

**К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГОРЕНИЯ ПОРОХА.
ГОРЕНИЕ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕМСЯ ДАВЛЕНИИ**

Ю. А. Гостинцев, Л. А. Суханов, П. Ф. Похил

(Москва)

Показано, что для построения теории нестационарного горения пороха необходимо знание стационарных зависимостей скорости горения u_0° , температуры поверхности T_s° и температуры пламени T_F° , от внешних параметров и начальной температуры пороха. В рамках такой теории рассмотрены процессы горения в неограниченном объеме, когда один из внешних параметров меняется по гармоническому закону.

1. Теория нестационарного горения пороха строится в предположении о квазистационарности всех процессов в газовой фазе и в реакционной зоне-конденсированной фазы (k -фазы) [1-3]. Единственной инерционной областью в такой теории является прогретый слой k -фазы, перестройка которого и обуславливает нестационарность горения пороха. Допущение квазистационарности оправдано, если характерные времена τ_1 изменения параметров, определяющих горение (давление, скорость обдувающего горящую поверхность газа, поток лучистой энергии из газа в порох и т. п.), много больше времен релаксации процессов в газовой фазе и в зоне химических реакций k -фазы. Оценки для обычных условий горения дают по порядку величины $\tau_1 > 10^{-4}$ сек.

В рамках принятых допущений мгновенные значения скорости горения u , температуры поверхности T_s и температуры пламени T_F зависят только от n величин внешних параметров z_j и градиента температуры $\varphi_s = (\partial T / \partial x)_s$ на поверхности со стороны k -фазы

$$u = u(\varphi_s z_1, \dots, z_n), T_s = T_s(\varphi_s, z_1, \dots, z_n), T_F = T_F(\varphi_s, z_1, \dots, z_n) \quad (1.1)$$

Чтобы показать справедливость (1.1), запишем в функциональном виде соотношения, определяющие процесс нестационарного горения. В газе и в поверхностном тонком реагирующем слое k -фазы эти соотношения будут такими же, как и в случае стационарного горения (условие квазистационарности предполагается выполненным). Тогда в символическом виде [2] массовая скорость горения в газе

$$m_g = m_g(T_F, \varphi_g, q_g, z_1, \dots, z_n) \quad (1.2)$$

скорость разложения k -фазы (в частном случае — закон пиролиза)

$$m_s = m_s(T_s, \varphi_s, q_s, \varphi_g, z_1, \dots, z_n) \quad (1.3)$$

тепловыделение в зоне химических реакций k -фазы q_s и в газе q_g соответственно

$$q_s = q_s(T_s, \varphi_s, z_1, \dots, z_n) \quad (1.4)$$

$$q_g = q_g(T_F, \varphi_g, T_s, z_1, \dots, z_n) \quad (1.5)$$

Из условия квазистационарности газа следует:

$$m_g = m_s = m \quad (1.6)$$

Далее имеют место уравнения сохранения энергии для поверхности

$$\lambda_g \varphi_g - \lambda_s \varphi_s = -m_s q_s \quad (1.7)$$

и энергии для всей безынерционной зоны в целом

$$m(c_s T_s + q_s + q_g) - \lambda_s \varphi_s = m c_p T_F \quad (1.8)$$

Следует подчеркнуть, что суммарный тепловой эффект реакции $q_s + q_g$ здесь переменный.

Видно, что восемь неизвестных функций m_g , m_s , T_F , T_s , φ_g , φ_s , q_g , q_s (все $z_n(t)$ предполагаются известными) в общем случае связаны друг с другом семью соотношениями, следовательно, имеют место зависимости (1.4), причем их вид будет одинаковым как для стационарного, так и для нестационарного горения. Величина градиента температуры φ_s в нестационарных условиях должна определяться из уравнения теплопроводности для k -фазы и проблема нестационарного горения пороха при известном изменении внешних условий (z_j) сводится к решению системы

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - u(z_j, \varphi_s) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (x \leq 0)$$

$$T_s = T_s(z_j, \varphi_s) \quad \text{при } x = 0, \quad T \rightarrow T_0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \quad (1.9)$$

$$T = T_0 + (T_s^\circ - T_0) \exp \frac{u^\circ \kappa}{x} \quad \text{при } t = 0$$

$$T_F = T_F(z_j, \varphi_s) \quad (1.10)$$

Таким образом, при известных зависимостях (1.4) оказывается возможным получить формальное решение задачи нестационарного горения пороха без детализации механизмов физико-химических превращений в пламени и в реакционном слое k -фазы. В этом смысле теория носит феноменологический характер.

Возможны два пути получения соотношений (1.4). Во-первых, используя свойство квазистационарности (1.1), можно получить из экспериментально определяемых стационарных соотношений

$$u^\circ = u^\circ(z_1, \dots, z_n, T_0), \quad T_s^\circ = T_s^\circ(z_1, \dots, z_n, T_0), \quad T_F^\circ = T_F^\circ(z_1, \dots, z_n, T_0) \quad (1.11)$$

(градусами отмечены стационарные значения) посредством исключения из них начальной температуры T_0 с помощью известного решения Михельсона $T_0 = T_s^\circ - (\varphi_s^\circ \kappa) / u^\circ$ (этот метод был впервые предложен Я. Б. Зельдовичем [4]). Другой способ получения (1.1) основан на аналитическом решении уравнений (1.2) — (1.8) [5,6]. Однако такой метод требует точной функциональной записи (1.2) — (1.5), которая невозможна без знания механизма стационарного горения и, следовательно, без определенных предположений о структуре зоны пламени и кинетики химических реакций в нем, что существенно ограничивает общность получаемых результатов.

В принципе оба подхода к проблеме получения (1.1) эквивалентны и при достаточной точности эксперимента в первом из них и удачном теоретическом описании стационарного горения во втором дают одинаковые результаты [7]. Задача (1.9) имеет самостоятельное значение, так как позволяет определить скорость горения в динамическом режиме (эта задача решалась в целом ряде работ [8-16]). В то же время многие явления, наблюдающиеся при нестационарном горении пороха, определяются реакцией пламени на изменение внешних условий. В связи с этим, как впервые количественно показано в данной работе, зависимость (1.10) существенна и не может игнорироваться при рассмотрении целого ряда нестационарных процессов.

Возвращаясь к соотношениям (1.2) — (1.8), отметим, что в общем случае суммарный тепловой эффект реакций горения $q_s + q_g$ переменный и зависит как от значений

давления, скорости потока и т. д., так и от градиента температуры в k -фазе. Так как

$$q_s + q_g = h_0 - h_F = \sum_s a_j \Delta h_j^\circ - \sum_F a_i \Delta h_i^\circ$$

(h_0, h_F — энтальпии образования топлива и конечных продуктов химических реакций в пламени), то для зависимости химической энтальпии продуктов равновесного пламени от z_j и φ_s с учетом (1.8) имеем

$$h_F = h_0 + c_s T_s - c_p T_F - \frac{c_s \kappa_s \Phi_s}{u} \quad (1.12)$$

2. Исходя из изложенной выше модели горения, рассмотрим нестационарное горение пороха в случае, когда один из внешних параметров (например, давление) меняется по закону

$$z_j = z_j^\circ + z_{j1} (\cos \omega t; \sin \omega t) \quad (2.1)$$

Запись (2.1) предполагает, что может быть выбрана любая из функций $\sin \omega t$ или $\cos \omega t$.

Переходя в (1.9), (1.10) и (2.1) к безразмерным

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{u^\circ x}{\kappa}, \quad \tau = \frac{(u^\circ)^2 t}{\kappa}, \quad \vartheta = \frac{T - T_0}{T_s^\circ - T_0} \\ v &= \frac{u}{u^\circ}, \quad \Phi = \frac{\Phi_s}{\Phi_s^\circ}, \quad \Omega = \omega \frac{\kappa}{(u^\circ)^2} \\ Z_j &= \frac{z_j}{z_j^\circ}, \quad \Delta = \frac{z_{j1}}{z_j^\circ} \end{aligned}$$

сведем задачу к виду

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + v(Z_j, \Phi) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} \quad (\xi \leq 0) \quad (2.2)$$

$$\vartheta(\tau, -\infty) = 0, \quad \vartheta(\tau, 0) = \vartheta_s(Z_j, \Phi), \quad \vartheta(0, \xi) = \exp \xi \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_F &= \vartheta_F(Z_j, \Phi) \\ Z_j &= 1 + \Delta (\cos \Omega \tau; \sin \Omega \tau) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Линеаризуя системы (2.2) — (2.4) для первого и второго приближений по амплитуде колебаний давления $\Delta \ll 1, 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial \tau} &= v^{(1)} e^\xi \\ \vartheta^{(1)}(\tau, -\infty) &= 0, \quad \vartheta^{(1)}(\tau, 0) = \vartheta_s^{(1)}(\tau) \\ \vartheta^{(1)}(0, \xi) &= 0, \quad \vartheta_s^{(1)}(0) = \vartheta_F^{(1)}(0) = v^{(1)}(0) = 0 \\ X_i(\tau) &= \left(\frac{\partial X_i}{\partial Z_j} \right)_\Phi (\cos \Omega \tau; \sin \Omega \tau) + \left(\frac{\partial X_i}{\partial \Phi} \right)_{Z_j} \varphi^{(1)}(\tau) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь X_i — любая из функций $v^{(1)}(\tau), v_s^{(1)}(\tau), v_F^{(1)}(\tau)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \vartheta^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \vartheta^{(2)}}{\partial \tau} &= v^{(2)} e^\xi + \frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial \xi} v^{(1)} \\ \vartheta^{(2)}(\tau, -\infty) &= 0, \quad \vartheta^{(2)}(\tau, 0) = \vartheta_s^{(2)}(\tau) \\ \vartheta^{(2)}(0, \xi) &= 0, \quad \vartheta_s^{(2)}(0) = v^{(2)}(0) = \vartheta_F^{(2)}(0) = 0 \\ X_i(\tau) &= \left(\frac{\partial X_i}{\partial \Phi} \right)_{Z_j} \varphi^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial Z_j^2} \right)_\Phi (\cos^2 \Omega \tau; \sin^2 \Omega \tau) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial \Phi^2} \right)_{Z_j} [\varphi^{(1)}]^2 + \frac{\partial^2 X_i}{\partial Z_j \partial \Phi} \varphi^{(1)} (\cos \Omega \tau; \sin \Omega \tau) \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Решение задачи в линейном приближении (2.5) будем искать в виде

$$\begin{aligned}\vartheta^{(1)} &= \Theta(\xi) e^{i\Omega\tau}, \quad v^{(1)}(\tau) = V e^{i\Omega\tau}, \quad \varphi^{(1)}(\tau) = \Phi e^{i\Omega\tau} \\ \vartheta_F^{(1)}(\tau) &= \Theta_F e^{i\Omega\tau}, \quad \vartheta_s^{(1)}(\tau) = \Theta_s e^{i\Omega\tau}\end{aligned}$$

где Θ , V , Φ — соответственно комплексные амплитуды возмущений температур, скорости горения и градиента. После выполнения операций, аналогичных проведенным в [16], найдем

$$\begin{aligned}\Theta(\xi) &= \left(\Theta_s - \frac{iV}{\Omega}\right) e^{2\xi} + \frac{i}{\Omega} V e^{\xi}, \quad \Theta_s = -\frac{\delta}{k} + \frac{r}{k} V \\ V &= \frac{v + \delta(\alpha - 1)}{1 - k + (\alpha - 1)(r - ik/\Omega)}, \quad \Phi = \alpha\Theta_s - \frac{i}{\Omega} V(\alpha - 1) \\ \varepsilon\Theta_F &= \left(s - v\frac{q}{k}\right) + \frac{q}{k} V, \quad \varepsilon = \frac{T_s^\circ - T_0}{T_F^\circ}\end{aligned}\quad (3.1)$$

После выделения мнимой части (возмущение $Z_j(\tau)$ предполагается синусоидальным), для линейных возмущений получим

$$\begin{aligned}Z_j(\tau) &= \Delta \sin \Omega\tau \\ v^{(1)}(\tau) &= \text{Im} \{V \exp i\Omega\tau\} = |V| \sin(\Omega\tau + \Psi) \\ \varphi^{(1)}(\tau) &= \text{Im} \{\Phi \exp i\Omega\tau\} = \frac{k+r-1}{k} |V| \sin(\Omega\tau + \Psi) - \frac{\delta-v}{k} \sin \Omega\tau \\ \varepsilon\vartheta_F^{(1)}(\tau) &= \text{Im} \{\Theta_F \exp i\Omega\tau\} = \left(s - v\frac{q}{k}\right) \sin \Omega\tau + \frac{q}{k} |V| \sin(\Omega\tau + \Psi)\end{aligned}\quad (3.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned}|V| &= \left(\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}\right)^{1/2}, \quad \Psi = \arctg \frac{bc - ad}{ac + bd}, \quad a = v + \frac{\delta}{2} \left(\frac{\Omega}{\beta} - 1\right) \\ b &= \delta\beta, \quad c = 1 + \left(\frac{\Omega}{\beta} - 1\right) \left(\frac{r}{2} - \frac{k\beta}{\Omega}\right), \quad d = \beta r - \frac{k}{2\Omega} \left(\frac{\Omega}{\beta} - 1\right) \\ \beta &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\sqrt{16\Omega^2 + 1} - 1) \right]^{1/2}, \quad \alpha = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{4i\Omega + 1}), \quad \delta = vr - \mu k\end{aligned}$$

Кроме того

$$\begin{aligned}v &= \left(\frac{\partial \ln u^\circ}{\partial \ln Z_j}\right)_{T_0}, \quad k = (T_s^\circ - T_0) \left(\frac{\partial \ln u^\circ}{\partial T_0}\right)_{Z_j}, \quad \mu = \frac{1}{T_s^\circ - T_0} \left(\frac{\partial T_s^\circ}{\partial \ln Z_j}\right)_{T_0} \\ r &= \left(\frac{\partial T_s^\circ}{\partial T_0}\right)_{Z_j}, \quad s = \left(\frac{\partial \ln T_F^\circ}{\partial \ln Z_j}\right)_{T_0}, \quad q = (T_s^\circ - T_0) \left(\frac{\partial \ln T_F^\circ}{\partial T_0}\right)_{Z_j}\end{aligned}\quad (3.3)$$

Параметры v , k , μ , r , s , q определяют свойства топлива и пламени и могут быть найдены из известных стационарных зависимостей (1.11). Исследование горения при колебаниях давления ($Z_j = p$) показало [16], что амплитуда $|V|$ скорости горения при значениях $k > 1.0$ имеет резонанс на собственных частотах прогретого слоя k -фазы $\Omega^* = \sqrt{k}/r$ (при $k < 1.0$ у зависимости $V(\Omega)$ резонанса нет). Очевидно, все выводы, полученные для задачи об изменении давления, будут справедливы и для задачи нестационарного горения при изменении любого другого из Z_n внешних параметров, если только в стационарных условиях сохраняется соотношение Михельсона $\varphi^\circ = u^\circ (T_s^\circ - T_0)/\kappa$ (в случае учета излучения из газа в k -фазу стационарное решение уравнения теплопроводности имеет другой вид).

Из (3.2) видно, что зависимость амплитуды колебаний температуры пламени также должна иметь резонансный характер на частоте Ω^* .

Исследование линейной задачи нестационарного горения пороха при гармонических колебаниях давления позволяет рассмотреть важный для практики вопрос об усилении (ослаблении) акустических волн давления горячей поверхностью. Отклик горячей поверхности на возмущение давления принято оценивать комплексной величиной — акустической проводимостью пороха [17-19]

$$Y = - \left(\frac{\delta u_g / u_g^0}{\delta p / p^0} \right) \quad (3.4)$$

где δu_g — возмущение скорости газа в направлении, перпендикулярном поверхности топлива, а δp — возмущение давления. При этом акустическая волна будет усиливаться горячей поверхностью, если

$$\operatorname{Re} Y < 0 \quad (3.5)$$

Используя уравнение неразрывности $\rho_g u_g = \rho_s u_s$ и уравнение состояния идеального газа, выражение (3.4) можно записать в виде

$$Y = \frac{\delta \pi - \delta v - \varepsilon \delta \theta_F}{\delta p} \left(\varepsilon = \frac{T_s^0 - T_0}{T_F^0} \right) \quad (3.6)$$

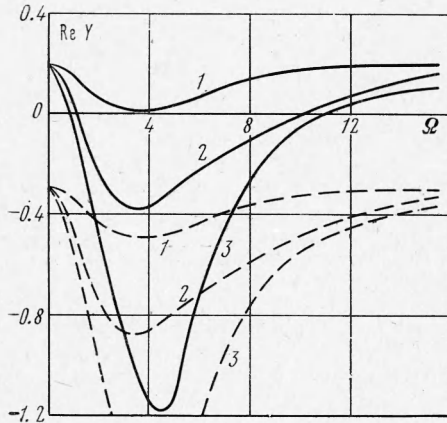
Отсюда для комплексных амплитуд с использованием (3.1) имеем

$$Y = 1 - s + v \frac{q}{k} - \left(1 + \frac{q}{k} \right) V(\Omega) \quad (3.7)$$

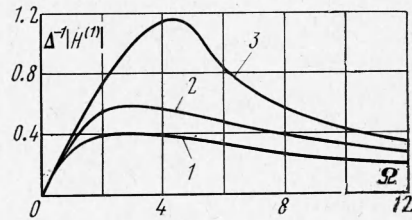
Так как $V = (a + ib) / (c + id)$, то, выделяя из (3.7) действительную часть, получим

$$\operatorname{Re} Y = 1 - s + v \frac{q}{k} - \left(1 + \frac{q}{k} \right) \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad (3.8)$$

Из (3.8) видно, что характеристики пламени (s , q) существенно влияют на способность горящего пороха усиливать акустические колебания, причем влияние параметра $s = (d \ln T_F^0 / d \ln p)_{T_s}$ не зависит от частоты и при $s > 0$ всегда способствует усилению. Это объясняется тем, что в линейном приближении тепловыделение в пламени за счет изменения давления находится в фазе с колебаниями давления (см. формулу (3.2)) и оказывается выполненным критерий Рэлея для усиления акустических волн теплоподводом. (Влияние q на $\operatorname{Re} Y$ неоднозначно и зависит как от частоты, так и от значений других параметров.)



Фиг. 1



Фиг. 2

Зависимость реальной части акустической проводимости от безразмерной частоты для значений параметров $v = 0.66$, $r = 0.3$, $\mu = 0.1$, $q = 0.1$ представлена на фиг. 1 (сплошные кривые 1, 2, 3 соответствуют случаям $k = 0.5, 1.0, 1.5$ для $s = 0$, пунктирные кривые 1, 2, 3 относятся к тем же значениям k , но для $s = 0.5$). Видно, что с увеличением параметров k и s область усиления акустических волн горящим топливом расширяется, а максимальная величина $|\operatorname{Re} Y|$ увеличивается, причем при $s \sim 0.5$ порох усиливает колебания давления во всем диапазоне низких частот. Положение максимума $\operatorname{Re} Y$, как и следовало ожидать, соответствует безразмерной резонансной частоте Ω^* .

Рассмотрим вопрос о возможных типах возмущений, генерируемых пламенем в нестационарных условиях. Под действием изменяющегося давления температура пламени T_F , химическая энтальпия продуктов горения h , плотность газа ρ и скорость пламени u_g меняются в соответствии с квазистационарными зависимостями (1.1), (1.6) и (1.12). Такие возмущения параметров во фронте пламени приводят к появлению системы волн, распространяющихся по продуктам горения. Действительно, для адиабатического движения химически замороженного, совершенного, идеального нетеплопроводного газа за пламенем имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \operatorname{grad}) \mathbf{u} = -\frac{\operatorname{grad} p}{\rho}, \quad p = \rho RT \quad (3.9)$$

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{grad} T \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{grad} p, \quad \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} h) = 0$$

В одномерном случае отсюда получим систему для малых возмущений относительных величин давления $p' = \delta p / p^\circ$, температуры $T' = \delta T / T^\circ$, скорости потока $u' = \delta u / u_g^\circ$ и химической энтальпии $h' = \delta h / h^\circ$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + u_g^\circ \frac{\partial p'}{\partial x} + u_g^\circ \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial T'}{\partial t} - u_g^\circ \frac{\partial T'}{\partial x} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_g^\circ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{c^2}{\gamma u_g^\circ} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad \gamma \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u_g^\circ \frac{\partial T'}{\partial x} \right) = (\gamma - 1) \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + u_g^\circ \frac{\partial p'}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + u_g^\circ \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (\gamma = c_p / c_v)$$

Решение (3.10) будем искать в виде волн

$$X_j' = \bar{X}_j^{(1)} \exp i(\omega t + kx)$$

Тогда

$$p^{(1)}(\omega + k u_g^\circ) + u^{(1)} k u_g^\circ - T^{(1)}(\omega + k u_g^\circ) = 0$$

$$E^{(1)} \frac{c^2 k}{\gamma u_g^\circ} + u^{(1)}(\omega + k u_g^\circ) = 0, \quad h^{(1)}(\omega + k u_g^\circ) = 0 \quad (3.11)$$

$$p^{(1)}(1 - \gamma)(\omega + k u_g^\circ) + T^{(1)} \gamma (\omega + k u_g^\circ) = 0$$

Условие разрешимости (3.11) сводится к равенству нулю определителя

$$\begin{vmatrix} \omega + k u_g^\circ, & k u_g^\circ, & -(\omega + k u_g^\circ), & 0 \\ \frac{c^2 k}{\gamma u_g^\circ}, & \omega + k u_g^\circ, & 0, & 0 \\ (1 - \gamma)(\omega + k u_g^\circ), & 0, & \gamma(\omega + k u_g^\circ), & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \omega + k u_g^\circ \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда находим волновые векторы

$$k_1 = \omega / (c - u_g^\circ), \quad k_2 = -\omega / (c + u_g^\circ), \quad k_3 = -\omega / u_g^\circ$$

Таким образом, в продуктах горения могут существовать волны давления, температуры химической энергии и скорости

$$X_j' = A_j \sin \omega_i \left(k - \frac{x}{c + u_g^\circ} \right) + B_j \sin \omega_i \left(k + \frac{x}{c - u_g^\circ} \right) + C_j \sin \omega_i \left(t - \frac{x}{u_g^\circ} \right)$$

$$X_4' = h' = h^{(1)} \exp i \omega \left(t - \frac{x}{u_g^\circ} \right)$$

$$(X_1' = p', \quad X_2' = u', \quad X_3' = T')$$

В частном случае $\gamma = 1.0$ (так называемое «нулевое приближение») поля малых возмущений элементов потока распадаются на не взаимодействующие между собой

компоненты. Из (3.11) при $\gamma = 1.0$ следуют волновые уравнения:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 X_{1,2}}{\partial t^2} + 2 \frac{\beta}{c} \frac{\partial^2 X_{1,2}}{\partial x \partial t} - (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 X_{1,2}}{\partial x^2} = 0 \left(\beta = \frac{u_g^\circ}{c} \right)$$

$$\frac{\partial^2 X_{3,4}}{\partial t^2} = (u^\circ)^2 \frac{\partial^2 X_{3,4}}{\partial x^2}$$

показывающие, что в нулевом приближении волны давления, плотности и скорости газа распространяются со скоростью $(c \pm u_g^\circ)$, а волны температуры и химической энергии — со скоростью потока u_g° . Так как при одинаковой частоте акустических и температурных волн длина последних во много раз меньше (при обычных условиях горения отношение длин волн $\lambda_3 / \lambda_1 = \beta$ имеет порядок $10^{-2} - 10^{-3}$), то вблизи горячей поверхности давление можно считать только гармонической функцией времени $p' = \Delta \sin \omega t$. Тогда решения волновых уравнений для T и h примут вид

$$X'_{3,4} = |X_F^{(1)}|_{3,4} \sin(\omega t + k_3 x + \Psi_{3,4})$$

где $|X_F^{(1)}|_{3,4}$ — амплитуды возмущений на пламени, а $\Psi_{3,4}$ — сдвиги фаз. Так как скорости распространения T и h волн совпадают, систему этих волн можно трактовать в виде одной волны полной энтальпии продуктов $H' = |H_F^{(1)}| \sin(\omega t + k_3 x + \Psi_H)$.

В самом деле, при изменении давления полная энтальпия продуктов изменится на величину $\delta H = c_p \delta T_F + \delta h_F$.

Используя (1.12), получим отсюда в безразмерном виде

$$\delta H_* = \delta \theta_s - \delta \varphi - \delta v (\delta H_* = \delta H / [c_s (T_s^\circ - T_0)]) \quad (3.12)$$

Интересно, что изменение полной энтальпии продуктов не зависит от характеристик пламени (s, q) и целиком определяется инерционностью прогретого слоя h -фазы. При синусоидальном изменении давления из (3.12) с учетом (3.2) имеем

$$\frac{\delta H_*}{\Delta} = \frac{|V|}{k} \sin(\Omega \tau + \Psi) - \frac{V}{k} \sin \Omega \tau$$

Приведенную формулу удобно представить в виде

$$\delta H_* = |H_F^{(1)}| \sin(\Omega \tau + f)$$

$$|H_F^{(1)}| = \frac{\Delta}{k} \sqrt{|V|^2 - 2v|V| \cos \Psi + v^2}, f = \arctg \frac{|V| \sin \Psi}{|V| \cos \Psi - v} \quad (3.13)$$

На фиг. 2 представлены расчетные зависимости амплитуды волны полной энтальпии (3.13) для тех же значений параметров v, μ, r как и на фиг. 1 (линии 1, 2, 3 соответственно $k = 0.5, 1.0, 1.5$). Необходимо отметить, что эксперименты подтверждают существование коротких температурных волн над горячей поверхностью в колебательном режиме [20].

4. Исследуем вопрос о поведении средней температуры пламени при гармонических колебаниях какого-либо внешнего параметра, определяющего горение. Для этого необходимо рассмотреть решение задачи нестационарного горения во втором приближении.

Согласно теории нелинейных колебаний в квадратичном приближении возможно появление комбинационных частот 0 и 2Ω . Поскольку среднее значение от гармонической функции равно нулю, интерес представляет лишь постоянная составляющая решения задачи (2.6). Выделяя в (2.6) члены, не зависящие от времени, получим для постоянных составляющих систему

$$\frac{d^2 \theta_c^{(2)}}{d\xi^2} - \frac{d\theta_c^{(2)}}{d\xi} = v_c^{(2)} e^\xi + \left[\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial \xi} v^{(1)} \right]_c$$

$$\theta_c^{(2)}(\xi \rightarrow -\infty) = 0, \quad \theta_c^{(2)}(\xi = 0) = \theta_{s,c}^{(2)} \quad (4.1)$$

$$X_{ic}^{(2)} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial \varphi} \right)_{Z_j} \varphi_c^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial Z_j^2} \right)_\varphi [\sin^2 \Omega \tau]_c +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial \varphi^2} \right)_{Z_j} [(\varphi^{(1)})^2]_c + \frac{\partial^2 X_j}{\partial Z_j \partial \varphi} [\varphi^{(1)} \sin \Omega \tau]_c$$

Здесь индекс c означает постоянную составляющую функций.

Запишем выражения постоянных составляющих в (4.1) через комплексные амплитуды линейных возмущений скорости горения V и температуры поверхности Θ_s (см. формулу (3.1)). Так как для синусоидального возмущения $Z_j(\tau)$

$$\begin{aligned}\vartheta^{(1)}(\xi, \tau) &= \text{Im} \{ \Theta(\xi) \exp i\Omega\tau \} = \frac{1}{2i} \{ \Theta(\xi) e^{i\Omega\tau} - \Theta^*(\xi) e^{-i\Omega\tau} \} \\ v^{(1)}(\tau) &= \text{Im} \{ V \exp i\Omega\tau \} = \frac{1}{2i} \{ V e^{i\Omega\tau} - V^* e^{-i\Omega\tau} \}\end{aligned}$$

и т. д., то легко вычислить величины

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial \xi} v^{(1)} \right]_c &= \frac{1}{4} \{ \alpha^* \Theta_s^* V e^{\alpha^* \xi} + \alpha \Theta_s V^* e^{\alpha \xi} + \frac{i |V|^2}{\Omega} (\alpha^* e^{\alpha^* \xi} - \alpha e^{\alpha \xi}) \} \\ [(\varphi^{(1)})^2]_c &= \frac{1}{2} \left\{ |\alpha|^2 \left[|\Theta_s|^2 + \frac{i}{\Omega} (\Theta_s V^* - \Theta_s^* V) + \frac{|V|^2}{\Omega} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\Omega} (\alpha^* \Theta_s^* V - V^* \Theta_s \alpha) - \frac{|V|^2}{\Omega^2} (\alpha^* + \alpha) + \frac{|V|^2}{\Omega^2} \right\} \quad (4.2) \\ [\varphi^{(1)} \sin \Omega\tau]_c &= \frac{1}{4} \left\{ (\alpha \Theta_s + \alpha^* \Theta_s^*) + \frac{i}{\Omega} [V^* (\alpha^* - 1) - V (\alpha - 1)] \right\}\end{aligned}$$

Здесь звездочка над символом обозначает комплексно сопряженную величину. Интегрируя далее уравнение теплопроводности из (4.1) по ξ в пределах от 0 до $-\infty$, найдем связь

$$\varphi_c^{(2)} = \vartheta_c^{(2)} + v_c^{(2)} + 1/4 (\Theta_s^* V + \Theta_s V^*) \quad (4.3)$$

Используя (4.3) и (4.1), можно в принципе выразить значение постоянной составляющей температуры пламени $\vartheta_{F,c}^{(2)}$ во втором приближении через известные из решения линейной задачи амплитуды V и Θ_s . Однако получаемое после этого общее выражение чрезвычайно громоздко и не поддается анализу. Поэтому ограничимся рассмотрением функции $\vartheta_{F,c}^{(2)}$ вблизи резонанса. (Напомним, что резонансные явления при горении пороха под действием гармонических возмущений какой-то одной функции Z_j возможны лишь в случае $k > 1.0$).

Известно, что в области резонанса амплитуда первой гармоники пропорциональна корню кубическому из амплитуды вынуждающей силы, а амплитуда второй гармоники и постоянная составляющая — квадрату амплитуды первой гармоники. В соответствии с этим можно оценить по порядку величин постоянные члены в разложениях функций $v_c^{(2)}$, $\vartheta_{s,c}^{(2)}$, $\vartheta_{F,c}^{(2)}$ из (4.1). Удерживая в этих разложениях члены порядка $\Delta^{3/2}$ (Δ — малая амплитуда колебаний величины Z_j), вблизи резонанса имеем

$$X_{i,c}^{(2)} \approx \left(\frac{\partial X_i}{\partial \varphi} \right)_{Z_j} \varphi_c^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial \varphi^2} \right)_{Z_j} [(\varphi^{(1)})^2]_c \quad (4.4)$$

В линейном приближении после аналогичных оценок получим

$$V \approx \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)_{Z_j} \Phi, \quad \Theta_s \approx \left(\frac{\partial \Theta_s}{\partial \varphi} \right)_{Z_j} \Phi$$

Отсюда с учетом (3.3) следует:

$$\Theta_{s,c} = \frac{r}{k} V \quad (4.5)$$

Используя (4.3), (4.4) и (4.5), после преобразований найдем

$$v_c^{(2)} = -r \frac{|V|^2}{2} - \frac{1}{2} [(\varphi^{(1)})^2]_c \left[k \frac{\partial^2 \vartheta_s}{\partial \varphi^2} + (k-1) \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] \quad (4.6)$$

$$\vartheta_{F,c}^{(2)} = - \frac{[(\varphi^{(1)})^2]_c}{2} \left[(k+r-1) \frac{\partial \vartheta_F}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_s}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial^2 \vartheta_F}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{|V|^2}{2} \frac{r(k+r-1)}{k} \frac{\partial \vartheta_F}{\partial \varphi} \quad (4.7)$$

где

$$[(\varphi^{(1)})^2]_c = \frac{|V|^2}{2} \left\{ |\alpha|^2 \left(\frac{r^2}{k^2} + \frac{1}{\Omega^2} \right) + \frac{i}{\Omega} \frac{r}{k} (\alpha^* - \alpha) - \frac{1}{\Omega^2} (\alpha^* + \alpha - 1) \right\} \quad (4.8)$$

Формулы (4.6) и (4.7) можно преобразовать к виду

$$v_c^{(2)} = \frac{1}{2} [(\varphi^{(1)})^2]_c \left(\frac{\partial k}{\partial \varphi} \right)_{z_j} \frac{1}{k+r-1} - r \frac{|V|^2}{2}$$

$$\varepsilon \vartheta_c^{(2)} = \frac{1}{2} [(\varphi^{(1)})^2]_c \left(\frac{\partial q}{\partial \varphi} \right)_{z_j} \frac{1}{k+r-1} - r \frac{q}{k} \frac{|V|^2}{2}$$

Поскольку

$$\left(\frac{\partial k}{\partial \varphi} \right)_{z_j} = \frac{\partial k / \partial T_0}{\partial \varphi / \partial T_0} = \frac{(r-1)k - k^2 + (T_s^\circ - T_0)^2 (\partial^2 u^\circ / \partial T_0^2)}{k+r-1}$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial \varphi} \right)_{z_j} = \frac{(r-1)q - q^2 + (T_s^\circ - T_0)^2 (\partial^2 T_F^\circ / \partial T_0^2) / T_F^\circ}{k+r-1}$$

и $q > 0$, $r < 1.0$, то $(\partial k / \partial \varphi) < 0$, $(\partial q / \partial \varphi) < 0$ и, следовательно, вблизи резонанса $v_c^{(2)}$ и $\varepsilon \vartheta_{F,c}^{(2)}$ отрицательны, т. е. средняя температура пламени и скорость горения в акустическом поле с частотой, близкой к собственной частоте прогретого слоя k -фазы, уменьшаются по сравнению с их величинами в стационарном режиме, причем это уменьшение пропорционально квадрату амплитуды возмущения. Изменение средней температуры пламени объясняется тем, что некоторая часть энергии из пламени уносится с T и h волнами и необратимо теряется.

Поступила 18 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. З е л ь д о в и ч Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. ЖЭТФ, 1942, т. 12, вып. 11, 12.
2. Н о в о ж и л о в Б. В. Н е с т а ц и о н а р н о е горение порохов, имеющих переменную температуру поверхности. ПМТФ, 1967, № 1.
3. Г о с т и н ц е в Ю. А., П о х и л П. Ф., С у х а н о в Л. А. Полная система уравнений для нестационарных процессов при горении пороха в полужамкнутом объеме. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 1.
4. З е л ь д о в и ч Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1964, № 3.
5. Н о в и к о в С. С., Р я з а н ц е в Ю. С. К теории устойчивости горения порохов. ПМТФ, 1965, № 1.
6. И с т р а т о в А. Г., Л и б р о в и ч В. Б. Об устойчивости горения пороха. ПМТФ, 1964, № 5.
7. S u m m e r f i e l d M., C a v e n y L. H., B a t t i s t a, K u b o t a N., G o s t i n s e v Y u., I s o d a H. Rheory of dynamic Extinguishment of solid propellants with special reference to Nousteady heat feedback law. J. Space. Rockets, 1971, vol. 8, No. 3.
8. Н о в о ж и л о в Б. В. Переходные процессы при горении порохов. ПМТФ, 1962, № 5.
9. Л и б р о в и ч В. Б. О воспламенении порохов и взрывчатых веществ. ПМТФ, 1963, № 6.
10. Г о с т и н ц е в Ю. А., М а р г о л и н А. Л. О нестационарном горении тонких пластин пороха. ПМТФ, 1964, № 5.

11. Гостинцев Ю. А., Марголин А. Д. О нестационарном горении пороха под действием импульса давления. Физика горения и взрыва, 1965, № 2.
 12. Novikov S. S., Ryzantsev Yu. S. Extinction of propellant near the contact with a metal. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 2.
 13. Новожилов Б. В. Нелинейные колебания скорости горения пороха. ПМТФ, 1966, № 5.
 14. Истратов А. Г., Либрович В. Б., Новожилов Б. В. О приближенном методе в теории нестационарной скорости горения пороха. ПМТФ, 1964, № 3.
 15. Гостинцев Ю. А. Метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям в задачах нестационарного горения пороха. Физика горения и взрыва, 1967, т. 3, № 3.
 16. Новожилов Б. В. Горение пороха при гармонически меняющемся давлении. ПМТФ, 1965, № 6.
 17. Марголин А. Д., Светличный И. Б., Похил П. Ф., Цирульников А. С. Изменение акустической проводимости горячей поверхности пороха. ПМТФ, 1970, № 1.
 18. Мак-Клур Ф., Харт Р., Берд Дж. Ракетные двигатели твердого топлива как источники акустических колебаний. Сб. «Исследование ракетных двигателей на твердом топливе», М., Изд-во иностр. лит., 1963.
 19. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. О взаимодействии акустических волн с горячей поверхностью конденсированных систем. ПМТФ, 1966, № 2.
 20. Krier H., Summerfield M., Mathes H. B., Price E. W. Entropy waves produced in oscillatory combustion of solid propellants. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 11.
-