ПМТФ, № 1, 1975

УДК 532.517.2

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ НЕИЗОТЕРМИЧНОСТИ НА ТЕПЛООТДАЧУ В КАНАЛАХ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ ТЕКУЧЕСТИ

В. И. Попов

(Новосибирск)

Рассматривается неизотермический теплообмен при ламинарном течении жидкостей с линейным законом текучести в термическом начальном участке каналов. Расчет для условия t_ω—const учитывает влияние температуры на нулевую текучесть и коэффициент нестабильности структуры при зависимости теплопроводности (диффузии) от напряжения сдвига.

Вопрос о влиянии неизотермичности потока на локальные характеристики теплообмена при течении неньютоновских жидкостей на начальном участке каналов представляется очень сложным. Ввиду нелинейности исходных уравнений оценки влияния неизотермичности основываются на результатах численного расчета [1]. Целесообразно иметь формулы, пусть приближенные, в явном виде отражающие явление.

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы учесть зависимость влияния текучести (обратная величина вязкости $\mu = \frac{1}{\varphi}$) от температуры и касательного напряжения сдвига (τ) на основные динамические и тепловые характеристики ламинарного потока в термическом начальном участке каналов. При этом задаются установившийся профиль скорости на входе в канал и постоянная температура стенки по его длине. Также предполагается, что числа Прандтля рассматриваемых жидкостей намного больше единицы, а их коэффициент теплопроводности может зависеть от τ. Приводимые ниже выкладки остаются в силе при изучении явлений в диффузионном начальном участке каналов. В этом случае текучесть ставится в зависимость от τ и концентрации вещества.

Расчет проводится для реологических (включая случай обычных $\theta \approx 0$) жидкостей, подчиняющихся линейному закону текучести [2]

$$-\frac{\dot{W}}{\tau} = \varphi(\tau, t) = \varphi_0(t) \pm \Theta(t)|\tau|, \tag{1}$$

где $\varphi_0 = \frac{1}{\mu_0}$ — текучесть при $\tau \to 0$, θ — коэффициент нестабильности структуры жидкости с возрастающей (убывающей) текучестью, τ — касательное напряжение сдвига, $\dot{W} = \frac{\partial \omega_x}{\partial r}$ — градиент скорости, t — температура жидкости, r — радиус трубы.

Данные [3,4] говорят о небольшом ($10 \div 30\%$) влиянии скорости сдвига на процессы теплопроводности. Однако есть основания полагать [5], что на диффузионные явления, связанные с переносом массы вещества, скорость сдвига может оказывать более существенное влияние.

Для небольших значений τ можно принять следующее интерполяционное соотношение для коэффициента теплосопротивления (или диффузии) [6]:

$$\lambda^{-1}(\tau) = \lambda_0^{-1}[1 - \lambda_0 n_\lambda |\tau|], \tag{2}$$

где λ_0^{-1} — коэффициент теплосопротивления при $\tau \to 0$.

Для решения задачи к соотношениям (1) — (2) с известными оценками и допущениями [1] в безразмерной форме присоединяются неизотермическое условие равновесия

$$\frac{1}{1-Y}\frac{\partial}{\partial Y}\left[(1-Y)\frac{1}{\tilde{\varphi}}\frac{\partial W_X}{\partial Y}\right] = f(X),$$

$$f(X) = \int_0^1 \left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial X}\frac{\mathrm{Re}_{00}}{2} + \frac{\mathrm{Re}_{00}}{2}\left(W_X\frac{\partial W_X}{\partial X} + W_Y\frac{\partial W_X}{\partial Y}\right) - \right. \tag{3}$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{\tilde{\varphi}}\frac{\partial W_X}{\partial X}\right) - \frac{\partial \tilde{\varphi}^{-1}}{\partial X}\frac{\partial W_X}{\partial X} - \frac{d\tilde{\varphi}^{-1}}{\partial Y}\frac{\partial W_Y}{\partial X}\right] dY,$$

$$\left(\frac{1}{\tilde{\varphi}}\frac{\partial W_X}{\partial Y} = \tau^{XY}\right),$$

условие неразрывности

$$\frac{\partial W_X}{\partial X} + \frac{1}{1-Y}\frac{\partial}{\partial Y}[(1-Y)W_Y] = 0, \tag{4}$$

постоянства расхода

$$\int_0^1 W_X(1-Y)\,dY = -0{,}5, \tag{5}$$

а также уравнение для тепло- и массопереноса

$$0{,}5\,\mathrm{Pe}_0\left(W_X\frac{\partial \upsilon}{\partial X} + W_Y\frac{\partial \upsilon}{\partial Y}\right) = \frac{1}{1-Y}\frac{\partial}{\partial Y}\left[(1-Y)\tilde{\lambda}^{-1}(\tau)\frac{\partial \upsilon}{\partial Y}\right]. \tag{6}$$

В выражении (6) под υ подразумевается безразмерная температура или концентрация вещества, а $\lambda(\tau)$ — соответственно коэффициент теплопроводности или диффузии.

Здесь $Y \equiv \frac{y}{R} = 1 - \frac{r}{R}$, $X = \frac{x}{R}$, $W_{X,Y} = \frac{\omega_{x,y}}{\langle\omega\rangle}$, $\upsilon = \frac{t - t_0}{t_\omega - t_0}$, $\mathrm{Pe}_0 = \frac{\langle\omega\rangle 2R}{a_0}$, $\mathrm{Re}_{00} = \langle\omega\rangle \rho\varphi_{00} 2R$, $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_{00}}$, $\tilde{P} = \frac{P}{\rho\langle\omega^2\rangle}$, $\tilde{\lambda}(\tilde{\tau}) = \frac{\lambda_0}{\lambda(\tau)}$.

Для удобства обозначим $\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\tau_\omega}$, $\Delta = \frac{y_T}{R}$, $K = \lambda_0 n_\lambda |\tau_\omega|$, где Δ —безразмерная толщина теплового (диффузионного) пограничного слоя, τ_ω — напряжение сдвига на стенке канала, φ_{00}, θ_0 — соответствуют t_0 (температуре на выходе).

В настоящее время наиболее распространены расчеты теплообмена интегральным методом. В данной работе решение дифференциальной системы уравнений (1) — (6) для граничного условия t_ω — const определяется методом последовательных приближений.

В первом приближении рассмотрим случай $\omega_y \ll \omega_x$. Как следствие этого приближения $\frac{\partial \omega_X}{\partial x} \approx 0$, $p \neq f(y)$. Из соотношения (3) видно, что

$$\tilde{\tau}=1-Y.$$

В этом случае выражение для τ_ω известно [2]

$$\tau_\omega = \frac{5}{8}\frac{\varphi_0}{\Theta}\left[\left(1+\frac{128\beta}{5\,\mathrm{Re}_0}\right)^{0,5}-1\right],\quad \beta = \frac{\Theta}{\varphi_0}\rho\langle\omega\rangle^2.$$

Следовательно,

$$\tilde{\lambda}(Y)=1-K(1-Y).$$

Приравнивая левую часть выражения (6) некоторой постоянной, с учетом того, что $\frac{\partial \upsilon}{\partial Y}=0$, $\upsilon = 0$ при $1-Y=0$ и $\upsilon=1$ при $Y=0$, находим

$$\upsilon = \left(1-\frac{2}{3}K\right)^{-1}\left[(1-Y)^2-\frac{2}{3}K(1-Y)^3\right]. \tag{7}$$

Полагая, что в умеренно широком температурном интервале применима двучленная зависимость вида

$$\tilde{\varphi}_0 \equiv \frac{\varphi_0(\upsilon)}{\varphi_{00}} = 1+\psi\upsilon,\ \text{где}\ \psi = \frac{\varphi_{0\omega}}{\varphi_{00}}-1,$$

$$\tilde{\Theta} \equiv \frac{\Theta(\upsilon)}{\Theta_0} = 1+\Omega\upsilon,\ \text{где}\ \Omega = \frac{\Theta_\omega}{\Theta_0}-1,$$

в соответствии с (1) имеем

$$\tilde{\varphi}(\upsilon,\tilde{\tau}) \equiv \frac{\varphi(\upsilon,\tilde{\tau})}{\varphi_{00}} = 1+\psi\upsilon+i_0(1+\Omega\upsilon)|\tilde{\tau}|,\quad \left(i_0=\frac{\Theta_0}{\varphi_{00}}\tau_\omega\right). \tag{8}$$

Случай $\frac{\varphi_{0\omega}}{\varphi_{00}}>1$ и $\frac{\Theta_\omega}{\Theta_0}>1$ соответствует нагреванию, $\frac{\varphi_{0\omega}}{\varphi_{00}}<1$ и $\frac{\Theta_\omega}{\Theta_0}<1$ — — охлаждению жидкости.

При обычных граничных условиях выражение для безразмерной скорости по сечению канала с учетом (3) и (5) имеет вид

$$W_X(X,Y) = 0,5\int_0^Y \tilde{\varphi}(\upsilon,\tilde{\tau})(1-Y)\,dY\left\{\int_0^1(1-Y)\left[\int_0^Y\tilde{\varphi}(\upsilon,\tilde{\tau})\times(1-Y)\,dY\right]dY\right\}^{-1}. \tag{9}$$

Неньютоновские жидкости характеризуются значительными числами Прандтля (σ), Шмидта (Sc), т. е. в них динамические возмущения распространяются интенсивнее тепловых (диффузионных). Поэтому в условиях задачи для коротких каналов важны лишь такие значения Y, которые намного меньше высоты канала.

Подставляя (8) с учетом (7) в (9) и пренебрегая (ввиду малости) членами, содержащими Y в степени выше первой, получим выражение для безразмерной скорости, действительной для пристенной области

$$W_\omega(Y)=PY,$$

$$P=4[1+\psi+i_0(1+\Omega)]\,[1+m\psi+i_0(0,8+\Omega n)]^{-1}, \tag{10}$$

$$m=\frac{\frac{1}{6}-\frac{2}{21}K}{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}K},\quad n=\frac{\frac{1}{7}-\frac{1}{12}K}{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}K}.$$

В связи с малостью толщины теплового пограничного слоя ($\Delta \ll 1$), когда в его пределах величина Y пренебрежимо мала по сравнению с единицей, в соответствии с (6), уравнение для распределения температуры вблизи стенки можно записать

$$0{,}5\,\mathrm{Pe}\,(1-\mathrm{K})\,Y\frac{\partial \upsilon}{\partial X}=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial Y^2}.$$

Величина K определяется через $\tau_\omega=\frac{1}{\tau_\omega}\frac{\partial \omega_X}{\partial y}\Big|_{y=0}$ в соответствии с (10).

Таким образом, цилиндрический тепловой пограничный слой заменен здесь плоским, что при его малой толщине вполне допустимо.

Автомодельная переменная

$$\eta=Y\left(\frac{9X}{L}\right)^{-1/3},\quad L=0{,}5\,\mathrm{Pe}_0\,P\,(1-K)$$

сводит его к обыкновенному (штрих-производная по η)

$$\upsilon''+3\eta^2\upsilon'=0,$$

решение которого для граничных условий

$$\upsilon=1 \text{ при } Y=0,\quad \upsilon=0 \text{ при } X=0$$

имеет вид

$$\upsilon=1-1{,}12\int_0^\eta \exp(-\eta^3)\,d\eta\approx 1-G(X)\,Y,$$

$$G(X)=1{,}12\left(\frac{9X}{L}\right)^{-1/3}.$$

Отсюда можно получить выражение для толщины теплового пограничного слоя

(11) $$\Delta\approx-\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial Y}\Big|_{Y=0}\right)^{-1}=0{,}893\left(\frac{9X}{L}\right)^{1/3}.$$

Применим в уравнении (9) Δ

(12) $$W_X(X,Y)=0{,}5\int_0^Y\tilde\varphi(\upsilon,\tilde\tau)(1-Y)\,dY\left\{\int_0^\Delta(1-Y)\left[\int_0^Y\tilde\varphi(\upsilon,\tilde\tau)\times\right.\right.$$
$$\left.\times(1-Y)\,dY\right]dY+\int_\Delta^1(1-Y)\left[\int_0^\Delta\tilde\varphi(\upsilon,\tilde\tau)(1-Y)\,dY+\right.$$
$$\left.\left.+\int_\Delta^Y\tilde\varphi(\tilde\tau)(1-Y)\,dY\right]dY\right\}^{-1}.$$

Здесь $\tilde\varphi(\tilde\tau,\upsilon)$ вводится с учетом второго приближения для температурного профиля

$$\tilde\varphi(\tilde\upsilon,\tau)=1+\psi(1-G(x)Y)+i_0[1+\Omega(1-G(X)Y)](1-Y).$$

Интегрируя (12) и в окончательном выражении для $W_x(X,Y)$ пренебрегая (ввиду малости) членами, содержащими Y в степени выше первой, получим

$$W_x(X,\ Y)=B_1(X)\,Y,$$

(13) $$B_1(X)=[1+\psi+i_0(1+\Omega)]\,[\Delta(\psi+\Omega i_0)+0{,}25i_0]^{-1}.$$

Учитывая, что тепловой пограничный слой плоский, из условия неразрывности находим

$$W_Y=-\int\limits_0^Y\frac{\partial W_X}{\partial X}\,dY=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial B_1(X)}{\partial X}\,Y^2.$$

Таким образом, выражение (6) сводится к виду

(14) $$0{,}5\,\mathrm{Pe}_0(1-K)\left[B_1(X)\,Y\frac{\partial\upsilon}{\partial X}-0{,}5\frac{\partial B_1(X)}{\partial X}\,Y^2\frac{\partial\upsilon}{\partial Y}\right]=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial Y^2}.$$

Введением переменной [7]

$$\eta_1=Y\left[\exp(-S(X))\int\limits_0^X\exp(S(X))\,B(X)\,dX\right]^{-1/3},$$

$$S(X)=1{,}5\int\limits_0^X(B_1(X))^{-1}\frac{\partial B_1(X)}{\partial X}\,dX,$$

$$B(X)=0{,}5\ \mathrm{Pe}_0\ (1-K)\ B_1\ (X)$$

соотношение (14) преобразуется в обыкновенное (штрих-производная по η_1)

$$\upsilon''+\frac{1}{3}\eta_1^2\upsilon'=0,$$

решение которого при граничных условиях

$$\upsilon=1\ \text{для}\ Y=0,\quad \upsilon=0\ \text{для}\ X=0$$

имеет вид

(15) $$\upsilon=\int\limits_{\eta_1}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{9}\eta_1^3\right)d\eta_1\left(\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{9}\eta_1^3\right)d\eta_1\right)^{-1}.$$

Следовательно,

(16) $$\mathrm{Nu}_X=-2\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial Y}\right)_{Y=0}=-2\left[\exp(-S(X))\int\limits_0^X\exp(S(X))\times\right.$$

$$\left.\times B(X)\,dX\right]^{-1/3}\left.\frac{d\upsilon}{d\eta_1}\right|_{\eta_1=0}.$$

Дифференцируя (15) и вычисляя в (16) соответствующие интегралы находим выражение для локального числа Нуссельта

(17) $$\mathrm{Nu}_X=1{,}077\left(\chi\,\mathrm{Pe}_0\frac{d}{x}\right)^{1/3}f(z),$$

$$f(z)=\left\{\frac{3z^{1,5}}{(z-1)^3}\left[0{,}4\,(z^{2,5}-1)-\frac{4}{3}(z^{1,5}-1)+2\,(z^{0,5}-1)\right]\right\}^{-1/3},$$

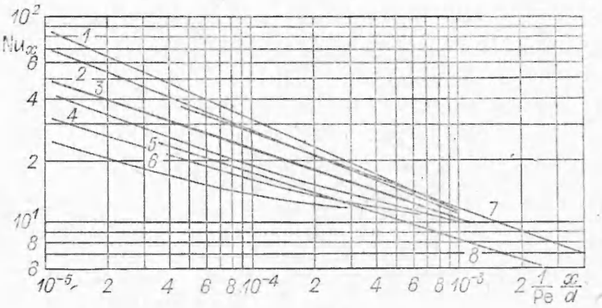
$$\chi=[1+\psi+i_0(1+\Omega)]\,(1-K)\,[1+0{,}8i_0]^{-1},$$

$$Z=1+\frac{7{,}42\,(\psi+\Omega i_0)}{1+0{,}8i_0}\left(\frac{1+m\psi+i_0(0{,}8+\Omega n)}{(1-K)\,[1+\psi+i_0(1+\Omega)]}\,\frac{1}{\mathrm{Pe}_0}\,\frac{x}{d}\right)^{1/3}.$$

В случае, когда $\psi=\Omega=K=0$

$$\lim_{Z\to1}f'''(Z)\to1,$$

имеет место известное выражение для изотермического течения структурно-вязких жидкостей [8], а дополнительно при $i_0=0$ — выражение для обычных ньютоновских жидкостей [1]. На фиг. 1 результаты аналитического расчета для обычных жидкостей ($i_0=K=0$) (кривые $2 - \frac{\varphi_\omega}{\varphi_0} = 2{,}5$; $5 - \frac{\varphi_\omega}{\varphi_0} = 0{,}25$; $W_Y \neq 0$) по формуле (17) сопоставляются для тех же условий с табличными данными численного расчета Янг-Ван-Цзу [9] (кривая $7 - \frac{\varphi_\omega}{\varphi_0} = 2{,}5$; $8 - \frac{\varphi_\omega}{\varphi_0} = 0{,}25$; $W_Y = 0$), полученными улучшенным интегральным методом.



Фиг. 1

Наклон кривых 2 и 5 несколько отличается от наклона кривых в работе [9], что, по-видимому, связано с вкладом поперечной составляющей скорости на теплоотдачу по мере нарастания теплового пограничного слоя. Кривые 1, 3, 4, 6 фиг. 1 соответствуют значениям $\frac{\varphi_\omega}{\varphi_0} = 12{,}8$; 1; 0,4; 0,1.

Критерий Нуссельта, определенный по данной методике без учета W_Y, имеет вид

$$\mathrm{Nu}_X = 1{,}077\left[\frac{1+\psi}{1+5{,}565\psi\left(\frac{1+0{,}666\psi}{1+\psi}\right)^{1/3}\left(\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{x}{a}\right)^{1/3}}\right]^{1/3}\cdot\left(\mathrm{Pe}\frac{d}{x}\right)^{1/3}.$$

Зависимость $\mathrm{Nu}_X = f\left(\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{x}{d}\right)$, построенная по этой формуле $\left(\frac{\varphi_\omega}{\varphi_0} = 2{,}5\right)$, совпадает с [9].

Совпадение результатов, полученных по данной методике, с результатами численного расчета [9], в котором учитывались нелинейные члены в аппроксимации профиля скорости, говорит об их незначительном влиянии на теплообмен в термическом участке каналов при гидродинамически стабилизированном потоке.

Заметное отклонение наблюдается при $\psi=9$, и в диапазоне $\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{x}{d} \approx \approx 10^{-3} \div 10^{-5}$ кривая располагается ниже в среднем на 3,5%. В соответствии с (13) выражение для коэффициента трения при движении жидкости в трубе принимает вид

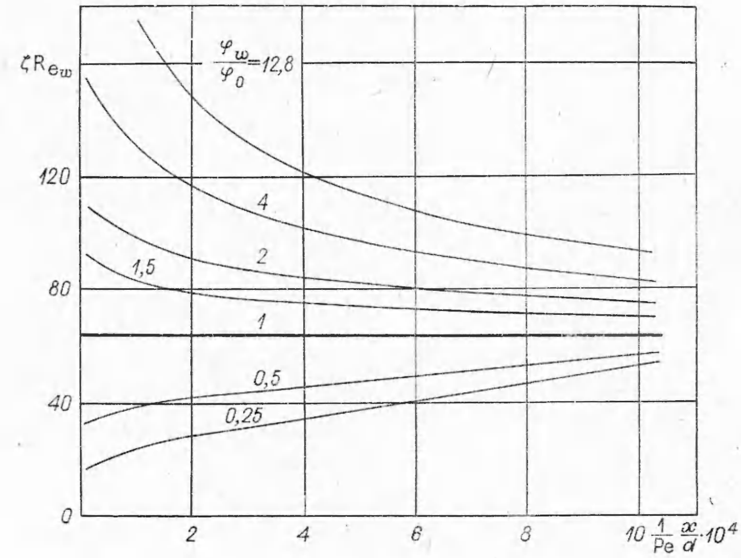
$$\zeta(X) = \frac{8}{\rho\langle\omega\rangle^2}\frac{1}{\varphi_\omega}\frac{\partial\omega_X}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{4(\Delta\psi+0{,}25)}{\beta_0(\Delta\Omega+0{,}2)}\left[\left(1+\frac{8\beta_0(\Delta\Omega+0{,}2)}{\mathrm{Re}_{00}(\Delta\psi+0{,}25)^2}\right)^{0{,}5}-1\right],$$

где Δ определено формулой (11).

Для обычных жидкостей ($\Theta=0$) при $K=0$

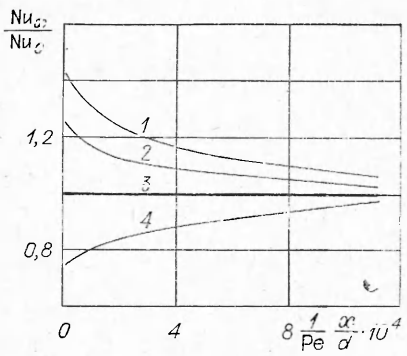
$$\lim_{\beta\to 0}\zeta'(X) = \frac{16}{\mathrm{Re}_0(\Delta\psi+0{,}25)} = \frac{64(1+\psi)}{\mathrm{Re}_\omega}\left[1+7{,}42\psi\left(\frac{1+\frac{2}{3}\psi}{1+\psi}\right)^{1/3}\left(\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{x}{d}\right)^{1/3}\right]^{-1}. \tag{18}$$

Результаты расчета по формуле (18) для случая нагревания ($\psi>0$) и охлаждения ($\psi<0$) жидкости изображены на фиг. 2. Особенность в решении при $\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{x}{d}\to 0$ объясняется скачкообразным изменением вязкости в передней точке начала обогрева.



Ф и г. 2

Таким образом, получены формулы, из которых непосредственно видны определяющие процесс комплексы. Распространенная оценка влияния неизотермичности на теплоотдачу и коэффициент гидравлического сопротивления только по одному параметру $\left(\frac{\mu_0}{\mu_\omega}\right)^n$ является неполной, необходимо учитывать при этом влияние режимного фактора $\left(\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{x}{d}\right)^m$. Величина $\left(\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{x}{d}\right)$ может вносить существенный вклад в функцию неизотермичности $f(Z)=\frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Nu}_0}$, где $\mathrm{Nu}_0=1{,}077\left(\mathrm{Pe}\frac{d}{x}\right)^{1/3}$. На фиг. 3 приведены результаты расчетов по формуле (17) для случая $\Theta=K=0$ (кривые *1—4* соответствуют значениям $\frac{\varphi_\omega}{\varphi_0}=9;\ 2{,}5;\ 1;\ 0{,}4$).



Ф и г. 3

Аналогичные по структуре выражения получаются при течении жидкости в плоской щели.

Поступила 19 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.
2. *Кутателадзе С. С.*, *Попов В. И.*, *Хабахпашева Е. М.* К гидродинамике жидкостей с переменной вязкостью. ПМТФ, 1966, № 1.
3. *Костылев Ю. В.*, *Чирков Ю. С.*, *Хабахпашева Е. М.* О зависимости коэффициента теплопроводности неньютоновских жидкостей от скорости сдвига. ИФЖ, 1968, т. 14, № 5.
4. *Смольский Б. М.*, *Шульман З. П.*, *Гориславец В. М.* Реодинамика и теплообмен нелинейно-вязкопластичных материалов. Минск, «Наука и техника», 1970.
5. *Цветков В. Н.*, *Эскин В. Е.*, *Френкель С. Я.* Структура макромолекул в растворах. М., «Наука», 1964.
6. *Лыков А. В.*, *Берковский Б. М.* Законы переноса в неньютоновских жидкостях. В сб. «Тепло- и массообмен в неньютоновских жидкостях». М., «Энергия», 1968.
7. *Швец М. Е.* О решении одной задачи для уравнений параболического типа. ПММ, 1954, т. 18, сер. 243.
8. *Попов В. И.*, *Хабахпашева Е. М.* Расчет теплообмена при ламинарном течении в трубах жидкостей со структурной вязкостью. ПМТФ, 1966, № 3.
9. *Янг-Ван-Цзу.* Конвективный теплообмен при вынужденном ламинарном течении жидкостей в трубах в случае переменной вязкости. Теплопередача, 1962, т. 84, сер. 4.