

**ОЦЕНКА РАЗМЕРОВ ЗОНЫ РАДИАЛЬНЫХ ТРЕЩИН,
ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ КАМУФЛЕТНОМ ВЗРЫВЕ
ШНУРОВОГО ЗАРЯДА В ХРУПКОЙ СРЕДЕ**

П. А. МАРТЫНЮК, Е. Н. ШЕР

(Новосибирск)

В [1, 2] были предложены схема развития радиальной системы трещин, образующихся при взрыве шнурowego заряда в хрупкой среде, и метод расчета динамики таких трещин. При проведении оценочных расчетов в [2] использовалось квазистатическое решение задачи о напряженном состоянии упругой плоскости с радиальной системой разрезов, нагружаемой изнутри заданной нагрузкой.

При камуфлетном взрыве нагружающее давление продуктов детонации в полости заранее неизвестно и должно находиться совместно с определением движения среды и развития системы радиальных трещин.

В данной работе производится оценка максимальных размеров трещин, возникающих при камуфлетном взрыве шнурового заряда в хрупкой среде. При этом рассматриваются случаи, когда продукты детонации не проникают в трещины и когда такое проникание происходит. В расчетах учитывается влияние горного давления. Приводится сравнение теории с результатами экспериментальных взрывов в оргстекле.

1. Квазистатическая зонная модель камуфлетного взрыва шнурового заряда в хрупкой среде. Трудности решения динамических задач теории упругости с развивающимися разрезами заставляют обращаться к квазистатическому приближению [3].

Рассматривается конечная стадия развития камуфлетного взрыва шнурового заряда в хрупкой среде. В полости взрыва радиуса r_0 имеется некоторое давление продуктов детонации p . Вокруг полости взрыва расположена зона пластической деформации $r_0 < r < r_1$, где среда под действием давления во взрывной полости находится в пластическом или перемолотом (сыпучем) состоянии. Вне пластической зоны при $r_1 < r < l$ расположена система радиальных трещин, наиболее длинные из которых находятся в критическом равновесии.

Вдали от полости взрыва задано горное давление. Требуется рассчитать равновесное состояние такой конфигурации.

Данная постановка отличается от ранее принятой [3] отсутствием зоны «столбчатой» упругости. Здесь зона радиальных трещин вместе с остальным упругим пространством рассматривается вместе как одно целое. При таком подходе условие разрушения по предельному растягивающему напряжению, принятому для зоны «столбчатой» упругости, заменяется более обоснованным для хрупких сред условием предельного равновесия трещин. Для газов в полости взрыва принимаем закон аднабатического изменения давления в них.

При расчетах использовалась адиабата Джонса — Миллера [4] для тротилового цилиндрического заряда в виде

$$(1.1) \quad p(r_0) = \begin{cases} p_0 \left(\frac{r_0}{r_{00}} \right)^{-2\gamma_1}, & r_0 < r_0^*, \\ p_0 \left(\frac{r_0^*}{r_{00}} \right)^{-2\gamma_1} \left(\frac{r_0}{r_0^*} \right)^{-2\gamma_2}, & r_0 > r_0^*, \end{cases}$$

$$p_0 = 10^{10} \text{ Па}, \quad \gamma_1 = 3, \quad \gamma_2 = 1,27, \quad r_0^*/r_{00} = 1,89,$$

где r_{00} — начальный радиус заряда; r_0 — радиус полости.

Для описания напряженного состояния в пластической зоне, как и в [4], был принят закон Кулона $\tau = C - \sigma \operatorname{tg} \varphi$, где τ и σ — касательное и нормальное напряжения на площадке сдвига. В главных напряжениях оссимметричной задачи имеем

$$(1.2) \quad (1 + \beta)\sigma_\theta - \sigma_r - Y = 0,$$

$$Y = 2C \cos \varphi / (1 - \sin \varphi), \quad \beta = 2 \sin \varphi / (1 - \sin \varphi).$$

Используя уравнение равновесия

$$d\sigma_r/dr - (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0$$

и соотношение (1.2), для пластической зоны получаем

$$\sigma_r = Y/\beta + B/r^{\beta/(1+\beta)},$$

где B — произвольная константа. На внешней границе пластической зоны r_1 выполняется условие разрушения среды под действием одноосного сжатия $\sigma_r|_{r_1} = -\sigma_c$,

где σ_c — прочность на сжатие. Отсюда для распределения σ_r получаем

$$(1.3) \quad \sigma_r = Y/\beta - (Y/\beta - \sigma_c)(r_1/r)^{\beta/(1+\beta)}.$$

В пластической зоне материал предполагается несжимаемым:

$$(1.4) \quad r_0^2 - r_{00}^2 = r_1^2 - (r_1 - u_1)^2$$

(u_1 — радиальное смещение точек среды на границе пластической зоны). Здесь пре-
небрегаем эффектами дилатансии для упрощения задачи.

Система радиальных трещин начинается на круговой границе $r = r_1$. Радиальное напряжение на этой границе равно $(-\sigma_c)$. Расчет равновесного состояния системы проведем при следующих предположениях: а) максимальный размер в системе имеют n трещин; б) напряженное состояние этих трещин не зависит от присутствия остальных, более коротких; в) для расчета смещения границы u_1 применимы соотношения «столбчатой» зоны упругости, моделирующей систему радиальных трещин.

Для описания напряженного состояния вершин n наиболее длинных трещин можно воспользоваться данными [5]. В настоящей работе расчеты проводились с использованием следующей приближенной зависимости коэффициента интенсивности от параметров задачи. Для трещин, незначительно отошедших от границы пластической зоны, имеем [6]

$$(1.5) \quad K_I \approx 1,12\sigma_c \sqrt{\pi(l - r_1)},$$

где l — радиус, на котором находятся вершины трещин.

Для длинных трещин, согласно [7, 8],

$$(1.6) \quad K_I \approx \sigma_c r_1 \sqrt{\pi/l} - 2P\sqrt{\pi l}/\sqrt{n}.$$

Предполагается, что промежуточный случай длин описывается той из формул (1.5), (1.6), которая дает меньшее значение. Второй член в (1.6) учитывает внешнее горное давление P .

Для стыковки задачи на внешней границе зоны пластиичности необходимо определить средний размер смещения круговой границы системы радиальных трещин. Из предположения «в» следует, что среднее радиальное смещение среды на радиусе l составляет

$$u_l = \frac{1-v}{E} l \left[\frac{\sigma_c r_1}{l} - 2P(1-v) \right].$$

Предположение несжимаемости в зоне трещин при этом дает

$$u_1^H = \left(\frac{l}{r_1} \right) u_l.$$

Предположение «столбчатой» зоны:

$$u_1^C = u_l + \sigma_c r_1 (1-v^2) \ln(l/r_1).$$

Выбирая

$$(1.7) \quad u_1 = \min(u_1^H, u_1^C),$$

завершаем описание зоны радиальных трещин.

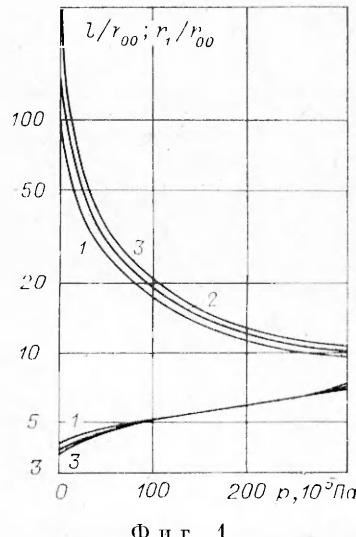
Совместное решение уравнений (1.1), (1.3) при $r = r_0$, (1.4)–(1.7) и $K_I = K_{Ic}$ позволяет найти равновесное значение r_0 , r_1 , l при заданных значениях параметров среды E , σ_c , K_{Ic} , v , C , φ , заряда r_{00} , P_0 , γ_1 , γ_2 , r_0^*/r_{00} и величины горного давления P .

Для примера приведем результаты расчета размера зоны пластиичности r_1 и длины трещин l в оргстекле от взрыва шнурового заряда при разных значениях внешнего давления P .

Для оргстекла было принято: $E = 3 \cdot 10^9$ Па, $\sigma_c = 10^8$ Па, $K_{Ic} = 10^6$ Па·м^{1/2}, $v = 0,3$, $C = 0$, $\varphi = 30^\circ$.

Рассчитанные зависимости изображены на фиг. 1 кривыми 1–3 для шнурового заряда начального радиуса $r_{00} = 1; 2; 3$ мм соответственно. Из фиг. 1 видно, что размер радиальных трещин от взрыва монотонно убывает с ростом горного давления. Причем наиболее крутой спад в этой зависимости происходит в диапазоне сравнительно небольших для шахтных условий давлений (до $5 \cdot 10^6$ Па). Этим, возможно, объясняется значительный рост удельного расхода при буровзрывных работах в шахтах уже на небольшой глубине и при налгии одной или двух свободных поверхностей.

Другой особенностью фиг. 1 является нарушение закона геометрического подобия для размеров радиальных трещин при изменении радиуса заряда. Так, увеличение радиуса заряда приводит к росту рассчитанного отношения радиуса трещин к радиусу заряда.



Фиг. 1

128

Такое нарушение наиболее велико при отсутствии горного давления, но уже при давлении $> 5 \cdot 10^9$ Па оно малозаметно. Для рассчитанного размера зоны пластичности закон геометрического подобия соблюдается с хорошей точностью.

2. Учет влияния проникания газов в трещины на окончательный их размер при взрыве шнурового заряда в хрупкой среде. Как было показано в [9, 10], проникание газов — продуктов детонации — в трещины может быть заметным в ходе процесса разрушения среды от взрыва. Велико влияние этого фактора и на окончательный размер трещин.

Рассмотрим следующую модель завершающей стадии процесса роста трещин при разрушении от взрыва шнурового заряда взрывчатого вещества (ВВ). В плоскости имеются отверстие радиуса r_0 и выходящие из него n радиальных трещин длины l . Продукты взрыва заряда ВВ распространялись в трещины и производят на их берега и полость заряда давление p . Температура продуктов взрыва близка к температуре среды. Величина давления газов p может быть определена по объему полости и трещин с помощью газового закона, если известен объем газов — продуктов взрыва при нормальных условиях. Внешнее давление на бесконечности равно P .

Окончание процесса разрушения означает, что трещины находятся в предельном равновесии и коэффициент интенсивности поля напряжений в их вершинах равен критическому для остановки трещин. Такое добавочное условие позволяет найти, например, длину трещины, если остальные параметры задачи известны.

Приведем приближенное решение поставленной задачи. Найдем сначала величину давления газов p . Для этого оценим объем полости и трещин. Предположим, что на круге радиуса l , проходящем по вершинам трещин, действует радиальное напряжение величины p . Тогда среда внутри круга ($r < l$) оказывается скатой всесторонним давлением p . При этом в случае плоской деформации изменение объема породы внутри круга ($r < l$) равно

$$\Delta v_1/v_1 = (2p/E)(1 - 2v)(1 + v), \quad v_1 = \pi(l^2 - r_0^2).$$

Смещение окружности радиуса l под действием внутреннего давления p и внешнего давления P приводит к добавочному изменению объема внутри круга ($r < l$)

$$\Delta v_2 = -\pi l^2(1 - 2v)(1 + v)P/E + 2\pi(p - P)l^2(1 + v)/E.$$

Общее приращение объема газов из-за расширения полости и раскрытия трещин при $l \geq 3r_0$ оцениваем выражением

$$\Delta v = [4\pi l^2(1 - v^2)/E](p - P).$$

Отсюда, если объем газов — продуктов взрыва, приходящихся на единицу длины заряда, равен V_0 при нормальных условиях ($p = p_n$, $T = T_n$), то

$$p(\pi r_0^2 + \Delta v) = p_n V_0.$$

Решая это уравнение относительно p , получаем

$$(2.1) \quad \bar{p} = \left[A\bar{P}\bar{l}^2 - 1 + \sqrt{1 + A^2\bar{P}^2\bar{l}^4 + 2A(2\bar{p}_0 - \bar{P})\bar{l}^2} \right] / (2A\bar{l}^2).$$

Здесь $\bar{p} = p/E$, $\bar{P} = P/E$, $\bar{p}_0 = p_n V_0 / (\pi E r_0^2)$, $\bar{l} = l/r_0$, $A = 4(1 - v^2)$.

Для того чтобы найти значение коэффициента интенсивности в вершинах разреза, нагруженных изнутри давлением p (2.1) при наличии внешнего давления P , воспользуемся решением задачи Бестмана [8] о напряженном состоянии звезды n равных по длине разрезов, распределенных через одинаковые углы и находящихся под действием внутреннего давления.

Для нашей задачи, пренебрегая размером полости по сравнению с длиной разреза ($l - r_0$), имеем в случае предельного равновесия

$$K_I \approx (2\sqrt{\pi l/n})(p - P) = K_{Ic}$$

или в безразмерном виде

$$(2.2) \quad \bar{K}_{Ic} = 2 \sqrt{\frac{\pi \bar{l}}{n}} (\bar{p} - \bar{P}) = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \left(\frac{-1 - A\bar{P}\bar{l}^2 + \sqrt{1 + A^2\bar{P}^2\bar{l}^4 + 2A(2\bar{p}_0 - \bar{P})\bar{l}^2}}{A\bar{l}^{3/2}} \right),$$

где $K_{Ic} = K_{Ic}/(E\sqrt{r_0})$. Формула (2.2) связывает параметры заряда (V_0 , r_0), среды (P , K_{Ic} , E , v) с длиной l и числом трещин n .

Для $P = 0$ формула (2.2) упрощается:

$$(2.3) \quad \bar{K}_{Ic} = \sqrt{\frac{\pi}{nl}} \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4A\bar{p}_0\bar{l}^2}}{A\bar{l}} \right).$$

При $4A\bar{p}_0\bar{l}^2 \gg 1$ или, например, при $\bar{p}_0 \geq 10^{-2}$, $\bar{l} > 20$

$$(2.4) \quad \bar{K}_{Ic} \approx \sqrt{\frac{\pi}{nl}} \frac{2\sqrt{\bar{p}_0}}{\sqrt{A}}, \quad l \approx \frac{Ep_h V_0}{n K_{Ic}^2 (1 - v^2)}.$$

Результаты расчетов по формуле (2.3) при $n = 5$, $v = 0,3$ представлены на фиг. 2 в виде изолиний l/r_0 на плоскости $\bar{K}_{Ic} = K_{Ic}/(E\sqrt{r_0})$, $\bar{p}_0 = p_h V_0 / (\pi E r_0^2)$ в логарифмическом масштабе.

Влияние горного давления P на размер зоны разрушения можно проследить по фиг. 3, где для разных P представлены графики, построенные по (2.2) и связанные с \bar{K}_{Ic} с l/r_0 при $\bar{p}_0 = 10^{-2}$.

Проведенные расчеты позволяют для разных зарядов ВВ и в широком диапазоне свойств пород оценить максимальный размер трещин в случае, когда взрыв происходит в однородных по углу условиях и количество максимально длинных трещин близко к пяти.

Приближенные граничи изменения величин параметров задачи следующие. Модуль Юнга E для горных пород изменяется в пределах 10^9 — 10^{11} Па, коэффициент Пуассона $v = 0,2$ — $0,4$. В настоящее время имеется еще мало данных о величине критического коэффициента интенсивности K_{Ic} для горных пород. Приведем здесь результаты [11], согласно которым для песчаника и мрамора $K_{Ic} = 3 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. Величина горного давления в большинстве случаев изменяется от нуля до $5 \cdot 10^7$ Па. Газовыделение при взрывах промышленных ВВ составляет, согласно [12], 100 — 700 л/кг при нормальных условиях.

Произведем для примера расчет размеров трещин от взрыва шнурового заряда ПЖВ-20 с плотностью 1 г/см^3 , помещенного в скважину диаметром 80 мм, в песчанике, в условиях горного давления $P = 1,5 \cdot 10^7$ Па. Найдем величины безразмерных параметров при

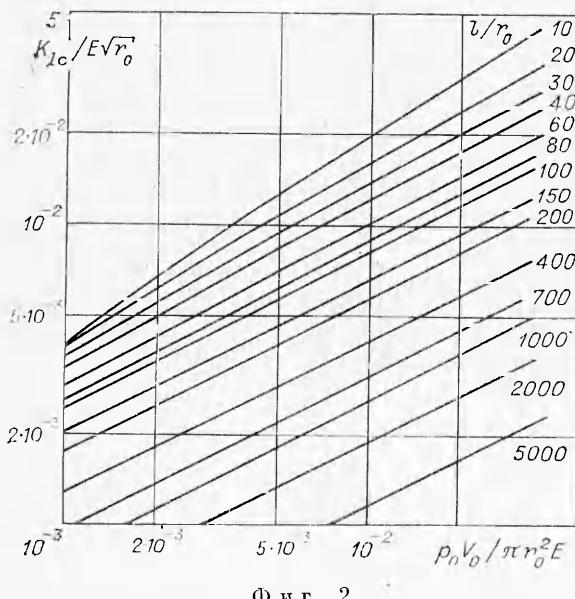
$$E = 3 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad p_h V_0 / (\pi r_0^2) = 3 \cdot 10^7 \text{ Па},$$

$$\bar{P} = P/E = 0,5 \cdot 10^{-3}, \quad \bar{K}_{Ic} = K_{Ic}/(E\sqrt{r_0}) = 5 \cdot 10^{-4},$$

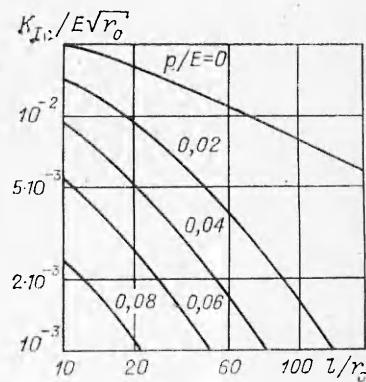
$$\bar{p}_0 = p_h V_0 / (\pi E r_0^2) = 10^{-3}.$$

Из уравнения (2.2) получаем $\bar{l} = 155$, $l = 6,2 \text{ м}$.

Для выяснения правдоподобности результатов приводимых оценок разрушения сравним их с данными по гладкому взрыванию. Практически разрыв массива песчаника можно получить подрывом ряда шпурков $\varnothing 40 \text{ мм}$ с расходом ВВ 40 г/м (4 шпурка ДП с забойкой песком). Расстояние между шпурками при этом должно быть $0,5 \text{ м}$. В данном случае $\bar{p}_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, $\bar{K}_{Ic} = 7 \cdot 10^{-4}$ из уравнения (2.2) $l = 160$, $r_0 = 3,2 \text{ м}$. Видно, что расчетные длины трещин много больше практически выбранного расстояния между шпурками. Это может объясняться тем, что приведенная теория дает завышенный для размеров трещин результат, так как в ней принято, что весь газ продуктов детонации работает в конечной фазе разрушения. В действительности часть газа в процессе разрушения может просочиться в массив, поглотиться им или просто утечь при выбивания забойки. Это обстоятельство очень сильно оказывается на окончательном размере тре-



Фиг. 2



Фиг. 3

Номер опыта	Расход q , мг/см	Толщина образца, мм	Забойка	\varnothing заряда, мм	Число трещин n	Радиус трещин l_n , мм	nl_n	$\frac{nl_n}{q}$
1	75	77	—	2,4	9—11	25	225—275	3—3,6
2	96,8	110	—	2,4	12—14 3	27 100	324—378 300	3,3—3,9
3	75	110	эпоксидная	2,4	10—12 4	30 70—90	300—360 280—360	4—4,8
4	102	110	—	2,8	8—9	60	480—540	4,7—5,3
5	108	19	—	2,8	16 8	15 25	240 200	2,2
6	67	220	эпоксидная	2,4	8—10 4	60 100	480—600 400	6—7,2
7	54	4,2	оргстекло	2	7	15	105	2

щин от взрыва. Учет указанных факторов, если они имеют место, может уточнить приведенные теоретические оценки.

Для выяснения степени влияния учета проникания газов в трещины при взрыве на их размеры были определены по nomogrammам фиг. 2 длины трещин для случая взрыва шнурового заряда тротила в оргстекле с параметрами, принятими при расчете фиг. 1 по схеме без проникания. Оказалось, что схема с прониканием газов дает для длин трещин значения, примерно в 2 раза больше, чем без проникания.

3. Экспериментальное определение параметров зоны радиальных трещин от взрыва удлиненного заряда ВВ в оргстекле. Взрывы производились в листовом оргстекле толщиной 4,2—220 мм. В качестве взрывчатого вещества использовался тэн. Заряд помещался в отверстие, просверленное в листе перпендикулярно его плоскости.

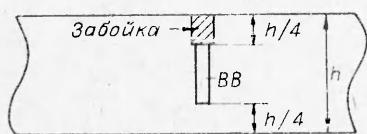
Типовое расположение заряда в листе при его толщине ≥ 70 мм изображено на фиг. 4. Подрыв заряда осуществлялся электроподжигом навески из азота свинца. Забивка производилась эпоксидной смолой, помещенной в канал с резьбой М5.

Трещины по их длине разбивались на группы: самые длинные, короче и т. д. Для каждой группы находился средний размер трещин в ней и число трещин, попавших в группу и имеющих еще большие длины.

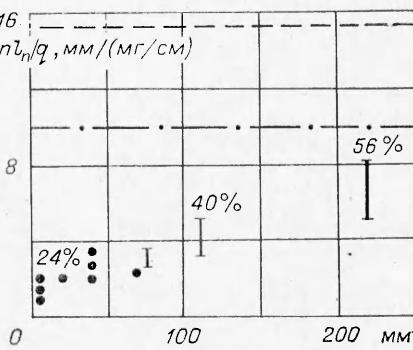
Все данные по экспериментам сведены в таблицу, где приведены значения произведения длии трещин и числа их, определенного по указанному выше способу (nl_n). Такое произведение согласно (2.4) для каждого взрыва является константой.

Из (2.4) следует, что при взрывании в одном материале и одной взрывчаткой константой должно быть произведение длины трещин на число их, деленное на погонный расход ВВ (nl_n/q). Эта величина также приводится в таблице. Изучение результатов отдельных взрывов подтверждает постоянство произведения nl_n для каждого взрыва. Данные по величине nl_n/q показаны на фиг. 5, откуда видно, что параметр nl_n/q с увеличением толщины пластины оргстекла монотонно растет. Это можно объяснить влиянием ухода продуктов взрыва из полости через боковые грани пластин. Естественно ожидать, что с увеличением толщины листа такое влияние становится слабее. Для сравнения полученных данных с теорией, изложенной выше, был проведен расчет параметров разрушения от взрыва заряда тэн диаметром 2,4 мм в оргстекле. Для оргстекла $E = 3 \cdot 10^9$ Па, $K_{Ic} = 1 \cdot 10^6$ Па·м $^{1/2}$. Газовыделение тэн 500 л/кг.

Расход ВВ 0,067 г/см. Из этих данных следует, что $\bar{K}_{Ic} = 10^{-2}$, $\bar{p}_0 = 0,025$ п, если газы продуктов детонации проходят в трещи-



Фиг. 4



Фиг. 5

ны, то согласно фиг. 2 для такого взрыва $l/r_0 = 180$; отсюда расчетное значение $nl_n/q = 16$.

Это значение на фиг. 5 представлено штриховой линией. Для нескольких взрывов было подсчитано количество газов, необходимое для обеспечения полученного в опыте разрушения. Такие данные приведены на фиг. 5 в виде процентов от количества газов, реально выделяемых зарядами, и являются вполне правдоподобными.

Другую оценку размера зоны радиальных трещин в экспериментах можно получить по модели п. 1, в которой предполагается, что продукты детонации заперты в полости взрыва и в трещины не проходят. В этом предположении согласно фиг. 1 от заряда диаметром 2,4 м в оргстекле получается пять трещин размером $115 r_0 = 138$ мм. Отсюда $nl_n/q = 10$. Это значение на фиг. 5 нанесено штрихпунктирной линией. видно, что к этому уровню экспериментальные данные подошли уже достаточно близко.

С дальнейшим увеличением толщины пластины можно ожидать выход экспериментальных данных и на верхнюю теоретическую асимптоту. Все это подтверждает теоретические оценки п. 1, 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шер Е. И. Оценка дробящего действия удлиненного заряда в хрупкой среде.— ФТПРПИ, 1975, № 1.
2. Шер Е. И. Пример расчета движения радиальных трещин, образующихся при взрыве в хрупкой среде в квазистатическом приближении.— ФТПРПИ, 1982, № 2.
3. Родионов В. П., Романев А. И. и др. Механический эффект подземного взрыва. М.: Недра, 1971.
4. Чедвик П., Кокс А., Гонкинсон Г. Механика глубинных подземных взрывов. М.: Мир, 1966.
5. Ouehterlony F. Fracture mechanics applied to rock blasting. Stockholm, 1973. (Rept./Swedish Detonic Res. Found.; DS 1973 : 29).
6. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
7. Шер Е. И. Об одном случае равновесия системы радиальных трещин.— ПМТФ, 1974, № 5.
8. Westman R. A. Pressurized star crack.— J. Math. and Phys., 1964, vol. 43, N 3.
9. Кузнецов В. М., Шацукевич А. Ф. О взаимодействии продуктов детонации со структурами взрывной полости в грунтах и горных породах.— ФГВ, 1977, т. 13, № 5.
10. Комир В. М., Кузнецов В. М., Шацукевич А. Ф. О влиянии газов — продуктов детонации — на разрушение горных пород взрывом.— ФТПРПИ, 1979, № 6.
11. Бобряков А. П., Покровский Г. И., Серпинников Б. И. Исследование процесса разрушения плоских образцов ударом.— В кн.: Вопросы механизма разрушения горных пород. Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1976.
12. Дубнов Л. В., Бахаревич П. С., Романов А. И. Промышленные взрывчатые вещества. М.: Недра, 1973.

Поступила 1/VI 1983 г.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВНЕДРЕНИЯ ЖЕСТКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКУЮ ПРЕГРАДУ

B. И. КОНДАУРОВ, И. Б. ПЕТРОВ, А. С. ХОЛОДОВ
(Москва)

Рассматривается осесимметричная задача проникания абсолютно жесткого тела вращения в деформируемую преграду конечной толщины. Реология материала преграды описывается уравнениями течения упругопластических тел. Важными особенностями таких задач являются ярко выраженный волновой характер решения и большие деформации, испытываемые преградой. Экспериментальному исследованию задачи проникания посвящено большое количество работ, на основе которых изучено влияние разнообразных определяющих задача параметров и наблюдаемых эффектов и построены различные приближенные методы расчета процессов внедрения. Однако наиболее детальная картина процессов взаимодействия ударников с деформируемыми преградами может быть получена лишь с помощью численного решения подобных задач на основе различных реологических моделей и последующего сопоставления с результатами экспериментов для уточнения математической модели.

Сложный характер этих задач представляет весьма жесткие требования к выбору численного метода их решения, выбору независимых переменных и т. п. В частности, для больших глубин внедрения использование традиционных лагранжевых переменных приводит к сильному искажению (а часто и к нарушению регулярности)