ПМТФ, № 1, 1963

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. М. Елеонский, В. М. Жданов

(*Свердловск*)

Последовательный кинетический подход к решению задачи о поведении ионизованного газа во внешнем поле, рассмотренный Б. И. Давыдовым [1] и развитый в работах В. Л. Гинзбурга и А. В. Гуревича [2], приводит к необходимости анализа цепочки связанных кинетических уравнений для парциальных функций распределения $f_{(k)}$, возникающих при разложении вида

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = f_0 + \frac{v_\alpha}{v} f_\alpha^{(1)} + \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} f_{\alpha\beta}^{(2)} + \ldots \tag{1}$$

В общем случае анализ такой системы сложен.

В рассматриваемом ниже приближении, которое является по существу обобщением метода моментов, кинетический подход используется для определения функции распределения основного состояния f_0, а отклонения от основного состояния исследуются в гидродинамическом приближении. В методе моментов решение кинетического уравнения ищется, как известно, в виде разложения по тензорным полиномам, построенным на фундаментальной последовательности тензоров $1,\ v_\alpha\ v_\alpha,\ v_\beta,\ v_\alpha v_\beta v_\gamma\ ,\ldots,$ причем за основное состояние принимается обычно либо стационарное решение при нулевом внешнем поле (т. е. решение, обращающее в нуль интеграл столкновений), либо решение бесстолкновительного кинетического уравнения [3-4]. При этом структура разложения и тип полиномов однозначно определяются процессом ортогонализации фундаментальной последовательности с весовой функцией, определяемой видом функции распределения основного состояния. Примером может служить разложение по тензорным полиномам Эрмита, возникающее, когда за основное состояние принимается максвелловская функция распределения [3].

В настоящем сообщении в основу рассмотрения положено разложение вида

$$f = \left\{1 + a_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha} + a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} + a_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^3}{\partial v_\alpha \partial v_\beta \partial v_\gamma} + \ldots\right\} f_0 \tag{2}$$

Коэффициенты этого разложения выражаются через моменты функции распределения, причем первые моменты соответствуют плотности, средней скорости, тензору напряжений и тепловому потоку частиц. Удержание лишь первых нескольких моментов в разложении соответствует фактически гидродинамическому приближению при решении кинетического уравнения, так как указанные выше переменные определяют гидродинамическое поведение системы. Моменты удовлетворяют замкнутой системе уравнений, в которые, помимо гидродинамических переменных, входят времена релаксации этих переменных, определенные на функции распределения основного состояния f_0. Для последней находится уравнение, являющееся прямым следствием исходного кинетического уравнения и принятой формы разложения для f. При этом система уравнений для моментов и уравнение для f_0 являются самосогласованными, ибо не только времена релаксации определены на функции основного состояния, но и сама функция распределения f_0 выражается через гидродинамические переменные системы.

Такой подход к решению кинетического уравнения позволяет развить последовательное гидродинамическое приближение для ионизованного газа, находящегося в сильном внешнем поле, когда функция распределения основного состояния может быть отличной от максвелловской.

Будем предполагать, что функция распределения основного состояния зависит только от модуля скорости частиц. Ограничимся в разложении (2) конечным числом членов, положив $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ и сохранив для $a_{\alpha\beta\gamma}$ только свернутые по двум индексам компоненты тензора. Выполняя при этих условиях ортогонализацию разложения (2), находим, что

$$f = \left\{1 - u_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\pi_{\alpha\beta}}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} - \frac{1}{5}\frac{h_\alpha}{\rho}\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\Delta\right\} f_0 \tag{3}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, а плотность ρ, средняя скорость $\mathbf{u}$, недиагональная часть тензора напряжения $\pi_{\alpha\beta}$ и относительный тепловой поток $\mathbf{h}$ определены соотношениями

$$\rho = m\int f d\mathbf{v} = m\int f_0 d\mathbf{v}, \qquad \rho\mathbf{u} = m\int \mathbf{v} f d\mathbf{v} \quad (m \text{ — масса частицы})$$

$$\pi_{\alpha\beta} = m\int\left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{3}v^2\delta_{\alpha\beta}\right) f d\mathbf{v} = P_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta} \tag{4}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{q} - \frac{5}{2}p\mathbf{u}, \qquad \mathbf{q} = \frac{1}{2}m\int \mathbf{v}v^2 f d\mathbf{v}, \qquad p = \frac{1}{3}m\int v^2 f_0 d\mathbf{v}$$

Нетрудно убедиться, что если f_0 является максвелловской функцией распределения, то (3) тождественно известному разложению функции распределения в методе моментов, а именно «13-моментному» разложению Грэда [3]. Рассмотрим кинетическое уравнение для электронов в частично ионизованном газе в пренебрежении электрон-электронными столкновениями (влияние последних будет обсуждено позже)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m}\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \iint (f'F' - fF)\, g\sigma(g, \chi)\, d\Omega\, d\mathbf{V} \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — внешнее электрическое поле, $g = |\mathbf{v} - \mathbf{V}|$ — относительная скорость, $\sigma(g, \chi)$ — дифференциальное эффективное сечение рассеяния, $F(\mathbf{V})$ — функция распределения тяжелых частиц (молекул или ионов). Интегрирование в (5) проводится по скоростям тяжелых частиц $d\mathbf{V}$ и по углам рассеяния $d\Omega = \sin\chi d\chi d\varepsilon$. Рассмотрим только упругие соударения.

Для электрон-ионных взаимодействий можно использовать фоккер-планковское приближение для интеграла столкновений. В этом случае правая часть (5) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left\{D_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial v_\beta} + A_\alpha\right\} f \tag{6}$$

Здесь $D_{\alpha\beta}(v)$ — фоккер-планковский коэффициент диффузии, $A_\alpha(v)$ — коэффициент динамического трения. Структура этих коэффициентов может быть установлена на основании достаточно общих соображений. Действительно коэффициент диффузии является тензором второго ранга и в предположении однородности и изотропности системы имеет вид $D_{\alpha\beta}(v) = B(v)v^2\delta_{\alpha\beta} - C(v)v_\alpha v_\beta$, где B и C — функции модуля скорости. Аналогично при тех же предположениях найдем $A_\alpha = G(v)v_\alpha$. При нулевом внешнем поле стационарным решением кинетического уравнения (5) является максвелловская функция распределения электронов с температурой, равной температуре тяжелых частиц ионизованного газа T_0. Тогда связь между B, C и G находится из условия обращения в нуль фоккер-планковского интеграла столкновений

$$[B(v) - C(v)]\, mv^2 = kT_0 G(v) \qquad \text{(соотношение Эйнштейна)} \tag{7}$$

Явные выражения для этих коэффициентов могут быть получены [5] разложением ядра интеграла столкновений Ландау в ряд по параметру $m/M \ll 1$

$$2B = \nu(v)\left[1 - \frac{m}{M}\frac{kT_0}{mv^2}\right], \quad 2C = \nu(v)\left[1 - 3\frac{m}{M}\frac{kT_0}{mv^2}\right], \quad G(v) = \frac{m}{M}\nu(v) \tag{8}$$

при этом частота столкновений с передачей импульса $\nu(v)$ определена известным соотношением

$$\nu(v) = 2\pi \frac{Ne^4}{m^2 v^3} L \tag{9}$$

Здесь M и N — масса и плотность ионов, L — кулоновский логарифм. Система уравнений, которой удовлетворяют моменты функции распределения, находится путем умножения уравнения (5) на m, mv_α, $mv_\alpha v_\beta$, $mv_\alpha v^2, \ldots$ с последующим интегрированием по f пространству скоростей. С учетом принятого приближения для f (3) имеем

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \rho\mathbf{u} = 0, \qquad \tfrac{3}{2}\partial_t p + \operatorname{div}\mathbf{q} = \mathbf{Ej} + R[f_0]$$

$$(\partial_t + \tau^{-1})\rho\mathbf{u} + \operatorname{grad} p + \operatorname{div}\boldsymbol{\pi} = ne\mathbf{E} - \alpha\mathbf{h} \tag{10}$$

$$(\partial_t + \tau_\pi^{-1})\pi_{\alpha\beta} + \frac{2}{5}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial q_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial q_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) = E_\alpha j_\beta + E_\beta j_\alpha - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}E_\gamma j_\gamma$$

$$(\partial_t + \tau_h^{-1})h_\alpha + \frac{5}{2}\left[\rho u_\alpha \partial_t\theta + \pi_{\alpha\beta}\frac{\partial\theta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial(\eta p)}{\partial x_\alpha} - \frac{\theta\partial p}{\partial x_\alpha}\right] + \frac{\partial(\theta\pi_{\alpha\beta})}{\partial x_\beta} = \frac{e}{m}E_\beta\pi_{\alpha\beta} - \beta\rho u_\alpha$$

Здесь

$$\mathbf{j} = en\mathbf{u} \tag{11}$$

$$\theta = \frac{p}{\rho} = \frac{1}{3}\int_0^\infty v^4 f_0(v)\,dv \Big/ \int_0^\infty v^2 f_0(v)\,dv, \qquad \eta = \frac{1}{5}\int_0^\infty v^6 f_0(v)\,dv \Big/ \int_0^\infty v^4 f_0(v)\,dv \tag{12}$$

Времена релаксации гидродинамических переменных τ, τ_π, τ_h и величины α и β определяются соотношениями

$$\tau^{-1} = a^{(1)}[f_0], \qquad \tau_\pi^{-1} = a^{(2)}[f_0], \qquad \tau_h^{-1} = a^{(3)}[\Delta f_0] - {}^1/_2\,\theta a^{(1)}[\Delta f_0] \tag{13}$$

$$\alpha = {}^1/_5\, a^{(1)}[\Delta f_0], \quad \beta = 5\{a^{(3)}[f_0] - {}^1/_2\,\theta a^{(1)}[f_0]\}$$

где

$$a^{(1)}[f_0] = -\frac{4\pi}{3n}\int_0^\infty \nu(v)\frac{\partial f_0}{\partial v}v^3\,dv + O(m/M) \qquad \left(n = 4\pi\int_0^\infty v^2 f_0(v)\,dv\right)$$

$$a^{(2)}[f_0] = \frac{2\pi}{5n}\int_0^\infty \nu^{(2)}(v)\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial f_0}{v\partial v}v^5 dv + O(m/M) \tag{14}$$

$$a^{(3)}[f_0] = -\frac{2\pi}{15n}\int_0^\infty \nu(v)\frac{\partial f_0}{\partial v}v^5 dv + O(m/M)$$

Значения $a^{(1)}[\Delta f_0]$ и $a^{(3)}[\Delta f_0]$ определяются аналогичными выражениями с заменой f_0 на Δf_0. Кроме того, для величины $R[f_0]$, описывающей передачу энергии при столкновениях частиц, имеем

$$R[f_0] = -\frac{4\pi m}{M}\int_0^\infty \nu(v)v^3\left(kT_0\frac{\partial f_0}{\partial v} + mv f_0\right)dv \tag{15}$$

В приведенных выше выражениях

$$\nu = Nv\int\sigma(v,\chi)(1-\cos\chi)\,d\Omega, \qquad \nu^{(2)} = Nv\int\sigma(v,\chi)(1-\cos^2\chi)\,d\Omega \tag{16}$$

При этом для электрон-ионных взаимодействий $\nu^{(2)} = 2\nu$, а для частной модели твердых упругих шариков в случае электрон-нейтральных взаимодействий $\nu^{(2)} = {}^2/_3\nu = {}^2/_3 NQv$, где Q — поперечное сечение столкновений электрона с нейтроном.

Следует отметить, что времена релаксации τ, τ_π, τ_h и величины α, β, найденные в результате вычисления «моментов относительно интеграла столкновений», определены на произвольной функции распределения основного состояния, в то время как в обычной схеме метода моментов за f_0 принимается максвелловская функция распределения [3].

Для отыскания кинетического уравнения, определяющего функцию распределения основного состояния f_0, подставим полученное выше разложение (3) в кинетическое уравнение (5) и выполним интегрирование по угловым переменным пространства скоростей. В результате находим

$$\partial_t f_0 + \frac{v}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{\delta}\mathbf{f} + \frac{e}{3m}v^{-2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\delta}\mathbf{f}) = \frac{m}{M}v^{-2}\frac{\partial}{\partial v}\left[v^2\nu(v)\left(\frac{kT_0}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + vf_0\right)\right] \tag{17}$$

где

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{f} = -\mathbf{u}\frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{1}{5}\frac{\mathbf{h}}{\rho}\frac{\partial}{\partial v}(\triangle f_0) \tag{18}$$

Заметим, что структура полученного уравнения совпадает со структурой уравнения Б. И. Давыдова [1] для симметричной функции распределения электронов в сильном электрическом поле. Различие заключается в следующем. В методе Б. И. Давыдова как f_0, так и $\boldsymbol{\delta}\mathbf{f}$ (или $\mathbf{f}^{(1)}$) определяются из системы первых двух уравнений цепочки, возникающей в результате подстановки разложения (1) в исходное кинетическое уравнение, и интегрирования по угловым переменным пространства скоростей. Это означает, что кинетический подход используется для исследования как основного состояния, так и отклонений от него.

Анализ второго из уравнений цепочки показывает, в частности, что в пренебрежении пространственной неоднородностью $\mathbf{f}^{(1)}$ допускает представление

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{f} = -\mathbf{u}(v)\,\partial f_0/\partial v$$

где $\mathbf{u}(v)$ определяется из уравнения

$$\partial\mathbf{u}/\partial t + \nu(v)\,\mathbf{u} = e\mathbf{E}/m$$

и является, таким образом, функцией хаотической скорости электронов [2].

В рассматриваемом приближении токовая часть функции распределения $\boldsymbol{\delta}\mathbf{f}$ определена через среднюю макроскопическую скорость $\mathbf{u}$ и относительный тепловой поток $\mathbf{h}$, которые связаны системой гидродинамических уравнений с изотропным давлением, тензором напряжений и внешним полем. Кинетический метод используется, таким образом, лишь для определения функции распределения основного состояния, а отклонения от основного состояния исследуются в гидродинамическом приближении. Применение в этом случае обобщенного метода моментов, в основе которого лежит разложение (3), позволяет в гидродинамическом приближении учесть влияние внешнего поля на функцию распределения основного состояния, связанное с сохранением трех членов в разложении типа (1), в то время как в методе Б. И. Давыдова учет $f_{\alpha\beta}^{(2)}$ в разложении (1) неизбежно связан с анализом связанной системы трех кинетических уравнений.

Для стационарных и пространственно-однородных состояний уравнение (17) переходит в

$$\frac{m}{M}\nu(v)\left[\frac{kT_0}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + vf_0\right] = -\frac{1}{3}\frac{e}{m}\left[\mathbf{Eu}\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{1}{5}\frac{1}{\rho}\mathbf{Eh}\frac{\partial}{\partial v}(\Delta f_0)\right] \tag{19}$$

которое может быть представлено в интегральной форме

$$\frac{3m}{M}kT_0\,[f_0 - f_0^{(0)}]\exp\left(\frac{mv^2}{2kT_0}\right) = \tag{20}$$

$$= -e\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}\int\limits_0^v \exp\left(\frac{mw^2}{2kT_0}\right)\frac{df_0(w)}{\nu(w)} - \frac{1}{5\rho}e\mathbf{E}\cdot\mathbf{h}\int\limits_0^v \exp\left(\frac{mw^2}{2kT_0}\right)\frac{d\Delta f_0(w)}{\nu(w)}$$

Здесь $f_0^{(0)}$ — решение уравнения (19) при нулевом внешнем поле (максвелловское распределение электронов с температурой T_0). Входящие в правую часть (20) величины $\mathbf{Eu}$ и $\mathbf{Eh}$ могут быть найдены из решения системы гидродинамических уравнений (10). В предположении стационарности и пространственной однородности приходим к следующим соотношениям:

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{u} = \frac{\sigma}{en}E^2, \qquad \mathbf{E}\cdot\mathbf{h} = ne\alpha^{-1}E^2[1-\sigma/\sigma_0] \tag{21}$$

где σ — коэффициент электропроводности плазмы, определяемый выражением (22)

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1-\Delta_0}\frac{1}{1+\zeta E^2} \qquad \left(\sigma_0 = \frac{ne^2}{m}\tau,\ \Delta_0 = \alpha\beta\tau\tau_h,\ \zeta = \frac{4}{3}\frac{1}{1-\Delta_0}\left(\frac{e}{m}\right)^2\alpha\tau\tau_\pi\tau_h\right)$$

Для анализа уравнений (20) и (21) можно использовать метод итераций. Приняв за нулевое приближение $f_0^{(0)}$ и вычисляя величины $\tau^{(0)}$, $\tau_\pi^{(0)}$, $\tau_h^{(0)}$, $\alpha^{(0)}$ и $\beta^{(0)}$, находим на основании соотношений (21) значения $\mathbf{u}^{(1)}$ и $\mathbf{h}^{(1)}$ в первом приближении. Подставляя полученные значения в уравнение (20), в правой части которого f_0 заменяется на $f_0^{(0)}$, приходим к явной зависимости поправки первого приближения $f_0^{(1)} - f_0^{(0)}$ от напряженности внешнего поля. Если использовать полученное для $f_0^{(1)}$ выражение для вычисления $\tau^{(1)}$, $\tau_\pi^{(1)}$, $\tau_h^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$, то соотношения (21) приведут ко второму приближению для средней скорости $\mathbf{u}^{(2)}$ и теплового потока $\mathbf{h}^{(2)}$. Таким путем может быть, в частности, проанализирован характер нелинейной зависимости тока проводимости $\mathbf{j} = en\mathbf{u}$ и теплового потока $\mathbf{h}$ от напряженности электрического поля.

Отметим, что нулевое приближение соответствует случаю «слабых» полей, определяемых условием

$$E \ll E_p, \qquad E_p^2 = \left(\frac{m}{e}\right)^2\frac{3kT_0}{M}\frac{1}{[\tau(T_0)]^2} \tag{23}$$

Оценивая для этого случая зависящий от E^2 член в знаменателе выражения для σ (22), находим

$$\zeta E^2 \sim \frac{m}{M}\left(\frac{E}{E_p}\right)^2 \tag{24}$$

т. е. этим членом можно заведомо пренебрегать по сравнению с единицей. В результате коэффициент электропроводности σ не зависит в рассматриваемом приближении от напряженности электрического поля, согласуясь по величине с известными результатами «второго приближения» Чепмэна—Каулинга для лорентцевского газа [6].

Перейдем к оценке влияния электрон-электронных столкновений. Учет последних приводит к появлению дополнительного интегрального члена правой части уравнения для f_0 и к уточнению величин времен релаксации в уравнениях для моментов (10). При достаточно большой степени ионизации вид функции распределения основного состояния определяется в основном межэлектронными столкновениями. Решением, обращающим в нуль интеграл электрон-электронных столкновений в уравнении для f_0, служит максвелловская функция распределения [2] с температурой электронов T. Последняя может быть определена из уравнения энергии (10), которое принимает вид

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}nkT + \operatorname{div}\mathbf{q} = \mathbf{Ej} - 3nk\frac{m}{M}\frac{T-T_0}{\tau(T)} \tag{25}$$

где $\tau(T)$ определено при температуре электронов.

Поправки к временам релаксации, обусловленные электрон-электронными столкновениями, могут быть взяты из работ [7,8]. В частности, для полностью ионизованного газа имеем

$$\tau^{-1} = \tau_{ei}^{-1}, \qquad \tau_\pi^{-1} = 1.2\tau_{ei}^{-1} + 0.6\tau_{ee}^{-1} \approx 1.2\tau_{ei}^{-1}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2Z}\right)$$

$$\tau_h^{-1} = 1.3\tau_{ei}^{-1} + 0.4\tau_{ee}^{-1} \approx 1.3\tau_{ei}^{-1}\left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{13Z}\right) \tag{26}$$

$$\alpha = -0.6\frac{m}{kT}\tau_{ei}^{-1}, \qquad \beta = -1.5\frac{kT}{m}\tau_{ei}^{-1}$$

$$\tau_{ei}^{-1} = \frac{16}{3}N\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{Ze^2}{2kT}\right)^2 \ln\Lambda_{ei} \quad \left(\ln\Lambda_{ei} \approx \ln\Lambda_{ee} = \frac{1}{2}L\right) \tag{27}$$

Здесь Ze — заряд иона, значения $\ln\Lambda$ табулированы в работе [9]. Выражение для коэффициента электропроводности σ принимает в этом случае вид

$$\sigma = \frac{(ne^2/m)\tau_{ei}}{(1-\Delta_0)}\frac{1}{1-(E/E_m)^2} \qquad \left(\Delta_0 = \frac{9}{13}\left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{13Z}\right)^{-1}\right) \tag{28}$$

Критическое поле E_m определено соотношением

$$E_m^2 = \frac{27}{20}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2Z}\right)\frac{1-\Delta_0}{\Delta_0}\left(\frac{m}{e}\right)^2\frac{kT}{m}\tau_{ei}^{-2} \tag{29}$$

Для $E \ll E_m$ значения σ полностью соответствуют результатам Спитцера [9]. Сравнение (29) и (23) показывает, что критическое поле связано с плазменным полем E_p соотношением

$$E_m = A(Z)\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}\frac{T_0}{T}E_p, \qquad A(Z) \sim 1 \tag{30}$$

Как известно, E_p является параметром, определяющим омический разогрев электронов в плазме [2], и соответствует внешнему полю, при котором электрон за время между столкновениями набирает энергию, сравнимую с энергией, теряемой при отдельном соударении с тяжелой частицей. Легко заметить, что $E_m > E_p$ и соответствует полю, в котором электрон за то же время набирает энергию, сравнимую с его средней тепловой энергией.

При $E \to E_m$ коэффициент электропроводности σ согласно (28) неограниченно возрастает. Последнее обстоятельство связано с тем, что в указанных полях возникает тенденция к «убеганию» электронов, для анализа которого необходимо, вообще говоря, рассматривать нестационарную задачу и перейти к более полному кинетическому описанию.

Поступила 19 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов Б. И. К теории движения электронов в газах и в полупроводниках. ЖЭТФ, 1937, т. 7, стр. 203.
2. Гинзбург В. Л., Гуревич А. В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле. УФН, 1960, т. LXX, вып. 2.
3. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. Comm. Pure and Appl. Math., 1949, vol. 2, p. 331. Русск. пер.: Грэд Х. О кинетической теории разреженных газов. ИЛ, Сб. пер., Механика, 1952, 4 (14), стр. 71 и 5 (15), стр. 61.
4. Mintzer D. Orthogonal Polinomial Solutions of the Boltzman Equation. Bull. Amer. Phys. Soc., 1962, Scries II, vol. 7, No. 1, p. 20.
5. Брагинский С. И. Явления переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме. ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 2
6. Чепмэн С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, 1960.
7. Herdan R., Liley B. S. Dynamical equations and transport relationships for a thermal plasma. Rev. Mod. Phys., 1960, vol. 32, p. 731.
8. Жданов В. М. Явления переноса в частично ионизованном газе. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
9. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. ИЛ, 1957.