

УДК 532.517.2, 532.526

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ ВДУВА ИЛИ ОТСОСА

С. Садри, М. Бабаэлахи

Технологический университет им. К. Н. Тусси, Тегеран, Иран
E-mails: Mbabaelahi@Gmail.com, S.Sadri595@gmail.com

Выполнено исследование ламинарного потока пограничного слоя, обтекающего пористую пластину, с учетом вдува или отсоса через ее поверхность. С помощью соответствующих преобразований основная система уравнений сведена к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решены аналитически с использованием асимптотического метода оптимальных гомотопий. Проведено сравнение этого решения с численным решением. Обсуждается влияние однородного вдува (отсоса) на теплоперенос и профиль скорости потока. В случае горизонтальной пластины температура ее поверхности и краевые условия для температуры считались постоянными.

Ключевые слова: ламинарный поток пограничного слоя, пористая пластина, асимптотический метод оптимальной гомотопии, вдув, отсос, тепловой поток.

Введение. Исследование пористой среды представляет интерес, так как результаты исследований такой среды используются при решении различных задач, например задач биомеханики. В [1] приведен обзор большого количества работ по этой теме. Результаты исследования ламинарного двумерного потока, обтекающего нагретые или охлажденные тела, находят применение в различных областях техники, например при проектировании профилей крыльев летательных аппаратов, разработке технологий охлаждения лопаток турбин и технологий смазки керамических деталей машин, в пищевой промышленности, при охлаждении электронных устройств, при извлечении геотермальной энергии, в процессах фильтрации и т. д.

В [2–4] представлены результаты исследований вынужденного, свободного и смешанного конвективных течений при обтекании нагретых и охлажденных тел (пластин, лезвий, конусов) с учетом вдува (отсоса). В [5] изучено влияние магнитного поля на стационарный поток жидкости и тепловой поток на пористой пластине. В [6] определено влияние поверхностного потока массы на естественное конвективное течение, для которого нарушается закон Дарси, при обтекании горизонтальной пластины в насыщенной пористой среде.

В [7] исследовано влияние геометрического фактора, скорости вдува (отсоса) и вязкоупругости на характеристики течения и температурного поля на клине. В [8] получено автомодельное решение уравнений пограничного слоя, описывающих установившееся магнитогидродинамическое двумерное течение и теплоперенос в электропроводящей жидкости, содержащей тепловые источники, движение которой обусловлено наличием непрерывно движущейся пористой пластины, погруженной во флюидонасыщенную пористую среду.

В [9] анализируются импульс и теплоперенос в ламинарном пограничном слое неньютоновской жидкости со степенным определяющим законом на пластине, движущейся в направлении, противоположном направлению основного однородного потока, при произвольном вдуве (отсосе) жидкости вдоль поверхности пластины.

В [10] получено точное решение задачи в случае двумерного автомодельного пограничного слоя в потоке жидкости, инициируемом проницаемой растягивающейся поверхностью. В [11] изучено смешанное конвективное течение пограничного слоя на горизонтальной проницаемой пластине. В [12] исследованы характеристики теплопереноса в ламинарном смешанном конвективном течении в пограничном слое на полубесконечной горизонтальной пластине, погруженной в пористую среду.

Аналитические решения можно получить только для небольшого числа инженерных задач, поэтому соответствующие нелинейные уравнения решаются с помощью других методов (численных или аналитического метода возмущений). При использовании численных методов необходимо исследовать их сходимость и устойчивость. При использовании метода возмущений требуется выбрать малый параметр. Необходимость выбора малого параметра и введение его в уравнения можно считать недостатком метода возмущений.

В последнее время развиты методы, позволяющие тем или иным способом исключить малый параметр. К числу таких методов относятся гомотопический метод возмущений (ГМВ) [13, 14], вариационно-итерационный метод (ВИМ) [15], метод дифференциальных преобразований (МДП) [16]. Эти методы использовались при решении различных инженерных задач [17–20].

Асимптотический метод оптимальных гомотопий (АМОГ) является более строгим методом решения нелинейных задач, не требующим введения малого параметра. Этот метод развивался и исследовался в ряде работ (см. [21–24]).

В данной работе АМОГ применяется для получения приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих ламинарное течение пограничного слоя на пористой пластине с учетом вдува или отсоса. Это решение сравнивается с численным решением, полученным методом Рунге — Кутты.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившийся несжимаемый двумерный ламинарный поток в пограничном слое на проницаемой пластине. Вдали от пластины скорость и температура однородного основного потока равны U_∞ и T_∞ соответственно (рис. 1). Координата x отсчитывается от передней кромки пластины, координата y — по нормали к пластине. Компоненты вектора скорости в направлениях x , y обозначены u , v соответственно. Скорость поверхностного потока массы v_w отнесена к скорости основного потока U_∞ и полагается постоянной (при вдуве $v_w > 0$, при отсосе $v_w < 0$). Температура поверхности пластины поддерживается постоянной и равна T_w .

Все термодинамические свойства предполагаются постоянными. Также предполагается, что скорость вдува (инъекции) не оказывает существенного влияния на невязкий поток вне пограничного слоя. Считается, что число Рейнольдса настолько большое, что можно использовать допущения теории пограничного слоя. С учетом принятых предположений уравнения пограничного слоя, включающие законы сохранения массы, импульса и энергии,

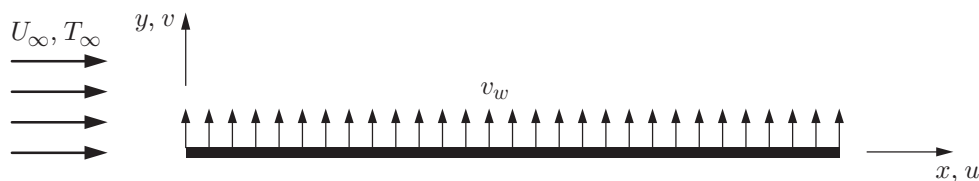


Рис. 1. Схема задачи

имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Соответствующие краевые условия для скорости и температуры следующие:

$$\begin{aligned} y = 0: \quad u &= 0, \quad v = \pm v_w, \quad T = T_w = \text{const}, \\ y \rightarrow \infty: \quad u &\rightarrow U_\infty, \quad T \rightarrow T_\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Для того чтобы получить автомодельное решение, систему дифференциальных уравнений нужно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью соответствующих преобразований. В данной задаче используются следующие переменные подобия:

$$\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta), \quad \eta = \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}_x}, \quad \theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_\infty}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнения (1), (2), получаем

$$2f''' + ff'' = 0, \quad \theta'' + \frac{\text{Pr}}{2} \theta' f = 0. \quad (4)$$

В случае симметричной геометрии задачи краевые условия имеют вид

$$f(0) = f_w, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad \theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 0,$$

где $f_w = -(2v_w/U_\infty)\sqrt{\text{Re}_x}$.

2. Основы асимптотического метода оптимальной гомотопии. Используем АМОГ при решении дифференциальной задачи

$$L(u(\tau)) + N(u(\tau)) + g(\tau) = 0, \quad B(u) = 0, \quad (5)$$

где L — линейный оператор; τ — независимая переменная; $u(\tau)$ — неизвестная функция; $g(\tau)$ — известная функция; $N(u(\tau))$ — нелинейный оператор; B — оператор краевых условий.

Согласно АМОГ сначала конструируем семейство уравнений

$$\begin{aligned} (1-p)[L(\varphi(\tau, p)) + g(\tau)] - H(p)[L(\varphi(\tau, p)) + g(\tau) + N(\varphi(\tau, p))] &= 0, \\ B(\varphi(\tau, p)) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $p \in [0, 1]$ — параметр вложения; $H(p)$ — ненулевая вспомогательная функция при $p \neq 0$, $H(0) = 0$; $\varphi(\tau, p)$ — неизвестная функция. Очевидно, что при $p = 0$, $p = 1$ выполняются равенства

$$\varphi(\tau, 0) = u_0(\tau), \quad \varphi(\tau, 1) = u(\tau).$$

Таким образом, при изменении параметра p от 0 до 1 решение $\varphi(\tau, p)$ изменяется от $u_0(\tau)$ до $u(\tau)$, где $u_0(\tau)$ — решение уравнения (6) при $p = 0$:

$$L(u_0(\tau)) + g(\tau) = 0, \quad B(u_0) = 0.$$

Выберем вспомогательную функцию $H(p)$ в виде

$$H(p) = pC_1 + p^2C_2 + \dots,$$

где C_1, C_2, \dots — константы, которые будут определены ниже.

Разлагая функцию $\varphi(\tau, p)$ в ряд по параметру p , получаем

$$\varphi(\tau, p, C_i) = u_0(\tau) + \sum_{k \geq 1} u_k(\tau, C_i) p^k, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Подставляя соотношение (7) в уравнение (6), собирая члены при одинаковых степенях p и приравнивая их к нулю, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями. Таким образом, приближенное решение уравнения (5) можно представить в виде

$$\tilde{u}^{(m)} = u_0(\tau) + \sum_{k=1}^m u_k(\tau, C_i). \quad (8)$$

Заметим, что коэффициент C_m может быть функцией переменной τ . Подставляя соотношение (8) в уравнение (5), получаем следующую невязку:

$$R(\tau, C_i) = L(\tilde{u}^{(m)}(\tau, C_i)) + g(\tau) + N(\tilde{u}^{(m)}(\tau, C_i)). \quad (9)$$

Если $R(\tau, C_i) = 0$, то $\tilde{u}^{(m)}(\tau, C_i)$ является точным решением. В общем случае для нелинейных задач $\tilde{u}^{(m)}(\tau, C)$ не является точным решением, но тогда для получения решения можно минимизировать функционал

$$J(C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_a^b R^2(\tau, C_1, C_2, \dots, C_m) d\tau,$$

где значения констант a, b зависят от конкретной задачи.

Неизвестные константы C_i ($i = 1, 2, \dots, m$) определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial C_1} = \frac{\partial J}{\partial C_2} = \dots = 0. \quad (10)$$

Если эти константы известны, то приближенное решение (8) порядка m также известно.

3. Решение задачи асимптотическим методом оптимальной гомотопии.

В данном пункте АМОГ применяется для решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (4). С учетом уравнений (6), (4) получаем

$$\begin{aligned} (1-p)(f'' + f') - H_1(p)[2f''' + ff'' - (f'' + f')] &= 0, \\ (1-p)(\theta' + \theta) - H_2(p)[\theta'' + (\text{Pr}/2)\theta'f - (\theta' + \theta)] &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где штрих обозначает дифференцирование по переменной η .

Рассмотрим функции $f, \theta, H_1(p), H_2(p)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + pf_1 + p^2f_2, & \theta &= \theta_0 + p\theta_1 + p^2\theta_2, \\ H_1(p) &= pC_{11} + p^2C_{12}, & H_2(p) &= pC_{21} + p^2C_{22}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя представления (12) в уравнение (11), после ряда упрощений и перегруппировки членов при одинаковых степенях p получаем следующие системы уравнений с краевыми

условиями:

$$\begin{aligned}
p^0: \quad & f_0''' + f_0'' = 0, \quad \theta_0' + \theta_0 = 0, \\
& f_0(0) = f_w, \quad f_0'(0) = 1, \quad \theta_0(0) = 1, \\
p^1: \quad & -2C_{11}f_0''' + f_1'' - f_0'' + C_{11}f_0' - f_0' + f_1' - C_{11}f_0f_0'' + C_{11}f_0'' = 0, \\
& -\theta_0 - c_{21}f_0f_0'' - 2c_{21}f_0 - \theta_0' + \theta_1 + c_{21}\theta_0' + \theta_1' + c_{21}\theta_0 = 0, \\
& f_1(0) = 0, \quad f_1'(0) = 0, \quad \theta_1(0) = 0, \\
p^2: \quad & f_2'' - f_1' - C_{11}f_1f_0'' + C_{11}f_1' - 2C_{11}f_1''' - C_{11}f_0f_1'' - 2C_{12}f_0''' + C_{12}f_0'' - \\
& \quad - C_{12}f_0f_0'' + f_2' + C_{12}f_0'' + C_{11}f_1'' - f_1'' = 0, \\
& \theta_1 - 2C_{21}f_1''' - C_{21}f_1f_0'' + C_{22}\theta_0 - C_{21}f_0f_1'' + C_{22}\theta_0' + C_{21}\theta_1 + C_{21}\theta_1' - \\
& \quad - 2C_{22}f_0''' - C_{22}f_0f_0'' + \theta_2 + \theta_2' - \theta_1' = 0, \\
& f_2(0) = 0, \quad f_2'(0) = 0, \quad \theta_2(0) = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Решая уравнения (13) с учетом краевых условий, находим

$$\begin{aligned}
f_0(\eta) &= f_w + 1 - e^{-\eta}, \quad \theta_0(\eta) = e^{-\eta}, \\
f_1(\eta) &= -C_{11}f_w(-e^{-\eta}\eta - e^{-\eta}) + C_{11}(-e^{-\eta}\eta - e^{-\eta}) + \\
& \quad + 0,5C_{11}e^{-2\eta} - C_{11}e^{-\eta} - C_{11}f_w + 1,5C_{11}, \\
\theta_1(\eta) &= (-C_{21}(f_w\eta - \eta + e^{-\eta}) + C_{21})e^{-\eta}.
\end{aligned}$$

Выражения для функций $f_2(\eta)$, $\theta_2(\eta)$ не приводятся вследствие их громоздкости. Окончательные выражения для $f(\eta)$, $\theta(\eta)$ имеют вид

$$f(\eta) = f_0(\eta) + f_1(\eta) + f_2(\eta), \quad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \theta_1(\eta) + \theta_2(\eta). \tag{14}$$

Подставляя функции $f(\eta)$, $\theta(\eta)$ в уравнения (4) и определяя из (9) $R_1(\eta, C_{11}, C_{12})$, $R_2(\eta, C_{21}, C_{22})$, для функционалов J_1 , J_2 получаем следующие выражения:

$$J_1(C_{11}, C_{12}) = \int_0^{\infty} R_1^2(\eta, C_{11}, C_{12}) d\eta, \quad J_2(C_{21}, C_{22}) = \int_0^{\infty} R_2^2(\eta, C_{21}, C_{22}) d\eta.$$

Константы C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} определяются из уравнений (10). При $Pr = 0,7$, $f_w = 0,5$ эти константы имеют следующие значения: $C_{11} = -0,222\,597\,741\,3$, $C_{12} = 0,997\,702\,869\,2$, $C_{21} = -0,466\,350\,462\,9$, $C_{22} = 1,974\,886\,578$. Подставляя эти значения в (14), получаем выражения для функций $\theta(\eta)$, $f(\eta)$.

4. Результаты исследования и их обсуждение. Результаты проведенного исследования представлены на рис. 2–7. Из рис. 2, 3 следует, что результаты аналитического решения и численного решения, полученного с использованием пакета MAPLE11 и метода Рунге — Кутты, хорошо согласуются. Эти результаты свидетельствуют о применимости АМОГ при решении рассмотренной задачи. Исследовано также влияние на решение таких важных параметров, как числа Рейнольдса и Прандтля, параметры однородных отсоса и вдува.

На рис. 3 показано влияние параметра отсоса (вдува) на распределение скорости жидкости. Видно, что с увеличением параметра отсоса (вдува) скорость жидкости уменьшается. При изменении параметра $f_w > 0$ от значений, соответствующих отсосу ($v_w < 0$), до значений, соответствующих вдуву ($v_w > 0$, $f_w < 0$), скорость возрастает.

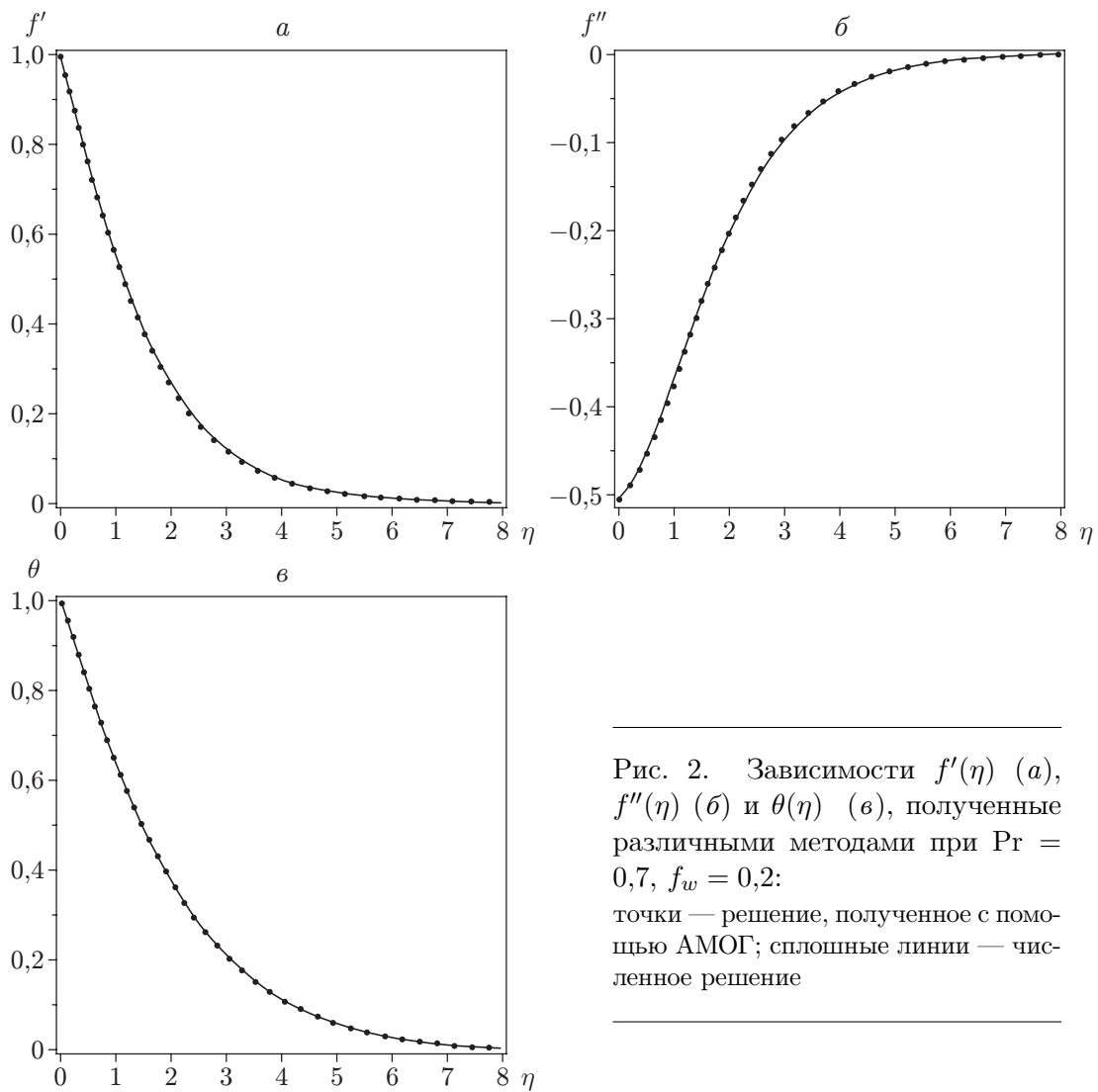


Рис. 2. Зависимости $f'(\eta)$ (*a*), $f''(\eta)$ (*б*) и $\theta(\eta)$ (*в*), полученные различными методами при $Pr = 0,7$, $f_w = 0,2$:

точки — решение, полученное с помощью АМОГ; сплошные линии — численное решение

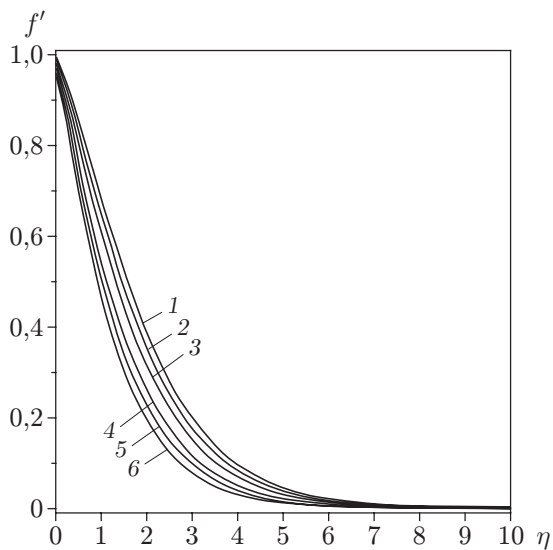


Рис. 3. Распределение скорости потока, полученное с использованием АМОГ, при различных значениях параметра f_w :

1 — $f_w = -0,7$; 2 — $f_w = -0,5$; 3 — $f_w = -0,2$; 4 — $f_w = 0,2$; 5 — $f_w = 0,5$; 6 — $f_w = 0,7$

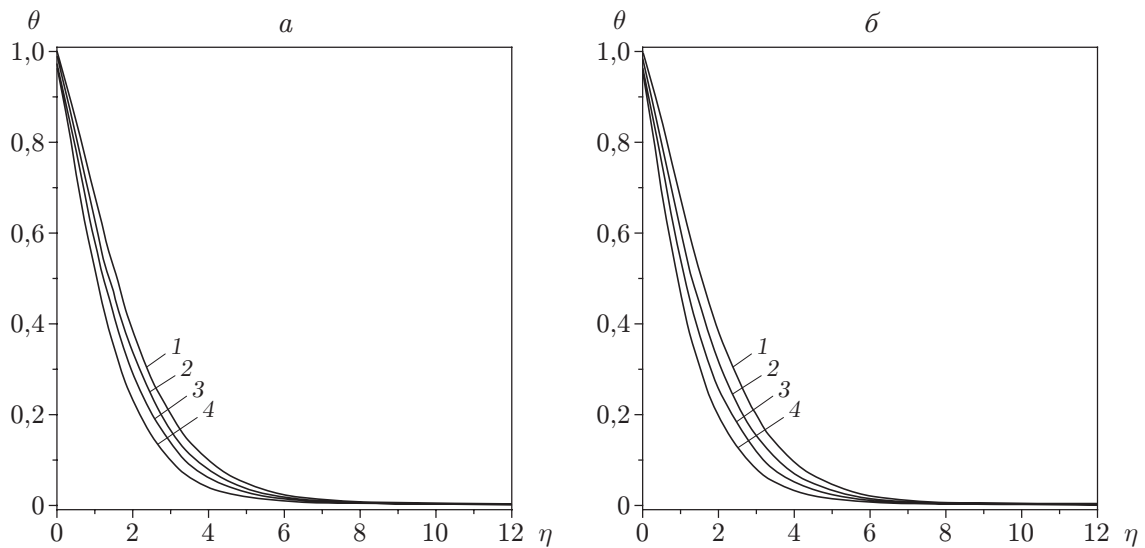


Рис. 4. Распределение температуры потока, полученное с использованием АМОГ, при различных значениях параметра f_w :
 а — $Pr = 0,7$, б — $Pr = 1$; 1 — $f_w = -0,7$, 2 — $f_w = -0,2$, 3 — $f_w = 0,2$, 4 — $f_w = 0,7$

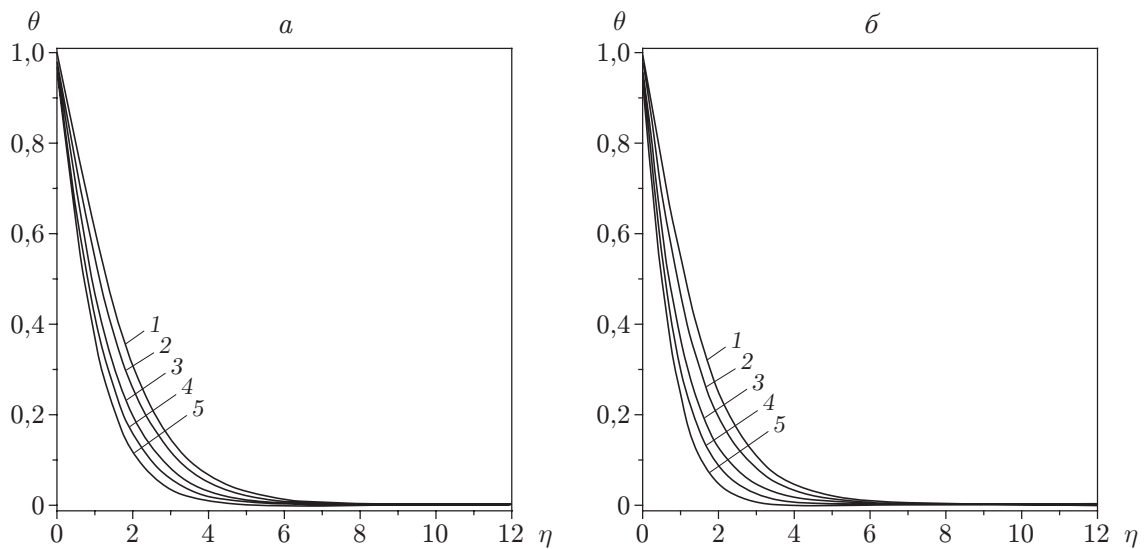


Рис. 5. Распределение температуры потока, полученное с использованием АМОГ, при различных значениях числа Прандтля:
 а — $f_w = 0,2$, б — $f_w = 0,7$; 1 — $Pr = 0,5$, 2 — $Pr = 1,0$, 3 — $Pr = 1,5$, 4 — $Pr = 1,8$,
 5 — $Pr = 2,1$

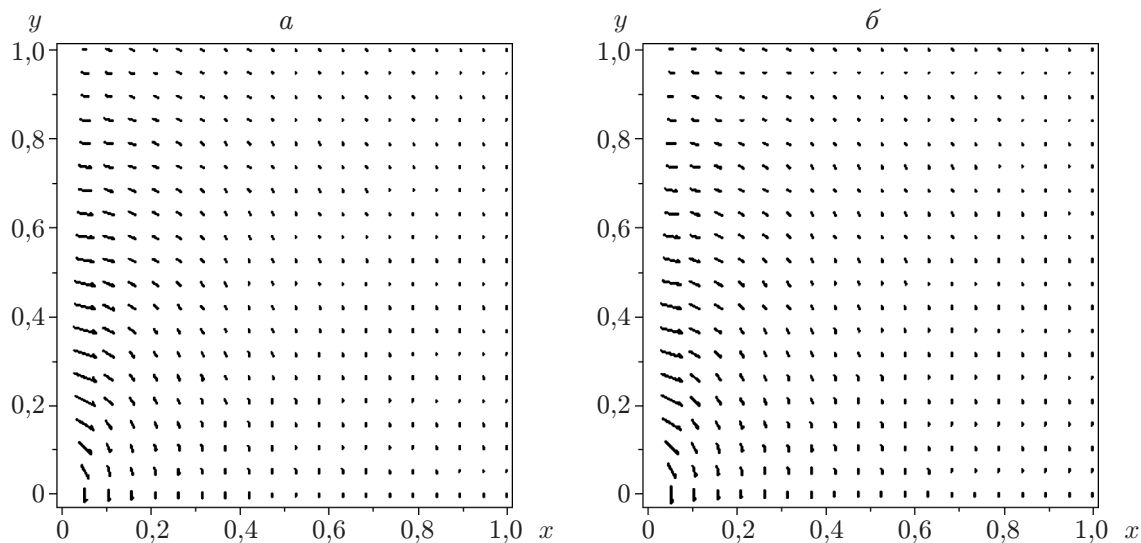


Рис. 6. Векторное поле скоростей при $f_w = 0,7$:
a — $Pr = 0,5$; *б* — $Pr = 0,7$

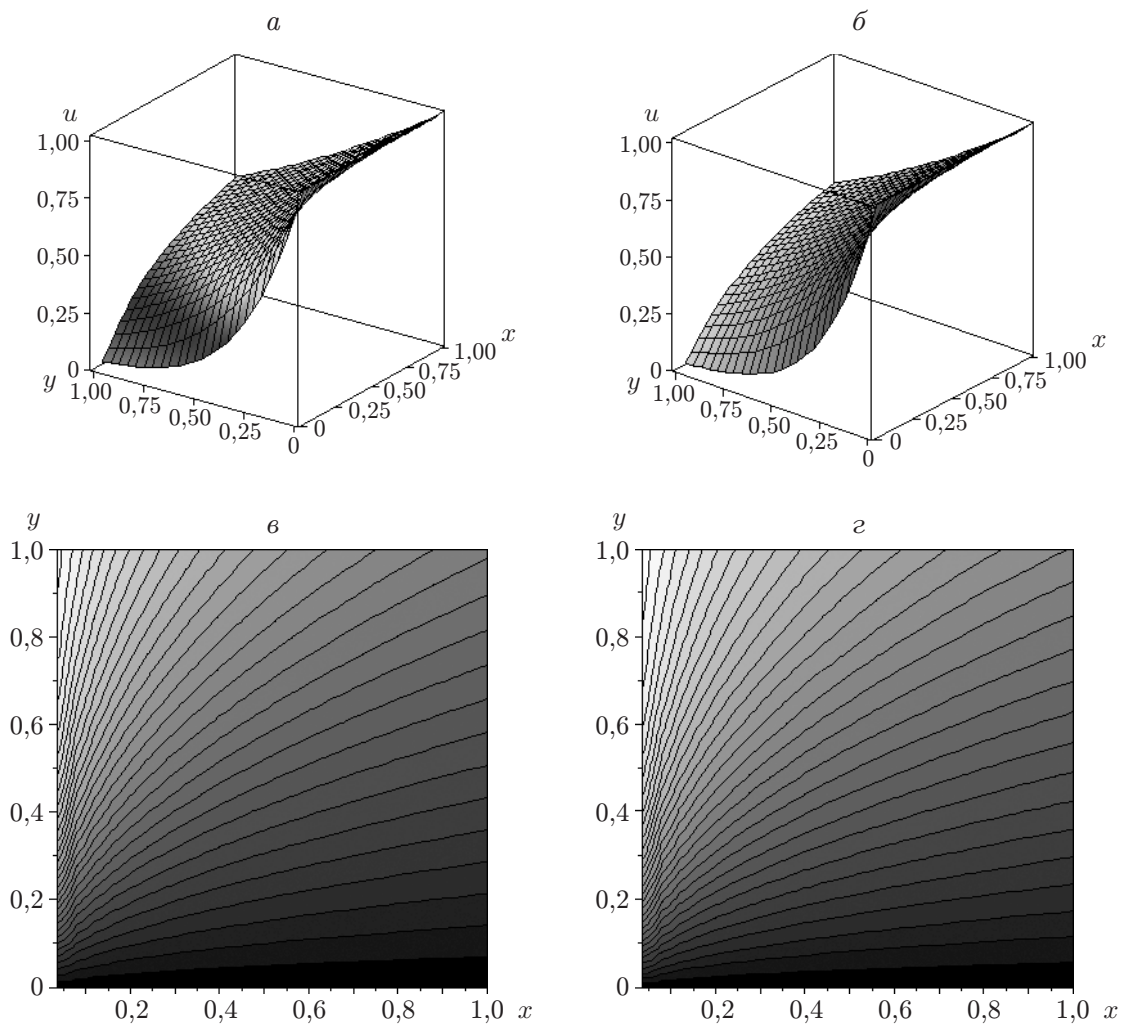


Рис. 7. Распределение скорости (*a*, *б*) и температуры (*в*, *г*) по координатам x , y :
a, *в* — $Pr = 0,5$, $f_w = 0,5$; *б*, *г* — $Pr = 0,7$, $f_w = 0,7$

На рис. 4 показано влияние параметра отсоса (вдува) f_w на температуру и профиль скорости потока при $Pr = 0,7; 1,0$. Видно, что в случае, когда вдув сменяется отсосом, тепловой поток уменьшается. Увеличение числа Прандтля приводит к уменьшению температуры (см. рис. 5). На рис. 6, 7 представлены распределения температуры и скорости потока для некоторых частных случаев.

Заключение. В работе с помощью асимптотического метода оптимальных гомотопий получено аналитическое решение задачи о стационарном ламинарном течении пограничного слоя на пористой пластине с учетом вдува или отсоса. Использование этого метода позволяет уменьшить трудности, возникающие при проведении вычислений. В результате вычисления сводятся к простым преобразованиям. Из приведенных в работе результатов следует, что с увеличением числа Рейнольдса скорость и температура уменьшаются, с увеличением числа Прандтля температура уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rudraiah N., Chiu-On Ng.** Dispersion in porous media with and without reaction // *Rev. J. Porous Media*. 2007. V. 10, N 3. P. 219–248.
2. **Watanabe T.** Free convection boundary layer flow with uniform suction or injection over a cone // *Acta Mech*. 1991. V. 87. P. 1–9.
3. **Watanabe T.** Forced and free mixed convection boundary layer flow with uniform suction or injection on a vertical plate // *Acta Mech*. 1991. V. 89. P. 123–132.
4. **Watanabe T., Funazaki K., Taniguchi H.** Theoretical analysis on mixed convection boundary // *Acta Mech*. 1994. V. 105. P. 133–141.
5. **Chandran P., Sachetti N. C., Singh A. K.** Hydromagnetic flow and heat transfer past a continuously moving porous boundary // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer*. 1996. V. 23, N 6. P. 889–898.
6. **Murthy P. S. V. N., Singh P.** Thermal dispersion effects on non-Darcy natural convection over horizontal plate with surface mass flux // *Arch. Appl. Mech*. 1997. V. 67. P. 487–495.
7. **Hsu C.-H., Chen C.-H., Teng J.-T.** Temperature and flow fields for the flow of a second grade fluid past a wedge // *Intern. J. Non-Linear Mech*. 1997. V. 32, N 5. P. 933–946.
8. **Chamkha A. J.** Hydromagnetic flow and heat transfer of a heat-generating fluid over a surface embedded in a porous medium // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer*. 1997. V. 24, N 6. P. 815–825.
9. **Rao J. H., Jeng D. R., De Witt K. J.** Momentum and heat transfer in a power-law fluid with arbitrary injection/suction at a moving wall // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 1999. V. 42. P. 2837–2847.
10. **Magyari E., Keller B.** Exact solutions for self-similar boundary-layer flows induced by permeable stretching walls // *Eur. J. Mech. B. Fluids*. 2000. V. 19. P. 109–122.
11. **Magyari E., Pop I., Keller B.** Mixed convection boundary-layer flow past a horizontal permeable flat plate // *Fluid Dynamics Res*. 2002. V. 31. P. 215–225.
12. **Elbashbeshy E. M. S.** Laminar mixed convection over horizontal flat plate embedded in a non-Darcian porous medium with suction and injection // *Appl. Math. Comput*. 2001. V. 121. P. 123–128.
13. **He J. H.** Homotopy perturbation method for bifurcation on nonlinear problems // *Intern. J. Non-Linear Sci. Numer. Simul*. 2005. V. 6. P. 207–208.
14. **He J. H.** Homotopy perturbation technique // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*. 1999. V. 178. P. 257–262.
15. **He J. H.** Variational iteration method — some recent results and new interpretations // *J. Comput. Appl. Math*. 2007. V. 207, N 1. P. 3–17.

16. **Zhou J. K.** Differential transformation and its applications for electrical circuits. Wuuhahn (China): Huarjung Univ. Press, 1986 (in Chinese).
17. **Ganji Z. Z., Ganji D. D.** Approximate solutions of thermal boundary-layer problems in a semi-infinite flat plate by using He's homotopy perturbation method // Intern. J. Non-Linear Sci. Numer. Simul. 2008. V. 9, N 4. P. 415–422.
18. **Ganji D. D., Rajabi A.** Assessment of homotopy-perturbation and perturbation methods in heat radiation equations // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2006. V. 33. P. 391–400.
19. **Joneidi A. A., Ganji D. D., Babaelahi M.** Differential transformation method to determine fin efficiency of convective straight fins with temperature dependent thermal conductivity // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2009. V. 36. P. 757–762.
20. **Babaelahi M., Ganji D. D., Joneidi A. A.** Analysis of velocity equation of steady flow of a viscous incompressible fluid in channel with porous walls // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 2010. V. 63, iss. 9. P. 1048–1059.
21. **Marinca V., Herisanu N.** Application of optimal homotopy asymptotic method for solving nonlinear equations arising in heat transfer // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2008. V. 35. P. 710–715.
22. **Marinca V., Herisanu N., Bota C., Marinca B.** An optimal homotopy asymptotic method applied to the steady flow of a fourth-grade fluid past a porous plate // Appl. Math. Lett. 2009. V. 22. P. 245–251.
23. **Marinca V., Herisanu N.** Optimal homotopy asymptotic method with application to thin film flow // Centr. Eur. J. Phys. 2008. V. 6. P. 1608–1644.
24. **Joneidi A. A., Ganji D. D., Babaelahi M.** Micropolar flow in a porous channel with high mass transfer // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2009. V. 36. P. 1082–1088.

*Поступила в редакцию 24/VIII 2011 г.,
в окончательном варианте — 8/XI 2011 г.*
