УДК 532.5

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЗДУХА В СНЕГЕ

М. К. Жекамухов, Л. З. Шухова

Кабардино-Балкарский государственный университет, 360004 Нальчик

Рассматривается конвективная неустойчивость воздуха, находящегося в порах между кристаллами льда в снеге. В приближении Буссинеска выведена система уравнений, описывающих процесс возникновения термической конвекции в толще снега. Показано, что для снега, так же как и для жидкости, имеется критериальное число, аналогичное числу Рэлея, которое определяет возникновение кризиса устойчивости воздуха в снеге. Оценивается вклад естественной конвекции воздуха в процессе тепло- и массопереноса в снеге, анализируются возможные причины большого разброса экспериментальных значений коэффициентов теплопроводности и диффузии снега.

1. Коэффициенты теплопроводности и диффузии снега. Рассмотрим снег, в котором отсутствует макроскопическое движение воздуха, заполняющего поры между кристаллами льда, составляющими остов снега. При наличии градиента температуры в снеге происходит миграция водяного пара от более теплых участков к менее теплым. Такой процесс переноса пара происходит за счет молекулярной диффузии. При этом макроскопический градиент концентрации пара в снеге определяется исключительно градиентом температуры. Действительно, время выравнивания концентрации пара в порах между кристаллами льда равно $\tau = \delta^2/D_n$, где δ — характерный размер пор; D_n — коэффициент диффузии молекул воды в воздухе, что при $\delta = 0{,}1$ см и $D_n = 0{,}2$ см^2/с составляет около 0,05 с. Таким образом, в реальных условиях водяной пар в снежных порах находится в состоянии, близком к насыщению, следовательно, его концентрация является функцией только температуры.

Исходя из уравнения Клаузиуса — Клапейрона зависимость насыщающей плотности пара ρ_n от температуры θ (в градусах Цельсия) приближенно можно записать в виде

$$\rho_n \approx \rho_n^*\big(1 - L\theta/(R_n T_0^2)\big), \tag{1.1}$$

где ρ_n^* — насыщающая плотность пара при 0 °C; $T_0 = 273$ K; R_n — газовая постоянная водяного пара; L — удельная теплота сублимации пара.

Поток тепла через единичную площадку $j \sim n^{2/3}\delta^2$, где n — число пор в единичном объеме, который связан с коэффициентом пористости снега f соотношением $n = f/n^3$. Следовательно, величина $j \sim f^{2/3}$. С учетом этой зависимости поток тепла через единичную площадку можно записать в виде $\boldsymbol{q} = -(\lambda_s \nabla\theta + f^{2/3} L D_n \nabla\rho_n) = -\lambda^* \nabla T$. Здесь λ_s — коэффициент теплопроводности; f — коэффициент пористости снега; ∇ — оператор градиента; λ^* — эффективный коэффициент теплопроводности снега:

$$\lambda^* = \lambda_s\big(1 + L\rho_n^* f^{2/3} D_n/(R_n T_0^2 \lambda_s)\big). \tag{1.2}$$

При $f = 1$ формула (1.2) совпадает с аналогичной, полученной в [1].

Если уравнения теплопроводности и диффузии пара в снеге записать с учетом соотношения (1.1), то нетрудно показать, что эффективный коэффициент диффузии пара в снеге D^* совпадает с коэффициентом температуропроводности $\chi^* = \lambda^*/(\rho c)_s$, где $(\rho c)_s$ — объемная теплоемкость снега. Отсюда следует, что поле концентрации молекул пара в снеге определяется температурным полем, а процесс диффузии пара в снеге идентичен процессу переноса тепла.

Заметим, что после подстановки характерных значений параметров в правую часть равенства (1.2) второе слагаемое в скобках составляет лишь сотые доли единицы. Отсюда следует, что в отсутствие конвекции вклад конденсационных процессов в теплопроводность и диффузию в снеге незначителен.

Расчетные значения коэффициента диффузии D^* для различных типов снега составляют $4 \cdot 10^{-3}$ см^2/с [2]. Между тем многочисленные экспериментальные данные для D^*, полученные в лабораторных и полевых условиях, находятся в пределах 0,13–1,1 см^2/с и в большинстве случаев превосходят значение коэффициента диффузии молекул пара в воздухе [3].

Такие аномально большие значения коэффициентов теплопроводности и диффузии в снеге можно объяснить тем, что в экспериментах по определению этих величин имело место конвективное движение воздуха, заключенного в объеме снега.

2. Уравнения термической конвекции в снеге. Снег — пористая среда, которая состоит из твердого скелета, образованного беспорядочно расположенными кристаллами льда, и пор, наполненных воздухом, который может свободно проходить через них как внутрь, так и наружу. При наличии градиента температуры в снеге может возникать конвективное движение воздуха, заполняющего его поры. В теории фильтрации в качестве характеристик движения принимается макроскопическая скорость фильтрации $\boldsymbol{u}$, которая связана со средней скоростью частиц воздуха в пористой среде $\boldsymbol{V}$ соотношением $\boldsymbol{u} = f\boldsymbol{V}$.

Макроскопическое движение воздуха в снеге описывается системой гидродинамических уравнений, включающей уравнения непрерывности, движения и переноса тепла.

По аналогии с уравнениями движения влажной почвы при учете сил трения между твердой и жидкой фазами [4] уравнение движения воздуха в снеге можно записать в виде

$$f\rho \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = -f\nabla p + f\rho\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F},$$

где ρ — плотность воздуха; $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения; $\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на единичную массу воздуха со стороны пористой среды. Величина этой силы, отнесенная к единичному объему снежной среды, согласно закону Дарси равна $f\mu\boldsymbol{V}/\sigma$, где μ — коэффициент вязкости воздуха; σ — коэффициент проницаемости снега.

Таким образом, уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\nabla)\boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} - \frac{\nu}{\sigma}\boldsymbol{V}, \qquad (2.1)$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости воздуха.

Для составления уравнения притока тепла заметим, что отличительной особенностью снега по отношению к влагонасыщенной песчаной среде является то, что движение воздуха, пронизывающего остов снега, сопровождается процессами конденсации и испарения пара, содержащегося в нем, что должно учитываться в уравнении теплового баланса.

Далее, предположим, что воздух, движущийся в снежной среде, все время остается насыщенным. Тогда суммарный поток тепла $\boldsymbol{j}_T$ через единичную площадку, обусловленный кондуктивным переносом тепла по скелету снега и теплопередачей в паровоздушном поровом пространстве, можно записать в виде $\boldsymbol{j}_T = -\lambda^*\nabla T + f\rho c_p\theta\boldsymbol{V} + Lf\rho_n\boldsymbol{V}$, где c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении.

Уравнение переноса тепла принимает вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + M\boldsymbol{V}\nabla\theta = \chi\Delta\theta, \qquad (2.2)$$

где Δ — оператор Лапласа; $M = \dfrac{f\rho c_p}{\rho_s c_s}\Big(1 + \dfrac{L^2\rho_n^*}{R_n T_0^2 \rho c_p}\Big)$ — коэффициент.

Наконец, уравнение непрерывности записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V}) = 0. \tag{2.3}$$

Систему уравнений (2.1)–(2.3) необходимо дополнить уравнением состояния среды $\rho = \rho(T, p)$.

Рассмотрим малые отклонения от равновесия, описываемые возмущениями температуры θ', давления p', плотности ρ' и скоростью $\boldsymbol{V}$. Тогда линейная система уравнений тепловой конвекции в снеге в приближении Буссинеска [5] примет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p' - \frac{\nu}{\sigma}\boldsymbol{V} + \alpha g \theta' \boldsymbol{e}_z, \quad \frac{\partial \theta'}{\partial t} + M(\boldsymbol{V}\nabla\langle\theta\rangle) = \chi^* \Delta\theta', \quad \operatorname{div}\boldsymbol{V} = 0, \tag{2.4}$$

где $\langle\theta\rangle$ определяется из уравнения $\Delta\theta = 0$; $\boldsymbol{e}_z$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх; α — коэффициент теплового расширения воздуха.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда снег находится между двумя горизонтальными плоскостями $z = 0$ и $z = H$, имеющими температуру соответственно θ_0 и θ_1, причем $\theta_0 > \theta_1$. Тогда стационарное температурное поле будет описываться формулой $\langle\theta\rangle(z) = \theta_0 - z(\theta_0 - \theta_1)/H$.

Если в качестве единицы длины выбрать H, единицы времени — σ/ν, единицы скорости — $\chi^*/(HM)$, а возмущения давления и температуры измерять соответственно в единицах $\rho_0 \nu \chi^*/\sigma$ и $\theta_0 - \theta_1$, то безразмерная запись системы уравнений (2.4) будет иметь вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = -M\nabla p + \mathrm{R}^* \theta \boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{V}; \tag{2.5}$$

$$\mathrm{Pr}^* \frac{\partial \theta}{\partial t} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{e}_z + \Delta\theta, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{V} = 0 \tag{2.6}$$

(штрихи опущены). Здесь $\mathrm{R}^* = \alpha g \sigma H M(\theta_0 - \theta_1)/(\nu\chi^*)$ — безразмерный параметр, являющийся аналогом числа Рэлея [6]; $\mathrm{Pr}^* = (\nu/\chi^*)(H^2/\sigma)$ — аналог числа Прандтля.

Таким образом, свободная конвекция в снежном покрове характеризуется двумя безразмерными параметрами R^* и Pr^*.

Следуя стандартной процедуре [5], исключим из уравнений (2.5), (2.6) давление p и горизонтальные компоненты скорости V_x и V_y. Для этого к уравнению (2.5) применим операцию rot (rot) и спроектируем полученное уравнение на ось z. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta V_z = \mathrm{R}^*\Delta_1\theta + \Delta V_z, \qquad \mathrm{Pr}^*\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Delta\theta + V_z. \tag{2.7}$$

Здесь $\Delta_1 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — плоский лапласиан.

Уравнения (2.7) допускают частные решения, описывающие так называемые *нормальные* возмущения, экспоненциально зависящие от времени и периодические в плоскости (x, y):

$$V_z(x,y,z) = V_0(z)\exp[\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)], \quad \theta(x,y,z) = \theta_0(z)\exp[\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)]. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.7), получим следующие амплитудные уравнения:

$$\lambda(V_0'' - k^2 V_0) = V_0'' - k^2 V_0 + k^2 \mathrm{R}^* \theta_0, \quad \lambda\theta\mathrm{Pr}^* = \theta_0'' - k^2\theta_0 + V_0, \tag{2.9}$$

где $k^2 = k_1^2 + k_2^2$, а штрихи обозначают дифференцирование по z.

Для уравнений (2.9) должны быть заданы граничные условия, отражающие конкретные физические условия. Ниже рассматриваются простейшие типы граничных условий.

1. На границах слоя значения температуры фиксированы, следовательно, возмущения температуры на границах исчезают: $\theta(z)\big|_{z=0,1} = 0$; кроме того, рассматриваемый слой снега сверху и снизу закрыт: $V_z(z)\big|_{z=0,1} = 0$. Этим условиям удовлетворяют решения вида $\theta_0(z) = A_n \sin(\pi n z)$, $V_0(z) = B_n \sin(\pi n z)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Подставляя данные значения в (2.9), получим систему уравнений для определения A_n и B_n. Условие совместности этой системы сводится к равенству нулю ее определителя, что дает $\lambda^2 + B\lambda - C = 0$, где $B = \pi^2 n^2 + k^2$; $C = \pi^2 n^2 - k^2 \mathrm{R}^* M/(\pi^2 n^2 + k^2)$. При этом условие нарастания амплитуды возмущения $\operatorname{Re}\lambda > 0$ сводится к неравенству $C > 0$; значит, неустойчивость наступает при выполнении условия $\mathrm{R}^{**} = M\mathrm{R}^* > (\pi^2 n^2 + k^2)^2/k^2$, т. е. пороги устойчивости зависят от n и k.

При заданном n более неустойчивыми будут возмущения, для которых функция $\mathrm{R}^*(k, n)$ имеет минимум, $\partial \mathrm{R}^*/\partial k = 0$, что дает $k_m = \pi n$. Этому значению волнового числа соответствует $\mathrm{R}^*(n) = 4\pi^2 n^2$. С ростом числа R^{**} более неустойчивыми становятся возмущения с $n = 1$ и волновым числом $k = \pi$, а пороговое число R^{**}_m, при котором наступает неустойчивость, равно $4\pi^2$.

Таким образом, условие возникновения конвекции в снежном покрове толщиной H при заданном перепаде температуры $\Delta\theta = \theta_0 - \theta_1$ сводится к неравенству

$$\alpha M H g \sigma \Delta\theta/(\chi^* \nu) > 4\pi^2. \tag{2.10}$$

Этот результат относится к случаю, когда поверхность снега закрыта непроницаемой для воздуха тонкой пленкой. В естественных условиях такая ситуация реализуется часто. Например, после относительно теплого солнечного дня при наступлении ночного похолодания снежные кристаллы смерзаются, образуя тонкую прозрачную корку льда, которая препятствует выходу влажного воздуха из глубины снежного покрова наружу. По мере похолодания увеличивается градиент температуры в снеге, что способствует возникновению конвекции в нем.

Условие (2.10) удобнее записать в виде

$$\Delta\theta/H > 4\pi^2 \chi^* \nu/(\alpha M H^2 g \sigma). \tag{2.11}$$

Если градиент температуры в толще снега удовлетворяет условию (2.11), то в нем имеет место конвекция.

2. Пусть поверхность снега «открыта», т. е. воздух свободно выходит из снега наружу. При этом можно считать, что в момент выхода частиц воздуха горизонтальные составляющие скорости V_x и V_y обращаются в нуль, и, следовательно, в силу соотношения $k_1 V_x + k_2 V_y = (1/i)(dV_z/dz)$, которое следует из уравнения непрерывности, имеем $V_z'(1) = 0$. Кроме того, $V_z(0) = 0$. Положим также $\theta(0) = 0$ и $\theta'(1) = 0$. Очевидно, этим условиям удовлетворяют решения вида

$$\theta(z) = A_n \sin\frac{\pi(2n+1)z}{2}, \qquad V_z(z) = B_n \sin\frac{\pi(2n+1)z}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Приведенные выше результаты остаются в силе, если заменить n на $(2n+1)/2$. При этом $\mathrm{R}^{**}_m = 4\pi^2((2n+1)/2)^2$.

Самыми неустойчивыми будут возмущения с $n = 0$ и поперечными волновыми числами $(\pi/2, 0)$ и $(0, \pi/2)$. Критическое число Рэлея $\mathrm{R}^{**}_k = \pi$. Вместо условия (2.10) получаем

$$\alpha M H g \sigma \Delta\theta/(\chi^* \nu) > \pi^2. \tag{2.12}$$

Отсюда следует, что для открытой поверхности пористой среды критический перепад температуры, при котором наступает конвекция, в четыре раза меньше, чем для закрытой среды, а критическая длина волны в два раза больше.

3. Наибольший интерес представляют граничные условия $V_z(0) = 0$, $V_z'(1) = 0$, $\theta(0) = 0$ и $\theta(1) = 0$. При этом максимальная скорость достигается при выходе частиц воздуха из снежной среды. В данном случае простых решений, аналогичных приведенным выше, не существует. Приближенное решение задачи можно получить при помощи метода Бубнова — Галёркина.

Поскольку при $\lambda = 0$ кривая $\mathrm{R}^*(n,k)$ является нейтральной линией, разделяющей области неустойчивых и устойчивых возмущений, то, полагая в амплитудных уравнениях (2.9) $\lambda = 0$, получим краевую задачу для нейтральных возмущений

$$(V'' - k^2V) + k^2\mathrm{R}^*\theta = 0; \tag{2.13}$$

$$(\theta'' - k^2\theta) + V = 0; \tag{2.14}$$

$$V_z(0) = V_z'(1) = 0; \tag{2.15}$$

$$\theta(0) = \theta(1) = 0. \tag{2.16}$$

Собственными числами задачи (2.13)–(2.16) являются критические числа Рэлея R_k^*, а собственными функциями — амплитуды критических возмущений.

Для скорости $V_z(z)$ примем простейшую аппроксимацию $V_z = \sin(\pi nz/2)$. При этом автоматически выполняются условия (2.15). Решение уравнения (2.14), удовлетворяющее граничным условиям (2.16), имеет вид

$$\theta(z) = \frac{1}{k^2 + (\pi/2)^2}\Big(\sin\frac{\pi z}{2} - \frac{\operatorname{sh}(kz)}{\operatorname{sh}k}\Big). \tag{2.17}$$

После подстановки (2.17) в (2.13) умножим обе части полученного уравнения на $V(z)$ и проинтегрируем от 0 до 1. Из получающегося при этом выражения найдем

$$\mathrm{R}^{**} = \frac{(k^2 + \pi^2/4)^2}{k^2(1 - 2k\operatorname{cth}k/(k^2 + \pi^2/4))}. \tag{2.18}$$

Минимальное критическое число Рэлея для основного возмущения ($n = 1$), как следует из расчетов, равно $\mathrm{R}_m^{**} = 28{,}2$ и достигается при значении волнового числа $k_m = 2{,}4$.

Таким образом, во всех рассмотренных выше возможных режимах конвекции в толще снега значения критического числа Рэлея R_k^* лежат в пределах от π^2 до 4π. Эти значения совпадают с критическими значениями числа Рэлея для водонасыщенного песка, полученными в предположении, что объемная теплоемкость жидкости $(\rho c)_*$ равна объемной теплоемкости пористой среды ρc [5]. Для снега значения R_k нужно умножить на множитель $M \sim 10^3$.

При плотности снега $\rho = 0{,}3$ г/см^3 параметр $M = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$, коэффициент $\chi^* = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ см^2/с. Тогда условие (2.12) принимает вид $\Delta\theta > 0{,}66/(kH)$.

Мы не располагаем экспериментальными данными о величине коэффициента проницаемости σ для различных типов снега. В [7] на основе модельных представлений о пористой среде предложена теоретическая формула $\sigma = f\delta^2/32$, имеется также полуэмпирическая формула Козени, которая в наших обозначениях имеет вид $\sigma = f^3\delta^2/(150(1-f)^2)$. При $f > 0{,}6$ обе эти формулы дают практически одинаковые результаты. Воспользовавшись ими, при глубине снега $H = 40$ см получим $\Delta\theta > 16$ °C и $\Delta\theta > 4$ °C для $\delta = 0{,}2$ см и $\delta = 0{,}4$ см соответственно.

Из данных оценок следует, что термическая конвекция в снеге (в отсутствие ветра) возможна лишь при большой глубине и малой плотности его, например в периоды наступления ночных холодов после относительно теплого дня. Однако, как следует из теории распространения тепловых волн в снеге, суточные колебания температуры проникают в снег лишь на сравнительно небольшую глубину (порядка 15–20 см). Поэтому, если не учитывать влияния ветра, в мощном снежном покрове вероятность возникновения конвекции мала.

Чтобы оценить порядок величины скорости $V_z(z)$, представим $\Delta\theta$ в виде суммы двух слагаемых $\Delta\theta = \Delta\theta_k + \Delta\theta_1$, где $\Delta\theta_k$ — критический перепад температуры, при котором происходит потеря устойчивости воздуха в снеге, определяемый из условий (2.11) или (2.12), $\Delta\theta_1$ — дополнительный (надкритический) перепад температуры, за счет которого поддерживается устойчивое движение воздуха в снеге. Установившаяся скорость воздуха в снежном покрове V имеет порядок $(\beta g\sigma/\nu)\Delta\theta_1$, что при $\sigma \approx 10^{-3}$ см^2 и $\Delta\theta_1 = 1$ °C составляет примерно $4 \cdot 10^{-2}$ см/с.

Конвективное движение воздуха по-разному влияет на процессы тепло- и массопереноса в снежном покрове. Эффективный коэффициент теплопроводности снега, связанный с движением воздуха: $\langle\lambda\rangle^* \sim \rho c_p V H$, что для приведенных выше значений параметров составляет примерно $4 \cdot 10^{-4}$ кал/(см·с·град), т. е. того же порядка, что и λ^*. Эффективный коэффициент диффузии $\langle D\rangle^* \sim VH = 1{,}6$ см^2/с, что значительно больше коэффициента диффузии пара в снеге в отсутствие конвекции.

Данные оценки показывают, что влияние конвекции на диффузию в снеге более существенно. Это вытекает также из следующих соображений. Безразмерное число Пекле, характеризующее отношение конвективного члена к индуктивному в уравнении диффузии, равно $\mathrm{Pe} = \langle V\rangle H/\langle D\rangle^* = \langle V\rangle H/\chi^*$, где $\langle V\rangle$ — средняя скорость потока. Аналогичное число Пекле для процесса теплопроводности равно $\mathrm{Pe}^* = f\rho c_p\langle V\rangle H/(\rho_s c_s\chi^*) = f(\rho c_p/(\rho_s c_s))\mathrm{Pe}$, т. е. $\mathrm{Pe}^* \approx 10^{-3} \cdot \mathrm{Pe}$.

Таким образом, относительная роль конвекции в процессах переноса масс в снеге значительно больше, чем в процессах теплопроводности, что находится в качественном согласии с многочисленными экспериментальными данными. То обстоятельство, что эти экспериментальные данные во многом противоречивы и имеют большой разброс, по нашему мнению, можно объяснить тем, что при проведении экспериментов в отдельных случаях в образцах снега и снежном покрове имело место конвективное движение воздуха, заполняющего снежные поры.

Из изложенного выше ясно, что при проведении расчетов по водному балансу и расчете глубины промерзания почвы необходимо учитывать возможность возникновения конвекции в снежном покрове и вклад этой конвекции в процессы тепло- и массопереноса в снеге.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сулаквелидзе Г. К.** Уравнение теплопроводности пористых сред, содержащих насыщенный пар, воду или лед // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1959. № 2. С. 135–147.
2. **Долов М. А.** Расчет коэффициента температуропроводности снега // Тр. Высокогорного геофиз. ин-та. Л.: Гидрометеоиздат, 1967. Вып. 6. С. 6–10.
3. **Долов М. А., Халкечев В. А.** Физика снега и динамика снежных лавин. Л.: Гидрометеоиздат, 1972.
4. **Френкель Я. И.** К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Сборник избранных трудов: В 2 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 2. С. 520–537.
5. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
6. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
7. **Шайдеггер А. Э.** Физика течения жидкостей через пористые среды. М.: Гостоптехиздат, 1960.

Поступила в редакцию 15/VI 1998 г.,
в окончательном варианте — 5/VIII 1998 г.