Подставляя выражение для $F_1(u)$ и $F_2(u)$ в формулы (6.1) и (6.2), получим соответственно равенства для нахождения зависимости $u(\xi)$ и φ_0

$$\frac{\varphi_0\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{\xi^2+a^2}} = \frac{\varphi_0\sqrt{1+a^2}}{a} + \frac{2V_0S_0}{A}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\right)$$

$$\varphi_0\left(1-\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\right) = \frac{2V_0S_0}{A}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\right)$$

Положим $\beta = \sqrt{1+a^2}$. Тогда

$$\varphi_0 = \frac{2V_0S_0}{A\sqrt{1+a^2}}, \qquad u(\xi) = \sqrt{1-\xi^2}, \qquad f[s(\xi)] = \left(\frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{1+\sqrt{1-\xi^2}}\right)^{1/2}$$

Выпишем значения интегралов [3] $I(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ в этом случае

$$I(\xi) = {}^1/_2\pi\,(\operatorname{sign}\xi), \qquad \Phi(\xi) = 2\operatorname{arc\,tg}\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right) \tag{6.3}$$

Подставляя (6.3) в (2.7), получим уравнение контура

$$x = 0, \qquad y = \frac{\varphi_0\sqrt{1+a^2}}{V_0}\int\limits_0^{\xi}\frac{1+\sqrt{1-\xi^2}}{(\xi^2+a^2)^{3/2}}\,d\xi$$

Таким образом, получилось обтекание пластинки, поставленной нормально к потоку.

Уравнение струи и сопротивление контура найдутся соответственно по формулам (2.8) и (4.1). Вычисляя значение $G(a)$ для данного случая и подставляя его в формулу (3.1), получим уравнение для определения параметра a.

За советы, полученные при решении задачи, автор благодарит Г.Н. Пыхтеева.

Поступила 26 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Т у м а ш е в Г. Г. Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1952, т. 112, кн. 3.
2. П ы х т е е в Г. Н. К задаче о струйном обтекании криволинейной дуги в ограниченном и безграничном потоке несжимаемой жидкости. ПММ, 1955, т. 19, вып. 4.
3. П ы х т е е в Г. Н. Решение обратной задачи плоского кавитационного обтекания криволинейной дуги. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
4. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.

КОЭФФИЦИЕНТ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ УДАРЕ ПЛАВАЮЩЕЙ СФЕРЫ

С. Е. Евдокимов, В. Л. Рвачев

(Харьков)

Конкретная пространственная задача о горизонтальном гидродинамическом ударе плавающего тела впервые рассматривалась Э. Л. Блохом [1], которым получено решение для случая наполовину погруженной в несжимаемую жидкость сферы. В. И. Моссаковским и В. Л. Рвачевым [2] решение этой же задачи получено в замкнутой форме.

Ниже результаты работ [1,2] обобщаются на случай произвольной глубины погружения. Как и в [1,2], считается, что отрыва жидкости от смоченной поверхности сферы нет.

§ 1. Пусть в идеальной жидкости, заполняющей полупространство $z \geqslant 0$, плавает сфера единичного радиуса $x^2+y^2+(z-h)^2=1$. В результате внезапно приложенной импульсивной силы сфера, вначале неподвижная, приходит в поступательное движение вдоль оси x со скоростью U_0. Тогда [3], при отсутствии массовых импульсивных сил, движение жидкости после удара потенциально, и потенциал скоростей φ^* есть гармоническая функция, связанная с импульсивным давлением p_t соотношением $p_t = -\rho\varphi^*$, где ρ — плотность жидкости

На свободной поверхности жидкости

$$\varphi^* = 0 \tag{1.1}$$

На смоченной поверхности сферы, в силу предположения о безотрывном ударе,

$$\partial\varphi^* / \partial n = v_n \tag{1.2}$$

Здесь v_n — проекция на нормаль к сфере скорости точек поверхности.
На бесконечности жидкость неподвижна и

$$\operatorname{grad} \varphi^* = 0 \tag{1.3}$$

Условиями (1.1)—(1.3) потенциальное течение жидкости определяется однозначно.

§ 2. Пусть $|h| < 1$. Введем тороидальные координаты

$$x = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \cos \gamma}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \qquad y = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \sin \gamma}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \qquad z = \frac{c \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}$$

Если $\beta = \beta_0$ — уравнение смоченной части сферы, то $h = \cos \beta_0$, $c = \sin \beta_0$. Свободная поверхность жидкости имеет уравнение $\beta = 0$. Граничные условия (1.1) и (1.2) принимают вид

$$\varphi = 0, \qquad \beta = 0; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -\frac{c^2 U_0 \operatorname{sh} \alpha \cos \gamma}{(\operatorname{ch} \alpha - h)^2}, \qquad \beta = \beta_0$$

Решение будем искать в виде разложения в обобщенный интеграл Меллера—Фока [4] по присоединенным функциям Лежандра

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = c^2 U_0 \cos \gamma \sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \int_0^\infty A(\tau) \operatorname{sh} \beta\tau P^1_{-1/2+i\tau} (\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau \tag{2.2}$$

При этом первое условие (2.1) удовлетворяется, а второе условие удовлетворится, если

$$A(\tau) = \frac{F(\tau) \sqrt{\operatorname{ch} \alpha - h}}{\tau \operatorname{ch} \beta_0 \tau (\operatorname{ch} \alpha - m_0)}$$

$$\left(F(\tau) = \frac{\pi\tau \operatorname{th} \pi\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau} P^1_{-1/2+i\tau}(h), m_0 = h - \frac{c}{2\tau} \operatorname{th} \beta_0 \tau\right)$$

При нахождении $A(\tau)$ левая часть (2.2) разлагалась в интеграл по присоединенным функциям, что достигалось дифференцированием по α соотношения

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha - h} = \int_0^\infty F(\tau) P_{-1/2+i\tau} (\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau \tag{2.3}$$

В частности, на смоченной поверхности

$$\varphi(\alpha, \beta_0, \tau) = -2cU_0 \left[\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - h} + (\operatorname{ch} \alpha - h)^2 \int_0^\infty \frac{F(\tau)}{\operatorname{ch} \alpha - m_0} P^1_{-1/2+i\tau} (\operatorname{ch} \alpha)\, d\tau\right] \cos \gamma \tag{2.4}$$

§ 3. Пусть $h > 1$. Введем бисферические координаты

$$x = \frac{c \sin \alpha \cos \gamma}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \qquad y = \frac{c \sin \alpha \sin \gamma}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \qquad z = \frac{c \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}$$

Пусть $\beta = \beta_1$ — уравнение сферы, $c = \operatorname{sh} \beta$, $h = \operatorname{ch} \beta_1$. Уравнение свободной поверхности $\beta = 0$. Граничные условия (1.1) и (1.2) записываются в виде

$$\varphi = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \beta = \beta_1, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -\frac{c^2 U_0 \sin \alpha \cos \gamma}{(h - \cos \alpha)^2} \tag{3.1}$$

Здесь $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \varphi^*(x, y, z)$. Решение будем искать в виде ряда [5]

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = c^2 U_0 \cos \gamma \sqrt{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \sum_{n=1}^\infty B_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta_1 P_n^1 (\cos \alpha) \tag{3.2}$$

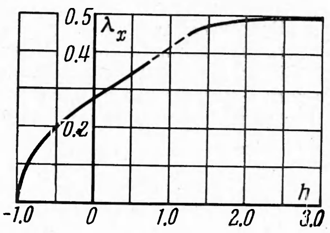
Первое условие (3.1) удовлетворяется. Чтобы удовлетворить второму условию, продифференцируем по α известное разложение

$$\frac{1}{h-\cos\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,Q_n(h)\,P_n(\cos\alpha) \qquad (3.3)$$

и, сравнивая результат с $\partial\varphi\,/\,\partial\beta_1$, получаемой из (3.2), найдем

$$B_n=\frac{2Q_n(h)\,\sqrt{h-\cos\alpha}}{\operatorname{ch}(n+{}^1/_2)\,\beta_1\,(m-\cos\alpha)}$$

$$\left(m_1=h+\frac{c}{2n+1}\operatorname{th}\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta_1\right)$$



В частности, выражение для потенциала на поверхности сферы имеет вид

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=-2cU_0\cos\gamma\left[\frac{\sin\alpha}{h-\cos\alpha}+(h-\cos\alpha)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\,Q_n(h)}{m_1-\cos\alpha}\,P_n^1(\cos\alpha)\right] \qquad (3.4)$$

§ 4. Коэффициент присоединенной массы сферы, действующей вдоль оси x,

$$\lambda_x=-\frac{P_t}{\rho VU_0}\left(P_t=-\iint\limits_{(s)}p_t\cos(n,x)\,ds\right)$$

Здесь P_t — равнодействующая импульсивных сил давления, направленная в сторону, противоположную движению сферы; V — объем вытесненной жидкости.

Для случая частично погруженной сферы имеем

$$\lambda_x(h)=2-12\frac{(1-h)^2}{c(2-h)}\int_0^{\infty}\tau^2\frac{\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{th}\beta_0\tau}\,d\tau\int_0^{\infty}\frac{\cos\tau t}{(\operatorname{ch}t-h)^{1/2}}\,dt\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\left[\frac{c^2}{(\operatorname{ch}s-h)^{3/2}}+\frac{m_0^2-1}{(\operatorname{ch}s-m_0)^{3/2}}\right]\cos\tau s\,ds \qquad (4.1)$$

В вычислениях использованы известные интегральные представления присоединенных функций Лежандра [5].

Если $h>1$, то

$$\lambda_x(h)=2+3c^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{\operatorname{th}(n+{}^1/_2)\,\beta_1}\,Q_n(h)\,[c^2Q_n'(h)-(m_1^2-1)\,Q_n'(m_1)] \qquad (4.2)$$

Из (4.2), учитывая асимптотическое поведение функций Q_n и Q_n', можно получить $\lambda_x(\infty)={}^1/_2$, что соответствует сфере в неограниченной жидкости [5].

Результаты расчетов, выполненных по формулам (4.1) и (4.2) с относительной погрешностью $\delta<2\%$, представлены на фигуре.

Поступила 8 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Блох Э. Л. Горизонтальный гидродинамический удар сферы при наличии свободной поверхности жидкости. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
2. Моссаковский В. И., Рвачев В. Л. Задача о горизонтальном гидродинамическом ударе сферы. ПММ, 1958, т. 22, вып. 6.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, 1963.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, 1963.
6. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Изд. иностр. лит., 1952.