 1. Пусть поток вязкой жидкости, содержащий некоторое вещество, обтекает тело с химически активной поверхностью; на поверхности происходит химическая реакция; рассмотрим задачу определения скорости происходящей химической реакции.

Будем предполагать, что наличие в потоке инородного вещества не оказывает влияния на гидродинамику потока. Введем связанную с телом ортогональную систему координат x_1, y_1, причем линия $y_1 = 0$ совпадает с контуром поверхности обтекаемого тела. Составляющие скорости $u_1(x_1, y_1)$, $v_1(x_1, y_1)$ определяются из решения соответствующей задачи гидродинамики вязкой жидкости и считаются известными величинами.

Вблизи реагирующей поверхности происходит резкое изменение концентрации вещества, иначе говоря, возникает диффузионный пограничный слой. Отношение толщины вязкого пограничного слоя к толщине диффузионного зависит от величины диффузионного числа Прандтля $\sigma = \nu / D$, где ν — коэффициент кинематической вязкости, D — коэффициент диффузии. Для диффузии молекул в водных растворах число Прандтля велико (10^3 — 10^4) и диффузионный слой значительно тоньше вязкого. Следовательно, для $u_1(x_1, y_1)$ и $v(x_1, y_1)$ можно принять их значения вблизи поверхности (линейная аппроксимация)

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{\tau(x_1) y_1}{\mu}, \qquad v_1(x_1, y_1) = -\frac{\tau'(x_1) y_1^2}{2\mu} \tag{1.1}$$

Здесь $\tau(x_1)$ — напряжение трения на поверхности, μ — коэффициент вязкости.

Для ламинарного плоского потока капельной жидкости с постоянными физическими свойствами уравнение концентрации вещества $c_1(x_1, y_1)$ в пограничном диффузионном слое обтекаемого тела имеет вид

$$u_1 \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial c_1}{\partial y_1} = D \frac{\partial^2 c_1}{\partial^2 y_1^2} \tag{1.2}$$

В (1.2), ввиду малой толщины диффузионного пограничного слоя, пренебрегаем молекулярным переносом в направлении вдоль поверхности тела по сравнению с поперечным переносом.

Концентрация вещества вдали от тела c_0, постоянна, т. е.

$$c_1(x_1, y_1) = c_0 \quad \text{при } y_1 = \infty \tag{1.3}$$

$$c_1(x_1, y_1) = c_0 \quad \text{при } x_1 = 0 \tag{1.4}$$

Условие баланса вещества на поверхности дает

$$D\frac{\partial c_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} = kc_1{}^n(x_1, y_1) \quad \text{при } y_1 = 0 \tag{1.5}$$

Здесь k — константа скорости химической реакции, n — положительная величина, равная порядку реакции.

Уравнение (1.2) и граничные условия (1.3), (1.4), (1.5) описывают диффузию вещества в течениях типа пограничного слоя при значениях числа Рейнольдса $R = Ul/\nu \gg 1$, где U — скорость набегающего потока, l — характерный размер тела; в случае медленных течений (число $R < 1$) не учитывается условие (1.4).

В приведенной выше постановке В. Г. Левич решил задачу о химических реакциях n-го порядка на бесконечном вращающемся диске [1]. В 1951 г. В. Г. Левич и Н. Н. Мейман решили задачу о химических реакциях первого порядка ($n = 1$) в пограничном слое плоской пластины [1]. Шамбре и Акривос, не будучи знакомы с работой В. Г. Левича и Н. Н. Меймана, вновь рассмотрели задачу о пластине и получили часть их результатов [2]. Акривосом и Шамбре [3] и Рознером [4] были предложены численные и приближенные аналитические методы для расчета реакций n-го порядка. В монографии В. Г. Левича [1] показано, что в некоторых осесимметричных задачах математическая постановка задачи совпадает с (1.2), (1. 3), (1. 5).

§ 2. Задача о химических реакциях в потоке вязкой жидкости имеет класс точных решений (решение В. Г. Левича о диффузии к вращающемуся диску принадлежит к этому классу).

Если $v_1(x_1, y_1) = v_1(y_1)$, то соотношения (1.2), (1.3), (1.5) удовлетворяются функцией

$$c_1(y_1) = A\int_0^{y_1}\left(\exp\frac{1}{D}\int_0^{\eta} v_1(\xi)\,d\xi\right)d\eta + B \tag{2.1}$$

Постоянные A и B определяются из уравнений

$$c_0 = A\chi^{-1} + B, \qquad Dc_0\chi - DB\chi = kB^n$$

где

$$\chi^{-1} = \int_0^{\infty}\left(\exp\frac{1}{D}\int_0^{\eta} v(\xi)\,d\xi\right)d\eta \tag{2.2}$$

Если в соответствии с (1.1) положить $v_1(y_1) = -Cy_1{}^2$, то

$$\chi^{-1} = \Gamma(^4/_3)\, 3^{1/3} D^{1/3} C^{-1/3}$$

Приведем в качестве примера выражение для потока вещества j для части поверхности, находящейся в окрестности передней критической точки сферы радиуса a, обтекаемой медленным потоком вязкой жидкости, при реакции первого порядка. Уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial c}{\partial \theta} + v_r\frac{\partial c}{\partial r} = D\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \tag{2.3}$$

Здесь r, θ — сферические координаты, v_r и v_θ — составляющие скорости по направлениям r и θ. Полагая, что $r = a + y_1$ и пренебрегая в полученном Стоксом выражении для v_r величинами третьего порядка малости относительно θ и y_1/a, получим

$$v_r = -3Uy_1{}^2/2a^2$$

В этом случае $C = 3U/2a^2$ и, следовательно, имеем

$$j = D\frac{\partial c_1}{\partial y_1}\Big|_{y_1=0} = kc_0\left(1 + 2^{1/3}\,\Gamma(^4/_3)\,QP^{-1/3}\right)^{-1} \qquad \left(P = \frac{Ua}{D}, \quad Q = \frac{ka}{D}\right) \tag{2.4}$$

§ 3. Введем безразмерные величины

$$x=\frac{x_1}{l}, \quad y=\frac{y_1 R^{1/2}\sigma^{1/3}}{l}, \quad u=\frac{u_1}{U}, \quad v=\frac{v_1 R^{1/2}}{U}, \quad c=\frac{c_1-c_0}{c_0}$$

$$z(x)=\frac{\tau(x_1)\,l}{\mu U R^{1/2}\sigma^{1/3}}, \quad \varphi=\left(\frac{\tau(x_1)}{2\mu}\right)^{1/2}\frac{y_1(R^{1/2}\sigma^{1/3})^{1/2}}{l^{1/2}U^{1/2}}, \quad \lambda=\frac{kc_0^{n-1}\,l}{DR^{1/2}\sigma^{1/3}} \tag{3.1}$$

Тогда уравнение (1.2) и граничные условия (1.3) — (1.5) при учете (1.1) в новых переменных c, x, φ принимают вид

$$\frac{\sigma^{1/3}\varphi}{(z(x)/8)^{1/2}}\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi^2}, \quad \frac{\partial c}{\partial\varphi}=\lambda\frac{2^{1/2}}{z^{1/2}(x)}(1+c)^n \quad \text{при } \varphi=0 \tag{3.2}$$

$$c(x,\varphi)=0 \quad \text{при } \varphi=\infty, \quad c(x,\varphi)=0 \quad \text{при } x=0 \tag{3.3}$$

Будем искать решение уравнения (3.2) в виде

$$c(x,\varphi)=c_0(x,\varphi)+\lambda c_1(x,\varphi)+\lambda^2 c_2(x,\varphi)+\lambda^3 c_3(x,\varphi)+\ldots \tag{3.4}$$

Из (3.2), (3.3) получим

$$\frac{\sigma^{1/3}\varphi}{(z(x)/8)^{1/2}}\frac{\partial c_k}{\partial x}=\frac{\partial^2 c_k}{\partial\varphi^2} \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{3.5}$$

$$c_k(x,\varphi)=0 \quad \text{при } \varphi=\infty, \qquad c_k(x,\varphi)=0 \quad \text{при } x=0$$

$$\frac{\partial c_0}{\partial\varphi}=0 \quad \text{при } \varphi=0, \qquad \frac{\partial c_1}{\partial\varphi}=\frac{2^{1/2}}{z^{1/2}(x)}(1+c_0)^n \quad \text{при } \varphi=0$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial\varphi}=\frac{2^{1/2}}{z^{1/2}(x)}(1+c_0)^{n-1}c_1 \quad \text{при } \varphi=0$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial\varphi}=\frac{2^{1/2}}{z^{1/2}(x)}\left[n(1+c_0)^{n-1}c_2+\frac{n(n-1)}{2}(1+c_0)^{n-2}c_1^2\right] \quad \text{при } \varphi=0$$

. . . .

Введем новую переменную

$$t=\sigma^{-1/3}8^{-1/2}\int_0^x z(\xi)\,d\xi$$

Тогда получим

$$\varphi\frac{\partial c_k}{\partial t}=\frac{\partial^2 c_k}{\partial\varphi^2}, \qquad \frac{\partial c_k}{\partial\varphi}=q_k(t) \quad \text{при } \varphi=0; \tag{3.6}$$

$$c_k(t,\varphi)=0 \quad \text{при } \varphi=\infty \quad c_k(t,\varphi)=0 \quad \text{при } t=0 \quad (c_0(t,\varphi)\equiv 0)$$

где $q_k(t)$ — известная функция.

Задача (3.6) имеет простой физический смысл: определить концентрацию вещества в куэттовском течении около пластины при задании на ее поверхности потока вещества. Полагая

$$c_k(t,\varphi)=A+B\varphi+C\varphi^2+D\varphi^3+E\varphi^4$$

и удовлетворяя условиям

$$\frac{\partial c_k}{\partial\varphi}(t,\varphi)=q_k(t), \qquad \frac{\partial^2 c_k(t,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0 \qquad \text{при } \varphi=0$$

$$c_k(t,\varphi)=0, \qquad \frac{\partial c_k(t,\varphi)}{\partial\varphi}=0, \qquad \frac{\partial^2 c_k(t,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0 \qquad \text{при } \varphi=\delta(t)$$

из интегрального соотношения баланса вещества в диффузионном пограничном слое конечной толщины $\delta(t)$ найдем решение (3.6) в виде

$$c_k(t, \varphi) = -\frac{q_k(t)\,\delta(t)}{2} + q_k(t)\,\varphi - \frac{q_k(t)\,\varphi^3}{\delta^2(t)} + \frac{q_k(t)\,\varphi^4}{2\delta^3(t)}$$

$$\delta(t) = \left[30\, q_k^{-1}(t)\int_0^t q_k(\xi)\,d\xi\right]^{1/3} \quad \left(c_k(t, 0) = -q_k^{2}(t) 2^{-1} 30^{1/3}\left(\int_0^t q_k(\xi)\,d\xi\right)^{1/3}\right)$$

Для ламинарного пограничного слоя пластины

$$z^{1/2}(x) = \alpha^{1/2}\, 2^{-1}\, \sigma^{-1/6}\, x^{-1/4}$$

В этом случае поток вещества на пластине выражается рядом

$$j(x_1, 0) = kc_0^{\,n}\left\{1 - \frac{15^{1/3} n\lambda x_1^{1/2}}{\alpha^{1/3}\, l^{1/2}} + \left[150^{1/3} n^2 + \frac{15^{2/3}}{2} n(n-1)\right]\frac{\lambda^2 x_1}{\alpha^{2/3}\, l} + \ldots\right. \qquad (3.7)$$

При $n = 1$ имеем

$$j(x_1, 0) = kc_0(1 - 0.686\,\gamma + 0.411\,\gamma^2 + \cdots)$$

$$\gamma = \frac{3^{1/3}\,\Gamma(1/3)\, kx_1^{1/2}}{\beta^{2/3}\,\Gamma(2/3)}, \qquad \beta = \frac{D\alpha^{1/2}\, U^{3/4}}{2^{1/2}\, \nu^{1/4}} \qquad (3.8)$$

Для сравнения приведем полученное В. Г. Левичем и Н. Н. Мейманом ([1], формула (17.13)) точное решение задачи для пластины при $n = 1$

$$j(x_1, 0) = kc_0\left(1 - \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(2/3)}\gamma + \frac{\Gamma(6/3)}{2\Gamma(2/3)} - \cdots\right) \qquad (3.9)$$

или приближенно

$$j = kc_0(1 - 0.660\,\gamma + 0.369\,\gamma^2 + \cdots) \qquad (3.10)$$

§ 4. Лайтхилл [5] определил величину потока тепла $q(x_1)$ в плоском ламинарном пограничном слое около поверхности при произвольном задании температуры поверхности $T(x_1)$ и принятии допущения (1.1)

$$q(x_1) = \int_0^{x_1} f(x_1, \xi)\, dT(\xi) \qquad (4.1)$$

где $f(x_1, \xi)$ известная функция. Если искать решение (1.1) — (1.5) в виде

$$c(x_1, y_1) = c_0(x_1, y_1) + \lambda c_1(x_1, y_1) + \lambda^2 c_2(x_1, y_1) + \cdots$$

то, очевидно, задача приведется к решению последовательно интегральных уравнений, аналогичных (4.1) относительно распределения концентрации на поверхности. В случае пластины уравнения легко решаются, если положить $c_k(x_1) = Ax_1^{\,m}$; A и m — константы.

Расчеты дают для потока вещества на пластине

$$j = kc_0^{\,n}\left\{1 - \frac{\Gamma(4/3)\, nc_0^{n-1}}{\Gamma(2/3)}\gamma + \left[\frac{\Gamma(6/3)\, n^2}{2\Gamma(2/3)} + \frac{\Gamma^2(4/3)(n-1)\,n}{2\Gamma^2(2/3)}\right] c_0^{2(n-1)}\gamma^2 + \cdots\right\} \qquad (4.2)$$

При $n = 1$ (4.2) совпадает с (3.9).

Поступила
16 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, М., 1959.
2. Chambre P. L., Acrivos A. On chemical reactions in laminar boundary layer flows. J. Appl. Phys., 1956, vol. 27, № 11.
3. Acrivos A., Chambre P. L. Laminar boundary layer flows with surface reactions. Industr. and Engng Chem., 1957, vol. 49, № 6.
4. Rosner D. E. Chemically frozen boundary layers with catalytic surface reaction. J. Aero/Space Sci., 1959, vol. 26, № 5.
5. Lighthill M. J. Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. Proc. Roy. Soc., 1950, vol. 202, S. A., № 1070.