УДК 532.135

# РЕОЛОГИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РАЗБАВЛЕННОЙ СУСПЕНЗИИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

*Л. М. Шмакова*

*(Киев)*

Для установления реологического поведения рассматриваемых сред исследуем возмущения, вносимые сферической каплей ньютоновской жидкости в течение с параллельным градиентом скорости (одноосное растяжение) жидкости Рейнера — Ривлина. Приходим к следующей краевой задаче:

(1) $$T_{ij,j} = 0, \quad v_{i,i} = 0;$$

(2) $$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_1 E_{ij} + \mu_3 E_{ik}E_{kj};$$

(3) $$v_x = -\frac{q}{2}x, \quad v_y = -\frac{q}{2}y, \quad v_z = qz, \quad p = p_\infty \text{ при } r \to \infty;$$

(4) $$v_r = 0, \quad v_\theta = \overset{*}{v}_\theta, \quad T_{r\theta} = T^*_{r\theta} \text{ при } r = a.$$

Соотношения (1) — уравнения динамики в напряжениях в приближении Стокса, уравнение неразрывности; (2) — реологическое уравнение состояния дисперсионной среды; (3) — граничные условия на бесконечности (невозмущенное течение — одноосное растяжение); (4) — граничные условия на поверхности частицы (непроницаемость поверхности, непрерывность на этой поверхности тангенциальной составляющей скорости и $T_{r\theta}$). Здесь $T_{ij}$ — тензор напряжений; $v_i$ — скорость; $p$ — давление; $\delta_{ij}$ — символ Кронекера; $E_{ij}$ — удвоенный тензор скоростей деформации; $\mu_1$, $\mu_3$ — коэффициенты вязкости и поперечной вязкости дисперсионной среды; $q$ — скорость растяжения; $p_\infty$ — давление в невозмущенном потоке; $x$, $y$, $z$; $r$, $\theta$, $\varphi$ — декартова и сферическая системы координат с началом в центре частицы; $a$ — радиус частицы; индекс * указывает, что данная величина берется из решения задачи о движении жидкости внутри частицы, т. е. одновременно с краевой задачей (1)—(4) необходимо решать задачу о движении ньютоновской жидкости внутри частицы, вызываемом исследуемым течением дисперсионной среды, и сшивать получаемые решения на поверхности раздела внешней и внутренней задач.

Пусть $\mu_1$ и $\mu_3$ являются постоянными, а безразмерный параметр $\varepsilon = (\mu_3/\mu_1)q \ll 1$. При этом ограничивается класс рассматриваемых дисперсных систем, но появляется возможность линеаризовать краевую задачу (1)—(4). Обтекание сферы однородным потоком жидкости Рейнера — Ривлина при принятых выше допущениях исследовано в [1, 2]. В [3] приведен ряд растворов полимеров, удовлетворяющих уравнению состояния (2) при постоянных $\mu_1$ и $\mu_3$.

Вводя функцию тока $\psi$, связанную с $v_r$ и $v_\theta$ соотношениями

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

и переходя к безразмерным величинам при следующих масштабах: $r \sim a$, $v_i \sim aq$, $E_{ij} \sim q$, $T_{ij} \sim \mu_1 q$, $p \sim p_\infty$, $\psi \sim a^3 q$, будем искать решение краевой задачи (1)—(4) в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \ldots, \tag{5}$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots,$$

Знак, указывающий на безразмерность величин в (5) и ниже, опущен.

В нулевом приближении получим краевую задачу, отвечающую обтеканию сферической капли потоком (3) ньютоновской жидкости с динамическим коэффициентом вязкости $\mu_1$, решение которой имеет вид

$$\psi_0 = (-r^3/2 + A + B/r^4)\sin^2\theta \cdot \cos\theta; \tag{6}$$

$$p_0 = 1 - (2A/r^3)(2 - 3\sin^2\theta), \tag{7}$$

где $A = (2 + 5\sigma)/4(1 + \sigma)$; $B = -3\sigma/4(1 + \sigma)$; $\sigma = \mu_*/\mu_1$; $\mu_*$ — динамический коэффициент вязкости материала частицы.

В первом приближении для внешней задачи получаем систему уравнений

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial E_{rr}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_{r\theta}^{(1)}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left(2E_{rr}^{(1)} - E_{\theta\theta}^{(1)} - E_{\varphi\varphi}^{(1)} + E_{r\theta}^{(1)}\operatorname{ctg}\theta\right) + \tag{8}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial r}\left(E_{rr}^{(0)2} + E_{r\theta}^{(0)2}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(E_{r\theta}^{(0)}E_{\varphi\varphi}^{(0)}\right) + \frac{1}{r}\left(2E_{rr}^{(0)2} + E_{r\theta}^{(0)2} -\right.$$
$$\left.- E_{\theta\theta}^{(0)2} - E_{\varphi\varphi}^{(0)2} - E_{r\theta}^{(0)}E_{\varphi\varphi}^{(0)}\operatorname{ctg}\theta\right),$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial\theta} = r\frac{\partial E_{r\theta}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial E_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial\theta} + 3E_{r\theta}^{(1)} + \left(E_{\theta\theta}^{(1)} - E_{\varphi\varphi}^{(1)}\right)\operatorname{ctg}\theta - r\frac{\partial}{\partial r}\left(E_{r\theta}^{(0)}E_{\varphi\varphi}^{(0)}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(E_{r\theta}^{(0)2} + E_{\theta\theta}^{(0)2}\right) - 3E_{r\theta}^{(0)}E_{\varphi\varphi}^{(0)} + \left(E_{r\theta}^{(0)2} + E_{\theta\theta}^{(0)2} - E_{\varphi\varphi}^{(0)2}\right)\operatorname{ctg}\theta.$$

Исключая в (8) $p_1$ и подставляя $E_{ij}^{(0)}$, подсчитанные на основании (6), приходим к следующей сопряженной задаче:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2\psi_1 = \left(\frac{576A^2}{r^7} + \frac{1920AB}{r^9}\right)\sin^2\theta\cos\theta - \tag{9}$$
$$- \left(\frac{720A^2}{r^7} + \frac{2160AB}{r^9}\right)\sin^4\theta\cos\theta;$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2\psi_1^* = 0; \tag{10}$$

$$\psi_1 < O(r^2), \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r} < O(r) \text{ при } r\to\infty, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_1^* = 0, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\partial\psi_1^*}{\partial r}; \tag{11}$$

$$\sigma r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_1^*}{\partial r}\right) = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right) - E_{r\theta}^{(0)}E_{\varphi\varphi}^{(0)}\sin\theta \text{ при } r = 1. \tag{12}$$

Будем искать решение задачи (9)—(12) в виде

$$\psi_1 = f_1(r)\sin^2\theta\cos\theta + f_2(r)\sin^4\theta\cos\theta,$$

$$\psi_1^* = f_1^*(r)\sin^2\theta\cos\theta + f_2^*(r)\sin^4\theta\cos\theta.$$

Получим для определения $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_1^*(r)$ и $f_2^*(r)$ следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} & f_1^{\mathrm{IV}} - \frac{12}{r^2} f_1'' + \frac{24}{r^3} f_1' + \frac{16}{r^2} f_2'' - \frac{32}{r^3} f_2' - \frac{160}{r^4} f_2 = \frac{576A^2}{r^7} + \frac{1920AB}{r^9}, \\ & f_2^{\mathrm{IV}} - \frac{40}{r^2} f_2'' + \frac{80}{r^3} f_2' + \frac{280}{r^4} f_2 = -\frac{720A^2}{r^7} - \frac{2160AB}{r^9}; \end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned} & f_1^{*\mathrm{IV}} - \frac{12}{r^2} f_1^{*''} + \frac{24}{r^3} f_1^{*'} + \frac{16}{r^2} f_2^{*''} - \frac{32}{r^3} f_2^{*'} - \frac{160}{r^4} f_2^* = 0, \\ & f_2^{*\mathrm{IV}} - \frac{40}{r^2} f_2^{*''} + \frac{80}{r^3} f_2^{*'} + \frac{280}{r^4} f_2^* = 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Решая уравнения (13), (14) при граничных условиях, переписанных для $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_1^*(r)$, $f_2^*(r)$ на основании (11), (12), найдем

$$\psi_1 = \left[C + \frac{1}{r^2} C_1 - \frac{4A^2}{r^3} + \frac{4AB}{r^5}\right] \sin^2\theta \cdot \cos\theta + \left[\frac{1}{r^2} C_2 + \frac{9A^2}{r^3} + \frac{1}{r^4} C_3 - \frac{6AB}{r^5}\right] \sin^4\theta \cdot \cos\theta, \tag{15}$$

где

$$C = \frac{-10A\sigma(A - 3B) - 16A^2 + 60AB + 15B + 20B^2}{5(1 + \sigma)};$$

$C_i$ — известные функции $\sigma$.

Решая уравнения (8) при граничном условии $p_1 = 0$ при $r \to \infty$, получим

$$p_1 = \frac{4(5A - C) - 6(17A - C)\sin^2\theta + 90A\sin^4\theta}{r^3}, \tag{16}$$

где сохранены члены, обеспечивающие определение реологических характеристик суспензии с точностью до величин порядка объемной концентрации взвешенных частиц.

На основании полученного решения (6), (7), (15), (16) определим диссипацию механической энергии в объеме дисперсионной среды, ограниченном поверхностью частицы и сферической поверхностью $\sigma_0$ радиуса $R \gg r$, через мощность поверхностных сил, приложенных к этой поверхности

$$W = \int_{\sigma_0} (P_{rr}v_r + P_{r\theta}v_\theta)\, d\sigma. \tag{17}$$

Здесь и ниже все величины записаны в размерной форме.

Диссипация механической энергии в выделенном элементе среды, отнесенная к его объему $\tau$, определенная с точностью до величин порядка объемной концентрации взвешенных частиц, имеет вид

$$W = \frac{w}{\tau} = 3\mu_1 q^2\left(1 + \frac{2}{5}A\Phi\right) + 3\mu_3 q^3\left[1 - \frac{2}{5}(A - C)\Phi\right], \tag{18}$$

где $\Phi$ — объемная концентрация взвешенных частиц.

Поскольку рассматриваемая суспензия является разбавленной, взвешенные частицы сферические, а при $\varepsilon \ll 1$ дисперсионная среда по своим свойствам мало отличается от ньютоновской жидкости (или скорость деформации мала), будем предполагать, что реологическое уравнение состояния суспензии имеет вид

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_{1\text{эф}}E_{ij} + \mu_{3\,\text{эф}}E_{ik}E_{kj}, \tag{19}$$

где $\mu_{1\,\text{эф}}$, $\mu_{3\,\text{эф}}$ — подлежащие определению коэффициенты вязкости и поперечной вязкости суспензии.

Тогда $W$ можно определить через мощность внутренних сил следующим образом:

$$W = \frac{1}{2}\overline{T}_{ij}\overline{E}_{ij},$$

где $\overline{T}_{ij}$ и $\overline{E}_{ij}$ — тензор напряжений (19) и удвоенный тензор скоростей деформации, осредненные по объему выделенного элемента исследуемой среды.

Компоненты тензора $\overline{E}_{ij}$, определяемые с принятой в (18) точностью, соответственно равны

$$\overline{E}_{xx} = \overline{E}_{yy} = \frac{2}{\tau}\int\limits_{\tau}\frac{\partial v_x}{\partial x}\,d\tau = \frac{2}{\tau}\int\limits_{\sigma} v_x\frac{x}{r}\,d\sigma = -q\left(1 - \frac{4A}{5}\Phi - \frac{4C}{5}\frac{\mu_3}{\mu_1}q\Phi\right),$$

$$\overline{E}_{zz} = 2q\left(1 - \frac{4A}{5}\Phi - \frac{4C}{5}\frac{\mu_3}{\mu_1}q\Phi\right);\quad \overline{E}_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\mu_{1\text{эф}}\overline{E}_{ij}\overline{E}_{ij} + \frac{1}{2}\mu_{3\text{эф}}\overline{E}_{ik}\overline{E}_{kj}\overline{E}_{ij} = \\ &= 3\mu_{1\text{эф}}q^2\left(1 - \frac{8A}{5}\Phi - \frac{8C}{5}\frac{\mu_3}{\mu_1}q\Phi\right) + 3\mu_{3\text{эф}}q^3\left(1 - \frac{12A}{5}\Phi\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Сравнивая (18) с (20), находим $\mu_{1\text{эф}}$ и $\mu_{3\,\text{эф}}$, реологическое уравнение состояния суспензии (19) при этом принимает вид

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_1(1 + 2A\Phi)E_{ij} + \mu_3[1 + 2(A + C)\Phi]E_{ik}E_{kj}. \tag{21}$$

Рассмотрим предельный случай $\sigma \to \infty$, соответствующий разбавленной суспензии жестких сферических частиц. Получим

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_1(1 + 2{,}5\Phi)E_{ij} + \mu_3(1 - 15\Phi)E_{ik}E_{kj}. \tag{22}$$

В предельном случае $\sigma \to 0$ получим реологическое уравнение состояния разбавленной суспензии газовых пузырьков

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_1(1 + \Phi)E_{ij} + \mu_3(1 - 0{,}6\Phi)E_{ik}E_{kj}. \tag{23}$$

Таким образом, разбавленные суспензии жестких, жидких и газообразных сферических частиц с неньютоновской дисперсионной средой, являющейся обобщенной жидкостью Рейнера — Ривлина с постоянными коэффициентами вязкости и поперечной вязкости при $\varepsilon \ll 1$ (малое отличие дисперсионной среды от ньютоновской жидкости или малая скорость деформации), сами являются жидкостью Рейнера — Ривлина с коэффициентами вязкости и поперечной вязкости, зависящими от объемной концентрации взвешенных частиц и отношения вязкости материала частицы к вязкости дисперсионной среды.

Рассматриваемая в статье ситуация мало отличается от случая Эйнштейна, поэтому коэффициент 15 (формула (22)) стоит при $\Phi < 0{,}02$. Факт заметного уменьшения коэффициента поперечной вязкости при добавлении в упруговязкую жидкость дисперсной фазы известен и используется на практике.

При $\mu_2 = 0$ полученные уравнения состояния (21)—(23) дают классические результаты механики разбавленных суспензий сферических частиц с дисперсионной средой, являющейся ньютоновской жидкостью.

Из полученных уравнений состояния следует, что добавление в жидкость Рейнера — Ривлина дисперсной фазы при малой концентрации последней приводит к уменьшению коэффициента поперечной вязкости, т. е. к уменьшению ее неньютоновских свойств. Действительно, $\mu_{3\,\text{эф}}$ можно записать в виде

$$\mu_{3\,\text{эф}} = \mu_3[1 - \nu(\sigma)\Phi],$$

при этом $\nu(\sigma)$ меняется в пределах $0{,}6 \leqslant \nu(\sigma) \leqslant 15$. Максимальное $\nu$ отвечает случаю твердых частиц, минимальное — случаю газовых пузырьков.

*Поступила 8 VI 1977*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rathna S. L.** Slow motion of non-newtonian liquid past a sphere.— «Quart. J. Mech. and Applied Math.», 1962, vol. 15, p. 427.
2. **Foster R. D., Slattery J. C.** Creeping flow past a sphere of a Reiner-Rivling fluid.— «Appl. Scient. Res.», 1963, vol. A—12, p. 213.
3. **Kato M., Tachibana M., Oikava K.** On the drag of a sphere in polymer solutions.— «Bull. JSME», 1972, vol. 12, p. 1556.

---

УДК 532.517.4 : 532.695

# ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛОТНЫХ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЭМУЛЬСИЙ В ТРУБАХ

*В. Ф. Медведев*

*(Грозный)*

Неустойчивые эмульсии имеют место в ряде важных технологических процессов, например: жидкостная экстракция при нефтепереработке, внутритрубная деэмульсация при нефтедобыче и др. Отличие гидродинамического поведения неустойчивых эмульсий от однофазных жидкостей проявляется в эффекте гашения турбулентных пульсаций дисперсионной среды каплями дисперсной фазы, размер которых превышает внутренний масштаб турбулентных пульсаций [1]. Турбулентное течение разбавленных неустойчивых эмульсий описано в [2].

В области содержания дисперсной фазы $0{,}524 \leqslant \beta \leqslant 0{,}741$ (при $\beta = 0{,}741$ происходит инверсия фаз неустойчивой эмульсии) эмульсия имеет плотную упаковку капель и при ее сдвиге требуется дополнительное напряжение на деформацию капель [3]:

$$\tau_0 = (0{,}195\beta - 0{,}102)\sigma/d, \quad 0{,}524 \leqslant \beta \leqslant 0{,}741,$$