

УДК 533.6.011 + 517.948.34

## СИЛЬНЫЕ РАЗРЫВЫ В СТАЦИОНАРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. К. Хе

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mail: alekhe@hydro.nsc.ru

Рассматриваются стационарные трехмерные течения над ровным дном тяжелой идеальной жидкости со свободной поверхностью. Исследуются соотношения на скачке для течений с сильным разрывом. Показано, что параметры течения за скачком определяются некоторой кривой, являющейся аналогом  $(\theta, p)$ -диаграммы в газовой динамике. В частном классе решений построены ударная поляра и примеры течений с гидравлическим прыжком.

**Ключевые слова:** вихревая мелкая вода, гидравлический прыжок, интегродифференциальные уравнения.

**Введение.** Длинноволновое приближение широко используется при теоретическом анализе волновых процессов, поскольку в реальных жидкостях из-за наличия вязкости именно длинные волны определяют асимптотику решения при больших временах. Кроме того, применение такого приближения позволяет получить новые результаты при аналитическом исследовании нелинейных волновых процессов. Изучаемая в настоящей работе интегродифференциальная модель стационарных течений идеальной жидкости учитывает сдвиг скорости по вертикали и является более сложной по сравнению с классической моделью теории мелкой воды.

Сдвиговые плоскопараллельные течения с разрывами изучались в работе [1], течения баротропной жидкости — в работе [2]. В [3] получены обобщенные характеристики и условия гиперболичности системы интегродифференциальных уравнений, описывающих в приближении теории мелкой воды трехмерные стационарные сдвиговые течения идеальной жидкости в слое со свободной границей, в [4] построена теория пространственных простых волн.

Система уравнений, описывающих стационарные длинные волны на пространственных течениях идеальной жидкости, не приводится к дивергентному виду. В [5] отмечено, что уравнения течения можно привести к такому виду, чтобы недивергентные слагаемые являлись регулярными разрывными функциями. Это позволяет рассмотреть решения в классе функций с сильным разрывом, а также вывести из этих уравнений соотношения на скачке. В данной работе указанный подход применен к изучению стационарных гидравлических прыжков. Найдены соотношения, связывающие параметры течения за скачком, и предложены аналоги  $(\theta, p)$ -диаграмм в двумерной газовой динамике. В определенном классе решена задача о взаимодействии пространственных сдвиговых потоков.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00609), Международного фонда INTAS (код проекта 05-109-4107) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2826.2008.1).

**1. Постановка задачи.** Рассматривается система уравнений в длинноволновом приближении

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y + wu_z + p_x/\rho = 0, \quad uv_x + vv_y + wv_z + p_y/\rho = 0, \\ p_z = -\rho g, \quad u_x + v_y + w_z = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

описывающая стационарные пространственные течения идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Уравнения получаются из точных уравнений Эйлера с помощью асимптотического разложения по малому параметру  $\varepsilon = H_0/L_0$  ( $H_0, L_0$  — характерные вертикальный и горизонтальный масштабы; предполагается, что  $H_0 \ll L_0$ ). В системе (1.1)  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости жидкости;  $p$  — давление;  $\rho = \text{const}$  — плотность;  $x, y, z$  — декартовы координаты в пространстве.

Течение жидкости рассматривается в слое со свободной границей  $0 \leq z \leq h(x, y)$ . На свободной поверхности  $z = h(x, y)$  давление задается постоянным:  $p = p_0$ . На границах слоя жидкости должны выполняться кинематические условия  $w = 0$  при  $z = 0$  и  $w = uh_x + vh_y$  при  $z = h$ .

Анализ гиперболических свойств системы удобнее проводить в смешанных эйлерово-лагранжевых координатах  $x', y', \lambda$ , переход к которым осуществляется с помощью формул [3]

$$x' = x, \quad y' = y, \quad \Phi(x', y', \lambda) = z.$$

Здесь функция  $\Phi(x', y', \lambda)$  является решением задачи Коши

$$u(x, y, \Phi)\Phi_x + v(x, y, \Phi)\Phi_y = w(x, y, \Phi), \quad \Phi|_{x=0} = \Phi_0(y, \lambda)$$

(предполагается, что  $u(0, y, \Phi_0(y, \lambda)) \neq 0$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ). Функция  $\Phi_0(y, \lambda)$  выбирается таким образом, чтобы значение  $\lambda = 0$  соответствовало ровному дну, а  $\lambda = 1$  — свободной поверхности ( $\Phi_0(y, 0) = 0$ ,  $\Phi_0(y, 1) = h(0, y)$ ). В новых переменных области, занятой жидкостью, соответствует фиксированный слой  $\lambda \in [0, 1]$ , а система уравнений для стационарных пространственных течений принимает вид

$$uu_x + vu_y + gh_x = 0, \quad uv_x + vv_y + gh_y = 0, \quad (uH)_x + (vH)_y = 0. \quad (1.2)$$

Здесь введена новая искомая функция  $H(x, y, \lambda) = \Phi_\lambda(x, y, \lambda)$ , связанная с толщиной слоя

$$жидкости  $h$  соотношением  $h = \int_0^1 H d\lambda$ .$$

Система уравнений (1.2) интегродифференциальная, искомыми являются функции  $u, v, H$ , зависящие от переменных  $x, y, \lambda$ . В работе [6] (см. также [7]) теория гиперболичности дифференциальных уравнений обобщена на случай систем дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами. Обобщенными характеристиками являются некоторые кривые на плоскости переменных  $(x, y)$ , переменная  $\lambda$  рассматривается как параметр.

В работе [3] показано, что система (1.2) обладает двумя семействами характеристик. Обозначим через  $\mathbf{u}$  проекцию вектора скорости на горизонтальную плоскость:  $\mathbf{u} = (u, v)$ . Пусть  $q(x, y, \lambda)$  и  $\theta(x, y, \lambda)$  — модуль и угол наклона вектора  $\mathbf{u}$ :  $u = q \cos \theta$ ,  $v = q \sin \theta$ . Тогда обобщенными характеристиками непрерывного спектра являются траектории частиц [3]:  $dy/dx = \text{tg } \theta|_{\lambda=\nu}$ ,  $\nu \in (0, 1)$ , а характеристики дискретного спектра  $dy/dx = \text{tg } \gamma^i$  ( $i = 1, 2$ ) определяются характеристическим уравнением

$$\chi(\gamma) \equiv 1 - g \int_0^1 \frac{H d\lambda}{q^2 \sin^2(\theta - \gamma)} = 0. \quad (1.3)$$

Функция  $\chi(\gamma)$  является  $\pi$ -периодической, выпуклой вверх и определенной на множестве интервалов  $(\max_{\lambda} \theta + \pi k, \min_{\lambda} \theta + \pi(k + 1))$ ;  $k$  — целое число.

**2. Течения с разрывами.** В данном пункте используются соотношения на разрыве, полученные в [5] для уравнений стационарных течений (1.2). Показано, что множество состояний за скачком определяется некоторой кривой, аналогичной  $(\theta, p)$ -поляре в газовой динамике.

Рассмотрим течения с сильными разрывами, сосредоточенными на цилиндрической поверхности  $\Gamma$ , задаваемой уравнением  $S(x, y) = 0$  в пространстве переменных  $(x, y, \lambda)$ . Далее будем говорить о линии разрыва на плоскости  $(x, y)$  (ортогональной проекции  $\Gamma$  на плоскость  $(x, y)$ ) и считать  $\lambda$  параметром. Система (1.2) не приводится к дивергентному виду. В работе [5] предложено использовать следующую запись системы (1.2), эквивалентную исходной на гладких решениях:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)_{\lambda x} - (v(v_x - u_y))_{\lambda} &= 0, & \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)_{\lambda y} + (u(v_x - u_y))_{\lambda} &= 0, \\ (uH)_x + (vH)_y &= 0, \\ \left(\int_0^1 Hu^2 d\lambda + \frac{gh^2}{2}\right)_x + \left(\int_0^1 Huv d\lambda\right)_y &= 0, \\ \left(\int_0^1 Huv d\lambda\right)_x + \left(\int_0^1 Hv^2 d\lambda + \frac{gh^2}{2}\right)_y &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Рассмотрим класс решений системы (2.1), в котором функции  $u, v, H$  и вертикальная компонента вектора вихря  $v_x - u_y$ , а также их производные по переменной  $\lambda$  являются кусочно-гладкими функциями, имеющими разрыв первого рода на поверхности  $\Gamma$ . В [5] показано, что в данном классе функций понятие решения с сильным разрывом определено корректно (т. е. уравнения (2.1) имеют смысл в классе обобщенных функций) и система в виде (2.1) задает соотношения на разрыве.

Введем касательный  $\boldsymbol{\tau}$  и нормальный  $\boldsymbol{n}$  векторы к линии разрыва  $\Gamma$ . Касательную и нормальную компоненты вектора  $\boldsymbol{u}$  обозначим  $u_{\tau} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau}$  и  $u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$  соответственно. Квадратные скобки обозначают скачок функции при переходе через разрыв:  $[\varphi] = \varphi_2 - \varphi_1$  (индекс 1 соответствует состоянию перед фронтом разрыва; индекс 2 — состоянию за фронтом). В работе [5] выведены соотношения на сильном разрыве для модели пространственных сдвиговых течений. В случае стационарных течений эти соотношения принимают вид

$$[u_{\tau}] = 0, \quad [Hu_n] = 0, \quad [(u_n^2)_{\lambda}] = 0; \tag{2.2}$$

$$\left[ \int_0^1 Hu_n^2 d\lambda + \frac{gh^2}{2} \right] = 0; \tag{2.3}$$

$$\left[ \frac{u_n^2}{2} + gh \right] \leq 0. \tag{2.4}$$

Система соотношений (2.2)–(2.4) связывает параметры течения по обе стороны от фронта разрыва, а также компоненты нормали к фронту. В [5] также доказано, что параметры течения за фронтом скачка определяются однозначно при известных параметрах потока перед скачком и известных скорости фронта и векторе нормали к фронту скачка.

Отметим, что в стационарном случае из общих условий устойчивости разрыва следует условие сверхкритичности потока перед скачком, а именно: для угла  $\alpha$  линии наклона скачка к оси  $x$  должно выполняться условие [5]

$$\chi_1(\alpha) > 0,$$

где  $\chi_1(\alpha)$  — значение характеристической функции (1.3) в набегающем потоке:

$$\chi_1(\alpha) = 1 - g \int_0^1 \frac{H_1 d\lambda}{q_1^2 \sin^2(\theta_1 - \alpha)}.$$

Если  $\gamma^1, \gamma^2$  — углы наклона характеристик к оси  $x$  (корни функции  $\chi_1(\gamma)$ ), то в силу выпуклости функции  $\chi_1(\gamma)$  угол  $\alpha$  должен находиться в интервале  $\gamma^1 < \alpha < \gamma^2$ . Это условие аналогично следующему условию: в случае двумерного стационарного течения газа угол наклона косоугольного скачка уплотнения к вектору скорости набегающего потока должен быть больше угла Маха.

В стационарном случае при исследовании соотношений на разрыве удобно использовать полярные координаты на плоскости годографа. Из соотношений (2.2), (2.3) следует, что параметры потока за фронтом скачка определяются формулами

$$q_2 = \sqrt{q_1^2 - K}, \quad \cos(\theta_2 - \alpha) = \frac{q_1 \cos(\theta_1 - \alpha)}{\sqrt{q_1^2 - K}}; \quad (2.5)$$

$$H_2 = \frac{H_1 q_1 \sin(\theta_1 - \alpha)}{\sqrt{q_1^2 \sin^2(\theta_1 - \alpha) - K}}, \quad (2.6)$$

где  $K$  — неизвестная величина, не зависящая от  $\lambda$ . Зависимость  $K$  от угла  $\alpha$  определяется из следующего соотношения на разрыве:

$$\begin{aligned} \int_0^1 H_1 q_1 \sin(\theta_1 - \alpha) \sqrt{q_1^2 \sin^2(\theta_1 - \alpha) - K} d\lambda + \frac{g}{2} \left( \int_0^1 \frac{H_1 q_1 \sin(\theta_1 - \alpha)}{\sqrt{q_1^2 \sin^2(\theta_1 - \alpha) - K}} d\lambda \right)^2 = \\ = \int_0^1 H_1 q_1^2 \sin^2(\theta_1 - \alpha) d\lambda + \frac{g}{2} \left( \int_0^1 H_1 d\lambda \right)^2. \end{aligned}$$

Подробно это уравнение исследовано в работе [5].

Уравнения (2.5), (2.6) с учетом уравнения для  $K$  позволяют найти параметры течения за фронтом скачка. Зависимость  $K(\alpha)$  определяется параметрически, причем в качестве параметра выбирается угол  $\alpha$ , определяющий угол наклона скачка.

Пусть  $\theta_2^0$  — угол наклона вектора скорости относительно оси  $x$  при  $\lambda = 0$ , удовлетворяющий соотношению

$$\cos(\theta_2^0 - \alpha) = \frac{q_1^0 \cos(\theta_1^0 - \alpha)}{\sqrt{(q_1^0)^2 - K(\alpha)}}. \quad (2.7)$$

Проинтегрировав уравнение (2.6), получим выражение для глубины слоя жидкости за скачком

$$h_2 = \int_0^1 \frac{H_1 q_1 \sin(\theta_1 - \alpha)}{\sqrt{q_1^2 \sin^2(\theta_1 - \alpha) - K(\alpha)}} d\lambda. \quad (2.8)$$

Кривая на плоскости  $(\theta_2^0, h_2)$ , заданная параметрически уравнениями (2.7), (2.8), определяет возможные состояния за гидравлическим прыжком и представляет собой аналог  $(\theta, p)$ -диаграммы в стационарной двумерной газовой динамике. Отметим, что если один из параметров  $(\theta_2^0$  или  $h_2)$  известен, то, обращая зависимость (2.7) или (2.8), можно определить угол  $\alpha$ , а затем по формулам (2.5), (2.6) — функции  $q_2, \theta_2, H_2$ .

Таким образом, совокупность состояний за различными скачками, в которые может перейти некоторое фиксированное течение, образует однопараметрическое семейство. В качестве параметра могут использоваться угол  $\alpha$  наклона скачка к оси  $x$ , глубина потока за скачком  $h_2$  либо угол  $\theta_2^0$  между вектором скорости на дне и осью  $x$ .

**3. Течения с постоянным по глубине модулем вектора скорости.** Ниже исследуется класс течений с постоянным по глубине модулем скорости. Выводятся уравнения, позволяющие определить угол  $\alpha$  наклона скачка при известном направлении вектора скорости за скачком на дне, построены  $(\theta^0, h)$ -диаграммы.

В работе [3] показано, что система уравнений (1.2) имеет частные решения, удовлетворяющие условиям

$$q_\lambda = 0, \quad \theta_\lambda/H = A \quad (A = \text{const}). \quad (3.1)$$

Равенство  $\theta_\lambda/H = A$  означает, что угол  $\theta$  линейно зависит от эйлеровой переменной  $z$ :

$$\theta(z) = \theta^0 + A \int_0^\lambda \Phi_{\lambda_1}(x, y, \lambda_1) d\lambda_1 = \theta^0 + Az$$

( $\theta^0$  — значение  $\theta$  на дне при  $\lambda = 0$ ).

Отметим, что при переходе через скачок условия (3.1) сохраняются. Действительно, соотношения на скачке (2.2), записанные в переменных  $q, \theta$ , имеют вид

$$q_1 \cos(\alpha - \theta_1) = q_2 \cos(\alpha - \theta_2), \\ H_1 q_1 \sin(\alpha - \theta_1) = H_2 q_2 \sin(\alpha - \theta_2), \quad (q_1^2)_\lambda = (q_2^2)_\lambda.$$

Из последнего уравнения получаем  $q_{2\lambda} = 0$ , а из первых двух —  $\theta_{2\lambda}/H_2 = \theta_{1\lambda}/H_1 = A$ .

Таким образом, если течение перед фронтом удовлетворяет условиям (3.1), то течение за фронтом сильного разрыва принадлежит классу решений, также удовлетворяющих условиям (3.1). На разрыве должны выполняться три соотношения (которые следуют из (2.2), (2.3)):

$$q_1 \cos(\alpha - \theta_1^0) = q_2 \cos(\alpha - \theta_2^0), \quad q_1 \cos(\alpha - \theta_1^1) = q_2 \cos(\alpha - \theta_2^1); \quad (3.2) \\ q_1^2 h_1 + \frac{q_1^2}{2A} (\sin 2(\alpha - \theta_1^1) - \sin 2(\alpha - \theta_1^0)) + g h_1^2 = \\ = q_2^2 h_2 + \frac{q_2^2}{2A} (\sin 2(\alpha - \theta_2^1) - \sin 2(\alpha - \theta_2^0)) + g h_2^2 \quad (3.3) \\ (A h_1 = \theta_1^1 - \theta_1^0, \quad A h_2 = \theta_2^1 - \theta_2^0, \quad \theta_i^0 = \theta_i|_{\lambda=0}, \quad \theta_i^1 = \theta_i|_{\lambda=1}),$$

связывающие четыре параметра  $q_2, \theta_2^0, h_2, \alpha$ .

На рис. 1 приведен пример течения с гидравлическим прыжком вдоль наклонных стенок, имеющих форму развертывающихся поверхностей. Частицы движутся из области I в область II, в каждой из которых их движение горизонтально и параллельно образующей стенки на той же высоте.

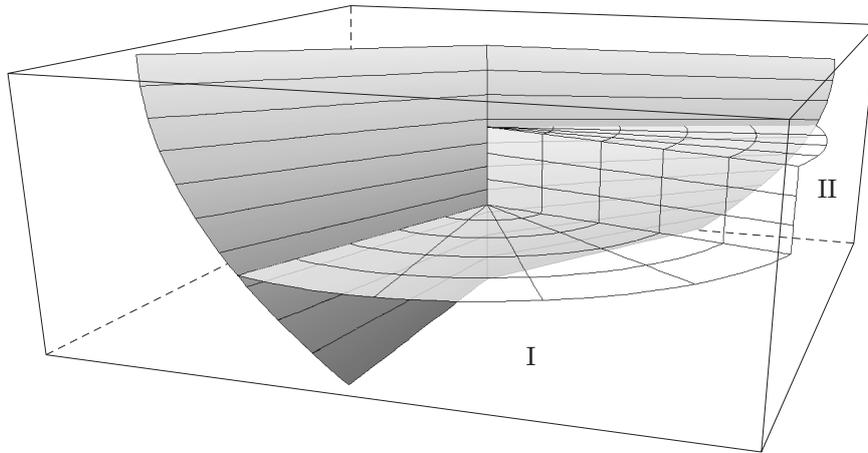


Рис. 1. Гидравлический прыжок:  
I — область перед скачком; II — область за скачком

Пусть параметры набегающего потока удовлетворяют (3.1). Получим уравнения, позволяющие определять угол наклона скачка и параметры течения за скачком по известному углу  $\theta_2^0$ . Из соотношений на скачке (3.2) следует

$$q_2 = q_1 \frac{\cos(\alpha - \theta_1^0)}{\cos(\alpha - \theta_2^0)}, \quad h_2 = A^{-1} \left( \alpha - \theta_2^0 - \arccos \frac{\cos(\alpha - \theta_1^0) \cos(\alpha - \theta_2^0)}{\cos(\alpha - \theta_1^0)} \right).$$

Подставляя эти выражения в соотношение (3.3), получаем уравнение для определения функции  $\alpha(\theta_2^0)$ :

$$\begin{aligned} A^{-1} q_1^2 \left( Ah_1 - \sin 2(\alpha - \theta_1^0) \sin^2 Ah_1 - \frac{1}{2} \cos 2(\alpha - \theta_1^0) \sin 2Ah_1 \right) + gh_1^2 = \\ = A^{-1} q_2^2(\alpha, \theta_2^0) \left( Ah_2 - \cos(\alpha - \theta_2^0) \sin(\alpha - \theta_2^0) + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - \left( \frac{\cos(\alpha - \theta_1^0) \cos(\alpha - \theta_2^0)}{\cos(\alpha - \theta_1^0)} \right)^2} \frac{\cos(\alpha - \theta_1^0) \cos(\alpha - \theta_2^0)}{\cos(\alpha - \theta_1^0)} \right) + gh_2^2(\alpha, \theta_2^0). \end{aligned}$$

Для определения параметров течения за разрывом по аналогии с теорией косых скачков уплотнения в двумерной газовой динамике [8] можно использовать годограф скачков. Для данных течений аналогом  $(\theta, p)$ -поля, используемых в стационарной двумерной газовой динамике [8], являются диаграммы, построенные в плоскости переменных  $(\theta^0, h)$ .

Систему координат выберем таким образом, чтобы выполнялось равенство  $\theta_1^0 = 0$ . Из соотношений на разрыве (3.2) получаем

$$q_1 \cos \alpha = q_2 \cos(\alpha - \theta_2^0), \quad q_1 \cos(\alpha - Ah_1) = q_2 \cos(\alpha - \theta_2^0 - Ah_2).$$

Из первого соотношения можно выразить  $q_2$ :

$$q_2 = q_1 / (\cos \theta_2^0 + \sin \theta_2^0 \operatorname{tg} \alpha).$$

Второе соотношение, разделенное на первое, преобразуется к квадратному уравнению относительно  $\operatorname{tg} \alpha$ :

$$\begin{aligned} \sin Ah_1 \operatorname{tg} \theta_2^0 \operatorname{tg}^2 \alpha + (\cos Ah_1 \operatorname{tg} \theta_2^0 + \sin Ah_1 - \cos Ah_2 \operatorname{tg} \theta_2^0 - \sin Ah_2) \operatorname{tg} \alpha + \\ + \cos Ah_1 - \cos Ah_2 + \sin Ah_2 \operatorname{tg} \theta_2^0 = 0. \quad (3.4) \end{aligned}$$

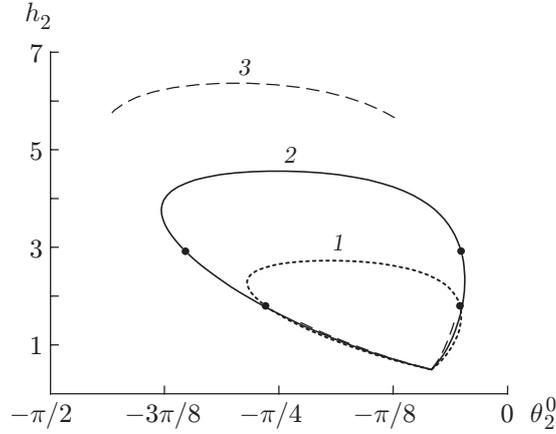


Рис. 2.  $(\theta^0, h)$ -диаграмма:  
 1 —  $q_1 = 2$ ; 2 —  $q_1 = 2,5$ ; 3 —  $q_1 = 2,9$

Соотношение (3.3) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} (q_1^2 h_1 + g h_1^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \frac{q_1^2}{2A} (2 \operatorname{tg} \alpha (\cos 2Ah_1 - 1) + (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1) \sin 2Ah_1) = \\ = (q_2^2 h_2 + g h_2^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \frac{q_2^2}{2A} (2 \operatorname{tg} \alpha (\cos 2(\theta_2^0 + Ah_2) - \cos 2\theta_2^0) + \\ + (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)(\sin 2(\theta_2^0 + Ah_2) - \sin 2\theta_2^0)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда, выражая  $\operatorname{tg} \alpha$  из уравнения (3.4):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = \frac{-\cos Ah_1 \operatorname{tg} \theta_2^0 - \sin Ah_1 + \cos Ah_2 \operatorname{tg} \theta_2^0 + \sin Ah_2}{2 \sin Ah_1 \operatorname{tg} \theta_2^0} \pm \\ \pm ((\cos Ah_1 \operatorname{tg} \theta_2^0 + \sin Ah_1 - \cos Ah_2 \operatorname{tg} \theta_2^0 - \sin Ah_2)^2 - \\ - 4 \sin Ah_1 \operatorname{tg} \theta_2^0 (\cos Ah_1 - \cos Ah_2 + \sin Ah_2 \operatorname{tg} \theta_2^0))^{1/2} / (2 \sin Ah_1 \operatorname{tg} \theta_2^0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

и подставляя полученное выражение в (3.5), получим искомое уравнение, связывающее величины  $\theta_2^0$  и  $h_2$ :

$$P(\theta_2^0, h_2) = 0.$$

Знаки “+” и “−” в выражении для  $\operatorname{tg} \alpha$  в (3.6) соответствуют волнам, движущимся вправо или влево.

На рис. 2 в плоскости переменных  $(\theta_2^0, h_2)$  представлены три поляры, полученные при различных значениях  $q_1$ . Точки соответствуют состояниям, при которых поток за скачком переходит из сверхкритического состояния в докритическое. При  $q_1 = 2,9$  кривая является разрывной (двусвязной), что обусловлено отсутствием решения в рассматриваемом классе течений (соотношения на разрыве и их разрешимость исследованы в [5]).

**4. Взаимодействие сдвиговых потоков.** В классе течений, определяемом условиями (3.1), построим решение задачи о взаимодействии сдвиговых потоков. Предположим, что два течения с параметрами  $q_1, \theta_1(\lambda)$  и  $q_2, \theta_2(\lambda)$ , удовлетворяющими соотношениям (3.1) с одной и той же константой  $A$ , занимают области I и II (рис. 3). Пусть направления векторов скоростей удовлетворяют условию  $\theta_2(0) > \theta_1(0)$ , означающему, что потоки “набегают” друг на друга. Требуется построить течение в области взаимодействия потоков.

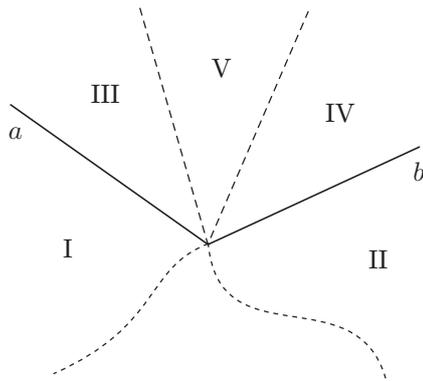


Рис. 3

Рис. 3. Взаимодействие сдвиговых потоков:

I, II — области набегающих потоков; III, IV — течения за скачками; V — область сопряжения течений III и IV; a, b — гидравлические прыжки

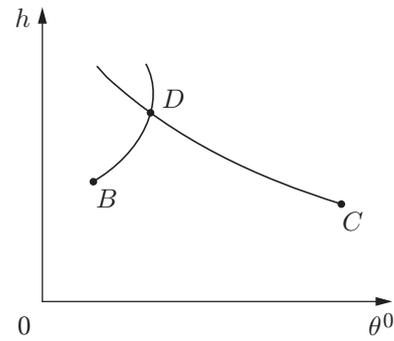


Рис. 4

Рис. 4. Решение задачи о взаимодействии потоков:

B — состояние I; C — состояние II; D — состояния III–V

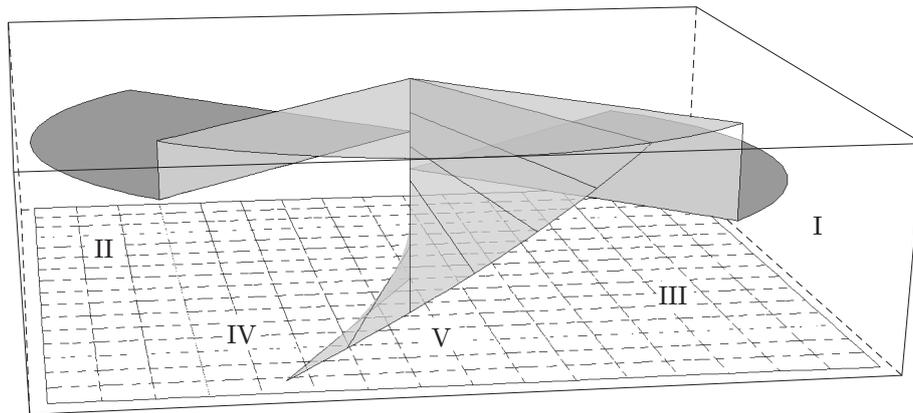


Рис. 5. Взаимодействие сдвиговых потоков:

I, II — течения до взаимодействия; III, IV — течения за скачком; V — область сопряжения

В силу того что при переходе через скачок значение константы  $A$  не меняется, можно искать решение задачи о взаимодействии потоков в классе разрывных течений (3.1). Для этого из точек  $B$  и  $C$ , соответствующих состояниям I и II, строятся  $(\theta^0, h)$ -диаграммы (рис. 4). Полученные кривые пересекаются, вообще говоря, в двух точках. В теории косых скачков уплотнения газовой динамики принято выбирать состояние, соответствующее нижней точке пересечения диаграмм [9], поэтому в данном случае также выбирается точка  $D$ , соответствующая меньшему значению  $h$ .

Точка  $D$  пересечения диаграмм определяет угол наклона вектора скорости на дне  $\theta^0$  и глубину слоя жидкости после прохождения потоков через скачки (течения в областях III и IV на рис. 3). В силу того что направление векторов скоростей на дне и константа  $A$  в областях III и IV одинаковы, направления скоростей в течениях за скачком также одинаковы:

$$\theta = \theta_3 = \theta_4 = \theta_3^0 + Az.$$

Однако величины  $q_3$  и  $q_4$ , вообще говоря, различны, поэтому течения в областях III и IV будут сопрягаться в зоне V по контактному разрыву, имеющему форму развертывающейся поверхности  $\theta = \theta_3^0 + Az$ . На рис. 5 приведен пример конфигурации течения, возникающего при взаимодействии сдвиговых потоков.

Автор благодарен В. М. Тешукову за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 11–20.
2. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении баротропной жидкости // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 73–81.
3. **Тешуков В. М.** Пространственные стационарные длинные волны на сдвиговом потоке // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 28–39.
4. **Тешуков В. М.** Пространственные простые волны на сдвиговом течении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 28–40.
5. **Тешуков В. М., Хе А. К.** Модель сильного разрыва для уравнений пространственных длинных волн, распространяющихся на сдвиговом течении со свободной границей // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 206–213.
6. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–559.
7. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
8. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
9. **Меньщиков В. М.** Газовая динамика. Задачи и упражнения: Учеб. пособие / В. М. Меньщиков, В. М. Тешуков. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1990.

*Поступила в редакцию 9/X 2007 г.,  
в окончательном варианте — 29/XII 2007 г.*