

УДК 539.3+539.4

ПРОСТЕЙШИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗРУШЕНИЯ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ВЗРЫВЕ*

А. Б. Киселев

Московский государственный университет,
119899 Москва

Предлагаются простейшие математические модели, позволяющие рассчитать число осколков, на которое разрушится корпус космического аппарата (КА) в результате внутреннего взрыва, и их начальную скорость разлета на момент разрушения.

1. Модели разрушения. Сделаем следующие упрощающие предположения.

1. Корпус КА моделируется цилиндрической или сферической оболочкой.

2. Оболочка тонкая: $h/r \ll 1$ (h — толщина, r — радиус оболочки).

3. Воздействие взрыва моделируется давлением $p = p(t)$, зависящим от времени t и равномерно распределенным по внутренней поверхности оболочки. Характерное время действия нагрузки $\tau \gg h/a_0$ (a_0 — скорость звука в материале оболочки).

4. Материал оболочки упруговязкопластический, процесс деформирования адиабатический.

5. В качестве критерия начала разрушения принимается критерий предельной удельной диссипации [1, 2].

6. Считается, что разрушение оболочки происходит за счет расхода упругой энергии, накопленной в оболочке на момент $t = t_*$ начала разрушения; работой внешних сил за время разрушения пренебрегается; откольные разрушения не рассматриваются [3, 4].

В силу первых трех предположений задача деформирования тонкой оболочки в первом приближении может быть рассмотрена как одномерная цилиндрическая или одномерная сферическая.

Тогда уравнение движения имеет вид

$$\rho \dot{v} = \frac{p(t)}{h} - \alpha \frac{\sigma_\theta}{r}, \quad (1.1)$$

где ρ — текущая плотность; v — радиальная скорость; r — текущее значение радиуса оболочки; σ_θ — кольцевое усилие (среднее по толщине оболочки напряжение); точка означает материальную производную по времени; в (1.1) и далее $\alpha = 1$ соответствует цилиндрическому случаю, $\alpha = 2$ — сферическому.

Скорость кольцевой деформации определяется как

$$\varepsilon_\theta = \frac{v}{r},$$

другие деформации отсутствуют ввиду тонкости оболочки.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-16746).

Уравнение закона сохранения массы имеет вид $\dot{\rho}/\rho = -\alpha\dot{\varepsilon}_\theta$, откуда следует

$$\rho = \rho_0 \exp(-\alpha\varepsilon_\theta).$$

Уравнения состояния упруговязкопластического материала берутся в форме Пэжины [5]; с учетом того, что в цилиндрическом случае

$$\sigma_\theta = \sigma + S_\theta, \quad \sigma_z = \sigma + S_z, \quad \sigma_r = \sigma + S_r = 0, \quad S_\theta + S_z + S_r = 0,$$

а в сферическом случае

$$\sigma_\theta = \sigma + S_\theta, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta, \quad \sigma_r = \sigma + S_r = 0, \quad 2S_\theta + S_r = 0,$$

они приводятся к виду

$$\dot{S}_\theta = \frac{1}{\alpha} \frac{4}{3} \mu \dot{\varepsilon}_\theta - \frac{\mu}{\eta} S_\theta \frac{|\dot{S}_\theta| - \frac{1}{\alpha} \frac{2}{3} J_0}{|S_\theta|} H(|S_\theta| - \frac{1}{\alpha} \frac{2}{3} J_0), \quad \sigma_\theta = \alpha \frac{3}{2} S_\theta.$$

Здесь μ — модуль сдвига; η — динамическая вязкость материала; J_0 — статический предел упругости при простом растяжении; $H(x)$ — единичная функция Хевисайда. При этом тензор напряжений σ_{ij} разбивается на шаровую $\sigma\delta_{ij}$ и девиаторную S_{ij} части ($\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + S_{ij}$) и считается, что скорости деформаций могут быть разложены на упругие и пластические; пластическое течение несжимаемо:

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\varepsilon}_\theta^e + \dot{\varepsilon}_\theta^p, \quad \dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_r^e + \dot{\varepsilon}_r^p = 0, \quad \dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_z^e + \dot{\varepsilon}_z^p = 0, \quad \dot{\varepsilon}_\theta^p + \dot{\varepsilon}_z^p + \dot{\varepsilon}_r^p = 0$$

в цилиндрическом случае и

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\varepsilon}_\theta^e + \dot{\varepsilon}_\theta^p, \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \dot{\varepsilon}_\theta, \quad \dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_r^e + \dot{\varepsilon}_r^p = 0, \quad 2\dot{\varepsilon}_\theta^p + \dot{\varepsilon}_r^p = 0$$

в сферическом.

Удельные (на единицу массы) упругая энергия E и механическая диссипация D вычисляются по формулам

$$E = \alpha \int_0^t \frac{\sigma_\theta}{\rho} \dot{\varepsilon}_\theta^e dt, \quad D = \alpha \int_0^t \frac{\sigma_\theta}{\rho} \dot{\varepsilon}_\theta^p dt.$$

Удельная внутренняя энергия $U = E + D$.

Скорости упругой и пластической деформаций вычисляются по формулам

$$\dot{\varepsilon}_\theta^e = \frac{\dot{S}_\theta}{2\mu} + \alpha \frac{\dot{\varepsilon}_\theta}{3}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta^p = \dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_\theta^e.$$

Критерий начала разрушения оболочки — критерий предельной удельной диссипации, которая для принятой модели среды сводится к механической диссипации:

$$D = \alpha \int_0^{t_*} \frac{\sigma_\theta}{\rho} \dot{\varepsilon}_\theta^p dt = D_*$$

(D_* — константа предельной удельной диссипации, определяемая с использованием экспериментов по откольному разрушению при плоском соударении пластин [1, 2]).

Ожидаемое число фрагментов $\langle N \rangle$, на которое разрушится оболочка, находится из баланса упругой энергии деформаций и работы по отрыву материала. Для цилиндрической оболочки уравнение баланса имеет вид

$$\rho_0(\pi d_0 h) E_* = \gamma h \langle N \rangle,$$

где γ — удельная энергия, которая расходуется на образование единицы свободной поверхности; E_* — плотность накопленной упругой энергии на момент $t = t_*$; d_0 — начальный диаметр оболочки. Тогда для цилиндрической оболочки

$$N = \left[\pi \frac{\rho_0 d_0 E_*}{\gamma} \right] \quad (1.2)$$

(квадратной скобкой обозначена целая часть числа).

Для получения формулы для числа фрагментов сферической оболочки необходимо сделать еще одно дополнительное упрощающее предположение. Примем, что все фрагменты имеют одинаковый размер (характерную площадь внешней поверхности фрагмента s , рис. 1) и отношение площади s к квадрату полупериметра p контура, ограничивающего эту поверхность, постоянно:

$$k = \frac{s}{p^2}.$$

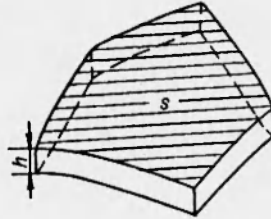


Рис. 1

Далее в расчетах коэффициент формы k принимается равным 0,2 (сравним: для квадрата $k = 0,25$, для правильного треугольника $k = \sqrt{3}/9$, для круга $k = 1/\pi$). Заметим, что можно и отказаться от предположения о том, что все фрагменты имеют одинаковый размер, и принять, что массы (а значит, и площади s) фрагментов распределены, например, по закону Розина — Раммлера, который широко используется и является частным случаем общих вероятностных представлений [6]:

$$M(q) = M \left\{ 1 - \exp \left(- \left(\frac{q}{q_0} \right)^n \right) \right\}.$$

Здесь $M(q)$ — суммарная масса осколков, имеющих массу, меньшую q ; q_0 — характерная масса; n — показатель равномерности дробления. В таком случае будет прогнозироваться весь спектр разрушения. Однако в настоящей работе ограничимся решением задачи фрагментации сферической оболочки в рамках сделанных выше предположений.

Тогда для расчета среднего числа $\langle N \rangle$ фрагментов сферической оболочки получается следующая система уравнений:

$$k = \frac{s}{p^2}, \quad h p \gamma \langle N \rangle = \pi d_0^2 h \rho_0 E_*, \quad s \langle N \rangle = \pi d_0^2.$$

Отсюда находится число фрагментов N сферической оболочки:

$$N = \left[\pi k \left(\frac{\rho_0 d_0 E_*}{\gamma} \right)^2 \right]. \quad (1.3)$$

Начальная скорость разлета осколков V_0 считается равной радиальной скорости расширения оболочки в момент начала разрушения:

$$V_0 = v \Big|_{t=t_*}.$$

2. Результаты расчетов. Основные расчеты были проведены для оболочек с диаметром $d_0 = 3$ м и толщиной $h = 0,003$ м из дюралюминия: $\rho_0 = 2700$ кг/м³, $\mu = 27,6$ ГПа, $\eta = 10$ кПа·с, $J_0 = 0,29$ ГПа, $\gamma = 400$ кДж/м², $D_* = 30$ кДж/кг. Внутреннее давление вычисляется по формуле

Таблица 1

p_0 , ГПа	τ , мс	N	l/h	U_0 , м/с	t_* , мс	$(\varepsilon_\theta^p)_*$	I_* , кПа·с
0,01	1,00	979	3,21	439	1,640	0,207	4,28
0,01	10,00	990	3,13	1057	0,951	0,189	8,31
0,01	100,00	992	3,17	1148	0,904	0,186	8,92
0,1	0,10	980	3,21	541	0,996	0,196	4,95
0,1	1,00	1026	3,06	2539	0,277	0,145	9,40
0,1	10,00	1044	3,01	3080	0,242	0,137	23,30
1	0,01	980	3,21	547	0,899	0,194	4,95
1	1,00	1242	2,53	7481	0,063	0,085	57,70
1	100,00	1268	2,48	7903	0,061	0,083	60,80
10	0,01	1181	2,66	6096	0,043	0,079	47,70
10	0,10	2009	1,56	18203	0,018	0,048	141,00
10	1,00	2213	1,42	21114	0,017	0,046	164,00

$$p(t) = \frac{p_0}{(1 + t/\tau)^3},$$

где p_0 — начальное давление на оболочку; τ — характерное время действия нагрузки.

Некоторые из результатов расчетов приведены в табл. 1 (цилиндрическая оболочка) и 2 (сферическая оболочка) и на рис. 2, 3 (a — цилиндрическая оболочка, b — сферическая). Введены обозначения: $(\varepsilon_\theta^p)_*$ — накопленная пластическая деформация на момент $t = t_*$, l — характерный размер фрагмента (для цилиндрической оболочки $l = \pi d_0/N$, для сферической $l = 2d_0\sqrt{\pi k/N}$), I_* — импульс приложенной нагрузки:

$$I_* = \int_0^{t_*} p(t) dt.$$

Таблица 2

p_0 , ГПа	τ , мс	$N \cdot 10^{-3}$	l/h	U_0 , м/с	t_* , мс	$(\varepsilon_\theta^p)_*$	I_* , кПа·с
0,01	10,00	1097	1,52	597	0,688	0,0402	6,23
0,01	100,00	1097	1,52	653	0,660	0,0402	6,53
0,1	1,00	1098	1,51	2021	0,205	0,0400	15,50
0,1	10,00	1100	1,51	2409	0,187	0,0401	18,20
1	0,01	1098	1,52	447	0,415	0,0402	4,95
1	10,00	1257	1,41	7632	0,057	0,0366	56,50
5	0,01	1099	1,51	3105	0,078	0,0398	21,40
5	0,10	1670	1,23	12390	0,026	0,0273	93,30
5	1,00	1919	1,15	15104	0,023	0,0252	113,00
10	0,01	1173	1,47	6145	0,040	0,0357	47,50
10	0,10	2294	1,05	18170	0,017	0,0221	137,00
10	1,00	2613	0,97	20999	0,016	0,0210	157,00

Из расчетов видно, что число фрагментов N сильно зависит от характера приложенной нагрузки $p = p(t)$: N растет с увеличением интенсивности нагрузки p_0 и ее длительности τ . В рамках данной постановки задачи этот результат является следствием чувствительности материала к скорости пластической деформации. С увеличением p_0 и τ уменьшают-

ся пластические деформации в оболочке, накопленные на момент начала разрушения $t = t_*$.

Импульс I_* , переданный оболочке к моменту $t = t_*$, определяет число осколков N , и наоборот: по числу осколков N можно определить переданный оболочке импульс I_* . Это хорошо видно из рис. 2, где приведены зависимости N от I_* . Расчетные точки, полученные при различных комбинациях p_0 и τ , ложатся на единые кривые. Аналогичная картина будет и для зависимости начальной скорости разлета фрагментов V_0 от I_* . При этом единая зависимость (рис. 3) описывает цилиндрическую и сферическую оболочки. Зависимости N от I_* и V_0 от I_* близки к линейным; лишь при малых I_* наблюдается нелинейный участок.

Сравним результаты расчетов с известными из литературы экспериментами и теоретическими работами по фрагментации оболочек.

Исследованию фрагментации металлических, в основном стальных, цилиндрических оболочек (колец) посвящено много работ ([7-14] и др.). В теоретических работах исходя из различных предположений о механизмах деформирования и разрушения получены формулы для среднего числа осколков. Эти формулы из [7-12] имеют общую структуру:

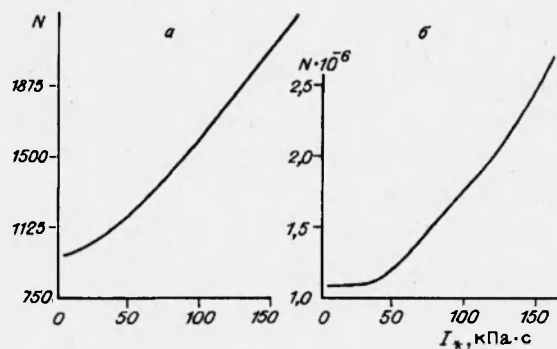


Рис. 2

$$N \sim \frac{\pi d_0 V_0}{Lc}. \quad (2.1)$$

Здесь L — характерный линейный размер кольца (толщина, радиус и т. п.); c — характерная величина скорости. Так, формула из [8], как показано в [11], может быть представлена в виде

$$N = \pi V_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{6J_0 \varepsilon_f}},$$

а из [9] — в виде

$$N = \frac{2\pi V_0}{v_c} \quad (v_c = \int_0^{\varepsilon_f} \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} d\varepsilon),$$

где ε_f — критическая деформация; v_c — критическая скорость удара.

Линейная зависимость числа фрагментов от радиальной скорости цилиндра (2.1) подтверждается рядом экспериментов [13].

В [14] получена другая (квадратичная) зависимость числа фрагментов N от скорости разлета V_0 :

$$N = 3\pi \left(\frac{1}{2} J_0 d + \eta V_0 \right)^2 (2d_0 E_0 \gamma)^{-1}. \quad (2.2)$$

Здесь E_0 — модуль Юнга; материал считается вязкопластическим; $\varepsilon_f \ll 1$; работа по разрушению материала совершается за счет накопления упругой энергии.

Эксперименты (стальные трубы, $h/d_0 = 0,021-0,025$), приведенные в [14], удовлетворительно описываются этой формулой. Из них следует, что ширина осколков в 2–8 раз больше их толщины, что согласуется с результатами настоящей работы (см. табл. 1).

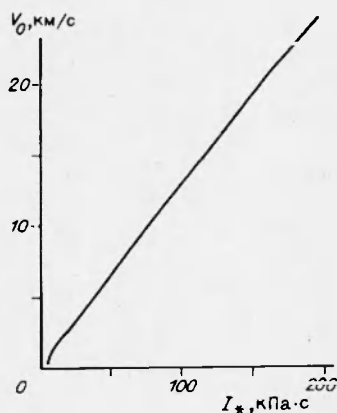


Рис. 3

Зависимость числа фрагментов от скорости V_0 (1.2), (1.3) в данной работе не такая явная, как (2.1) или (2.2). Однако из результатов расчетов видно, что в обоих случаях (цилиндрическая и сферическая оболочки) при малых импульсах нагрузки I_* зависимости близки к квадратичным, а при больших I_* — к линейным (см. рис. 2, 3, табл. 1, 2).

В [15, 16] приводятся результаты экспериментов по расширению вследствие взрыва как цилиндрических, так и сферических оболочек из разных материалов. Проанализированы различные критерии разрушения на предмет их использования в практических расчетах. Показано, что принятый в настоящей работе критерий

[3, 4] (предположение 6) дает хорошие результаты. Данных по фрагментации оболочек, к сожалению, не приводится.

В [17] была рассмотрена задача о фрагментации цилиндрической оболочки в постановке, несколько отличной от представленной выше, а именно: в [17] не пренебрегалось радиальным усилием (средним по толщине оболочки напряжением) σ_r по сравнению с кольцевым σ_θ и считалось, что $\sigma_r = -p(t)/2$ (поскольку на внутренней поверхности оболочки задано давление $p(t)$, поэтому $\sigma_r = -p(t)$, а внешняя поверхность оболочки свободна от нагрузок — $\sigma_r = 0$). В настоящей же работе принято обычное предположение теории тонких оболочек: $\sigma_r = 0$. В результате в [17] для кольцевого усилия получено выражение $\sigma_\theta = \frac{3}{2}S_\theta - \frac{1}{2}p(t)$, а в настоящей работе $\sigma_\theta = \frac{3}{2}S_\theta$. Поэтому заметно отличаются результаты расчетов числа фрагментов N , представленных в табл. 1 настоящей работы и [17], особенно при задании больших внутренних давлений $p(t)$. Случай сферической геометрии в [17] не рассматривался.

Таким образом, предложенные простые модели позволяют в первом приближении оценить число фрагментов и их начальную скорость разлета при разрушении корпуса КА в результате внутреннего взрыва. Дальнейшее развитие моделей представляется на путях уточнения, во-первых, зависимости нагрузки от времени и ее распределения по поверхности конструкции КА, определяемых той или иной причиной взрыва, во-вторых, распределения фрагментов по массам, в-третьих, учета доразгона фрагментов различной массы под действием продуктов взрыва после разрушения оболочки, в-четвертых, учета реальной геометрии КА, в-пятых, усложнения модели среды с целью более полного учета реальных физических процессов, сопровождающих высокоскоростное деформирование и разрушение конструкционных материалов и уточнения определяющих параметров модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев А. Б., Юмашев М. В. Деформирование и разрушение при ударном нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды // ПМТФ. 1990. № 5.

2. Киселев А. Б., Юмашев М. В. О критериях динамического разрушения термоупругопластической среды // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1990. № 4.
3. Иванов А. Г. О возможности построения единой теории разрушения // ПМТФ. 1990. № 1.
4. Иванов А. Г. Роль инерционных и упругих сил при динамическом разрушении в пластической области // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 1.
5. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968.
6. Кошелев Э. К., Кузнецов В. М., Сафронов С. Т., Черников А. Г. Статистика осколков, образующихся при разрушении твердых тел взрывом // ПМТФ. 1971. № 2.
7. Власов О. Е. Основы теории действия взрыва. М.: ВИА им. В. В. Куйбышева, 1957.
8. Райнхарт Дж., Пирсон Дж. Поведение материалов при импульсных нагрузках. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
9. Banks E. F. The fragmentation behaviour of thin-walled metal cylinders // J. Appl. Phys. 1969. V. 40, N 1.
10. Кузнецов В. М. О разрушении металлических колец при импульсных нагрузках // ФГВ. 1973. № 4.
11. Одинцов В. А., Чудов Л. А. Расширение и разрушение оболочек под действием продуктов детонации // Проблемы динамики упругопластических сред. М., 1975.
12. Одинцов В. А. Механизм разрушения цилиндров // Вопросы физики взрыва и удара: Сб. ст. МВТУ им. Н. Э. Баумана. М., 1980. Вып. 1.
13. Колобанова А. Е., Одинцов В. А., Чудов Л. А. Распространение трещины в цилиндре, нагруженном взрывом // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1.
14. Иванов А. Г., Кочкин Л. И., Новиков В. Ф., Фоломеева Т. М. Высоко-скоростное разрушение тонкостенных труб из мягкой стали // ПМТФ. 1983. № 1.
15. Olive F., Nicaud A., Marillean J., Loichot R. Rupture behaviour of metals in explosive expansion // Mechanical properties at high rates of strain: Proc. 2nd Conf., Oxford, 1979. Bristol; London, 1980.
16. Stelly M., Legrand J., Dormeval R. Some metallurgical aspects of the dynamic expansion of shells in shock waves and high strain rate phenomena in metals // Shock waves and high-strain-rate phenomena in metals. Concepts and applications: Proc. Intern. Conf., Albuquerque, 1980. N. Y.; L., 1981.
17. Киселев А. Б. Простейшая математическая модель разрушения космического аппарата при взрыве // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1993. № 4.

*Поступила в редакцию 17/II 1993 г.,
в окончательном варианте — 27/V 1994 г.*