ПМТФ, № 5, 1971

УДК 532.6 + 532.528

КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ В ПОПЕРЕЧНОМ ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Л. Г. Гузевский

(Новосибирск)

Решается задача о кавитационном обтекании расположенной на прямолинейном дне пластинки потоком тяжелой жидкости по схемам Рябушинского и Жуковского — Рошко. Используется метод кусочно-гладкой аппроксимации краевого условия на свободной границе, при которой это условие выполняется точно в конечном числе точек. Исходная задача при этом сводится к решению системы нелинейных уравнений, разрешимость которой можно доказать по методу В. Н. Монахова [1]. Основное внимание в данной работе уделено численному решению этой системы уравнений на ЭВМ.

Задачи подобного типа для больших чисел Фруда, когда влияние весомости на течение мало, исследовались в [2-5]. В работах [6,7] струйные задачи решались методом конечных разностей.

Применяемые ранее аппроксимации краевого условия на свободной границе основываются на использовании малости тех или иных характеристик течения. Так, например, в предположении малости изменения модуля и угла наклона скорости на свободной линии тока правомерно применение линеаризации Леви — Чивита [8]; наиболее сильная линеаризация основана на требовании малости дополнительных скоростей, вызванных препятствием, по сравнению со скоростью невозмущенного потока [9].

В данной работе исследование задачи проводится в диапазоне чисел кавитации и Фруда, когда сила тяжести оказывает существенное влияние на основные характеристики течения. В качестве примера одного из возможных применений расчета дается решение задачи о выборе формы тела нулевой плавучести с участком постоянного давления.

Схемы рассматриваемых течений изображены на фиг. 1. Характерными величинами заданной части области течения являются длина l пластинки DA и угол $\alpha\pi$, который она образует с бесконечным горизонтальным дном CD. В схеме Рябушинского каверна предполагается симметричной относительно некоторой вертикальной оси BC, что позволяет ограничиться рассмотрением половины области течения.

Отобразим конформно область течения в физической плоскости $z = x + iy$ на внутренность единичного полукруга

$$|\zeta| < 1, \qquad \operatorname{Im}\zeta > 0$$

так, чтобы свободной поверхности AB соответствовала дуга круга $\zeta = e^{is}$ и остальной части границы — действительный диаметр $\zeta = t$. При этом бесконечно удаленной точке C поставим в соответствие начало координат плоскости ζ, а образ точки D обозначим через t_1 (фиг. 2).

Производная отображения полукруга на область комплексного потенциала $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ имеет вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = Kq_0 \frac{(1-\zeta)(1+\zeta)^\lambda}{\zeta^{0.5(3+\lambda)}} \tag{1}$$

где K — вещественная постоянная, q_0 — величина скорости в точке A, а λ равно 0 и 1 соответственно для схем Рябушинского и Жуковского — Рошко.

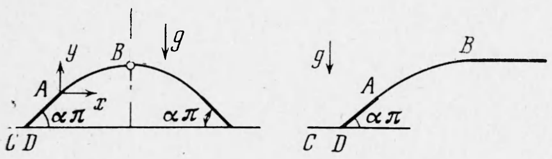
Комплексную скорость $dw/dz = q \exp(-i\theta)$ будем искать в виде

$$\frac{1}{q_0}\frac{dw}{dz} = e^{-i\alpha\pi}\left(\frac{\zeta - t_1}{1 - t_1\zeta}\right)^{\alpha} e^{M(\zeta)} \tag{2}$$

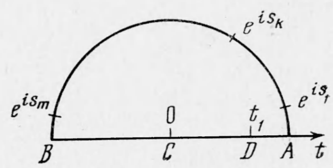
Тогда для определения аналитической функции $M(\zeta)$ приходим к следующей краевой задаче:

$$\operatorname{Re} M(e^{is}) = \ln\frac{q(s)}{q_0}, \quad s \in [0, \pi]; \quad \operatorname{Im} M(t) = 0, \quad t \in [-1, 1]$$

Продолжая $M(\zeta)$ с помощью принципа симметрии на весь единич-



Фиг. 1



Фиг. 2

ный круг $|\zeta| \leqslant 1$ и учитывая четность $q(s)$, из представления функции $M(\zeta)$ по формуле Шварца получим

$$M(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\frac{q(s)}{q_0}\, \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta\cos s + \zeta^2}\, ds \tag{3}$$

Зависимость $z = z(\zeta)$ находится из формул (1) и (2)

$$z(\zeta) = K e^{i\alpha\pi}\int_1^{\zeta} \frac{(1-\zeta)(1+\zeta)^{\lambda}}{\zeta^{0.5(3+\lambda)}}\left(\frac{1 - t_1\zeta}{\zeta - t_1}\right)^{\alpha} e^{-M(\zeta)}\, d\zeta \tag{4}$$

На граничной линии тока давление p определяется из интеграла Бернулли

$$p = p_* + \frac{\rho q_\infty^2}{2} - \frac{\rho q^2}{2}, \qquad p_* = p_\infty - \rho g y$$

где p_∞ — давление в невозмущенном потоке на уровне точки A, q_∞ — величина скорости набегающего потока, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность жидкости. Отсюда в силу постоянства давления p_0 на границе AB, искомая функция $q(s)$ должна удовлетворять условию

$$\frac{q^2(s)}{q_0^2} = 1 - \frac{2}{(1+\sigma)\,\mathrm{Fr}^2}\frac{y(s)}{y_0} \qquad \left(\sigma = \frac{p_\infty - p_0}{{}^1\!/_2\,\rho q_\infty^2} = \frac{q_0^2}{q_\infty^2} - 1, \ \mathrm{Fr} = \frac{q_\infty}{\sqrt{g y_0}}\right) \tag{5}$$

В этой формуле σ — число кавитации, Fr — число Фруда, определенное по величине $y_0 = l \sin\alpha\pi$. Зависимость $q = q(s)$ выберем так, чтобы (5) выполнялось в конечном числе точек свободной границы.

Пусть $\zeta_k = e^{is_k}$ $(k = 1, \ldots, m)$ — образы некоторых точек $z_k = x_k + iy_k$ свободной границы. Согласно (5) относительная скорость q_k/q_0 в точках z_k определяется только через физические параметры σ, Fr и величины $l_k = y_k/y_0$

$$\frac{q_k}{q_0} = \left[1 - \frac{2l_k}{(1+\sigma)\,\mathrm{Fr}^2}\right]^{1/2} \qquad (k = 1, \ldots, m+1) \tag{6}$$

На каждом из промежутков $[s_k, s_{k+1}]$ скорость течения $q(s)$ зададим формулой (7)

$$\frac{q(s)}{q_0} = \left(\frac{q_k}{q_0}\right)^{\beta_{k+1}} \left(\frac{q_{k+1}}{q_0}\right)^{-\beta_k}, \qquad \beta_{k+1} = \frac{\cos s - \cos s_{k+1}}{\cos s_k - \cos s_{k+1}}, \quad \beta_k = \frac{\cos s - \cos s_k}{\cos s_k - \cos s_{k+1}}$$

$$(s_k \leqslant s \leqslant s_{k+1})$$

Тогда $q(s_k) = q_k$ и при условии, что $q_{k+1} < q_k$ $(k = 0, \ldots, m)$, $q(s)$ — монотонно убывающая функция параметра $s \in [0, \pi]$.

Подставляя выражение (7) в (3) после вычисления интегралов, входящих в представление функции $M(\zeta)$, получим (8)

$$M(\zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\cos s_k - \cos s_{k+1}} \left\{ \frac{1-\zeta^2}{2\zeta} (s_{k+1} - s_k) \ln \frac{q_{k+1}}{q_k} + \right.$$

$$\left. + i \left[\left(\frac{1+\zeta^2}{2\zeta} - \cos s_{k+1} \right) \ln \frac{q_k}{q_0} + \left(\cos s_k - \frac{1+\zeta^2}{2\zeta} \right) \ln \frac{q_{k+1}}{q_0} \right] \ln \frac{(\zeta - e^{is_k})(1 - e^{is_{k+1}}\zeta)}{(1 - e^{is_k}\zeta)(\zeta - e^{is_{k+1}})} \right\}$$

Условие (5) в точках $z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}$ свободной границы согласно (6) приводит к $m + 1$ соотношению

$$\frac{q_k^2}{q_0^2} = 1 - \frac{4}{\mathrm{Fr}^2 (1+\sigma) \sin \alpha\pi} \int_0^{s_k} q_0 \sin s/2 \, (2 \cos s/2)^\lambda \sin \theta(s) \frac{ds}{q(s)} \times$$

$$\times \left[\int_{t_1}^{1} \frac{(1-t)(1+t)^\lambda}{t^{0.5(3+\lambda)}} \left(\frac{1 - t_1 t}{t - t_1} \right)^\alpha e^{-M(t)} \, dt \right]^{-1} \qquad (9)$$

Из условия для скорости набегающего потока

$$q_\infty = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{\zeta=0}$$

следует, что t_1 можно выразить через другие параметры

$$t_1^{2\alpha} = \frac{1}{(1+\sigma) e^{2M(0)}}$$

Зафиксировав теперь произвольным образом параметры s_k $(k = 1, \ldots, m)$, из соотношений (9) получим систему $m + 1$ уравнений для определения величин q_k/q_0 $(k = 1, \ldots, m + 1)$.

Для разрешимости системы уравнений (9) необходимо, чтобы заданные характеристики течения σ и Fr удовлетворяли условию

$$\sigma \mathrm{Fr}^2 > 2y_b / y_0 \qquad (10)$$

которое возникает при доказательстве существования решения данной системы по методу В. Н. Монахова [1]. С другой стороны, неравенство (10) выполняется для таких кавитационных течений, при которых статическое давление на свободной границе больше давления p_0 в каверне

$$p_* = p_\infty - \rho g y(s) > p_0$$

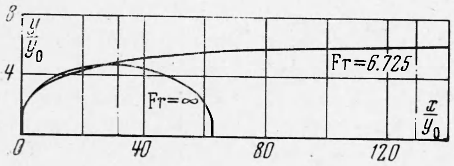
Согласно условию (5) это означает, что скорость на свободной линии тока больше скорости невозмущенного течения.

Неизвестные параметры q_k/q_0 определяются из (9) методом итераций. Исходя из специфики рассматриваемой задачи, предлагается два метода последовательных приближений.

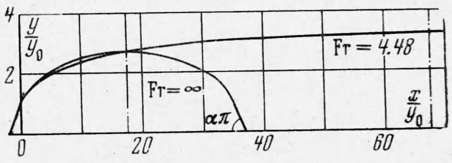
Согласно первому методу сначала находится решение задачи, удовлетворяющее интегралу Бернулли в двух точках свободной границы A и B. Это решение позволяет найти такие значения параметров s_k ($k = 1, \ldots, m$), которые соответствуют точкам полученной свободной границы с ординатами $y_k = ky_b^{(0)}/(m+1)$, где $y_b^{(0)}$ — известная ордината точки B. Нулевое приближение для решения исходной системы (9) определяется формулой

$$\frac{q_k^{(0)}}{q_0} = \left[1 - \frac{2}{(1+\sigma)\,\mathrm{Fr}^2}\,\frac{k}{m+1}\,\frac{y_b^{(0)}}{y_0}\right]^{1/2} \qquad (k = 1, \ldots, m+1)$$

и дальнейшие приближения отыскиваются по обычной итерационной схеме. На каждом шаге итерационного процесса выбранные ранее величины



Фиг. 3



Фиг. 4

параметров s_k считаются неизменными. При указанном способе сходимость процесса нарушается, когда число Фруда близко к минимальному $\mathrm{Fr}_* = 2y_b/\sigma y_0$.

В этом интервале чисел Фруда применяется второй метод, согласно которому осуществляются дополнительные итерации по Fr. Полученное решение системы (9) принимается за начальное приближение при решении данной системы для меньшего числа Фруда и т. д.

Если найдены параметры q_k/q_0 ($k = 1, \ldots, m+1$), удовлетворяющие системе уравнений (9), то течение определяется формулами (1), (2), (4) и (8). Условие постоянства давления при этом будет удовлетворяться в $m+2$ точках линии тока AB. В остальных точках этой границы отклонение найденного распределения давления от постоянного давления p_0 характеризуется величиной

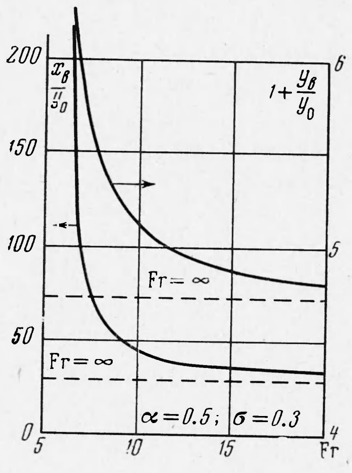
$$\tau(s) = 1 - \frac{p - p_\infty}{p_0 - p_\infty} = \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)\left[1 - \frac{q^2(s)}{q_0^2}\right] - \frac{2}{\sigma\,\mathrm{Fr}^2}\,\frac{y(s)}{y_0}$$

Определяя на каждом из интервалов $[s_k, s_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, m$ точки экстремума $\tau(s)$, можно найти затем и минимальное значение τ_* функции $\tau(s)$ на всем промежутке $0 \leqslant s \leqslant \pi$. Требуемая малость величины τ_* достигается за счет увеличения числа точек свободной границы, в которых выполняется граничное условие (5).

На фиг. 3—5 представлены результаты расчетов кавитационного обтекания пластинки по схеме Рябушинского для $\sigma = 0.3$. При решении задачи условие постоянства давления (5) для $m = 19$ выполнялось во всех случаях с погрешностью τ_*, не превышающей 0.1%.

Сравнение формы свободной границы для течений невесомой и тяжелой жидкости с малыми числами Фруда и при одинаковом числе кавитации для двух значений угла наклона пластинки $\alpha = 1/2$, $1/6$ приведено соответственно на фиг. 3 и фиг. 4. Пунктирными линиями на этих графиках отмечены сечения каверны по миделю. Заслуживает внимания тот факт, что в передней части каверны свободная линия тока в невесомой жидкости несколько выше, чем в тяжелой.

Характер зависимости размеров каверны от числа Фруда для пластинки, нормальной к набегающему потоку, иллюстрируется на графике фиг. 5. В значительной степени эффект весомости (всплывание каверны и увеличение ее длины) проявляется для малых чисел Фруда. Из графика видно, что при стремлении Fr к $\mathrm{Fr}_* \approx 6.15$ длина каверны существенно увеличивается, а ее ширина (максимальный поперечный размер) ограничена сверху некоторой постоянной величиной.



Фиг. 5

Аналогичные расчеты проведены в случае кавитационного обтекания пластинки в нижней полуплоскости. При одинаковых условиях длина и ширина каверны в нижней полуплоскости меньше, чем в верхней.

Большой интерес представляет случай, когда результирующая подъемная сила, действующая со стороны жидкости на кавитирующее тело, равна его весовому водоизмещению. Метод построения такого рода течений разработан Б. Г. Новиковым.

Пусть получено решение задачи о кавитационном обтекании пластинки по схеме Рябушинского в верхней (нижней) полуплоскости. Условие $\psi = 0$ на граничной линии тока позволяет продолжить функцию w с помощью принципа симметрии через горизонтальное дно $y = 0$ в нижнюю (верхнюю) полуплоскость. Тогда течение, рассматриваемое во всей плоскости, будет симметричным и, следовательно, бесциркуляционным. Так как в точках $P(x, y)$ и $P(x, -y)$, лежащих соответственно на свободной границе и на ее зеркальном отображении относительно прямой $y = 0$, величины скоростей равны, то из интеграла Бернулли следует, что давление в симметричных точках отличается на величину $2\rho g y$. Отсюда результирующая подъемная сила, действующая со стороны жидкости на частично кавитирующее тело, будет равна выталкивающей силе Архимеда.

Поступила 23 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, ч. 1. Новосибирск, Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1969.
2. Пыхтеев Г. Н. Общая и основная краевые задачи плоских струйных установившихся течений и соответствующие им нелинейные уравнения. ПМТФ, 1966, № 1.
3. Пыхтеев Г. Н. Некоторые методы решения одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения теории струй идеальной жидкости. ПМТФ, 1966, № 2.
4. Мальцев Л. И. Кавитационное обтекание криволинейных дуг потоком тяжелой жидкости. ПМТФ, 1968, № 1.
5. Кажихов А. В. О существовании отрывного течения типа Рябушинского в гравитационном поле с учетом капиллярных сил. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 1, Новосибирск, Ин-т Гидродинамики СО АН СССР, 1969.
6. Шепеленко В. Н. К расчету кавитационных течений. ПМТФ, 1968, № 5.
7. Зуйков Ю. П., Шепеленко В. Н. Расчет плоских кавитационных течений в поперечном поле силы тяжести. Материалы Всес. конф. по краевым задачам, Казань, Изд-во Казанск. гос. ун-та, 1970.
8. Троепольская О. В. Об одной схеме кавитационного течения тяжелой жидкости. Изв. вузов, Математика, 1963, № 6.
9. Бутузов А. А. Об искусственном кавитационном течении за тонким клином, помещенным на нижнюю поверхность горизонтальной стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.