УДК 539.3

ОБ УСЛОВИЯХ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ СТАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Рассматриваются соотношения нелинейной модели теории упругости. В качестве характеристик напряженно-деформированного состояния тела выбираются тензоры Коши и градиента деформации. Устанавливаются достаточные условия, при которых статические уравнения упругости имеют эллиптический тип. Эти условия выражаются в виде ограничений на производные от упругого потенциала по характеристикам меры деформаций. Рассмотрены случаи анизотропного и изотропного тела, в том числе когда мерой деформации служит тензор Альманси. Исследование производится для плоского деформирования тела в переменных актуального состояния.

Систему статических уравнений нелинейной теории упругости составляют уравнения равновесия и неразрывности, определяющие соотношения и представления меры деформации через перемещения. Рассмотрим вид этих соотношений в случае плоского деформирования в декартовых координатах актуального состояния, выбирая в качестве характеристик напряженно-деформированного состояния тензоры напряжений Коши и градиента деформации.

Полагаем, что деформирование упругого тела из исходного состояния (с декартовыми координатами частиц тела x_k^0) в актуальное (с координатами x_k) описывается гладкими обратимыми функциями

$$x_k = x_k(x_1^0, x_2^0, x_3^0), \qquad \det\Big(\frac{\partial x_k}{\partial x_l^0}\Big) \neq 0 \qquad (k, l = 1,\ 2,\ 3),$$

которым отвечают компоненты перемещения (u_k), вводимые как разности актуальных и исходных координат: $u_k(x_1, x_2, x_3) = x_k - x_k^0(x_1, x_2, x_3)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$. При плоской деформации (параллельной плоскости x_1, x_2) перемещение является двумерным вектором $(u_1$, u_2, $0)$, компоненты которого зависят только от координат на плоскости деформирования $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $u_3 = 0$. Рассмотрим двумерные тензоры: градиент деформации $C = (C_{\alpha\beta})$ и градиент перемещения $U = (U_{\alpha\beta})$, компоненты которых определяются как функции актуальных координат формулами [1]

$$C_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta^0}, \qquad U_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}. \tag{1}$$

Здесь и далее греческий индекс принимает значения 1, 2. Будем использовать тензор C в качестве меры деформации.

Градиент деформации можно представить через градиент перемещения. Рассмотрим для этого соотношения

$$x_\alpha = x_\alpha^0 + u_\alpha, \qquad \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta^0} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\sigma}\,\frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\beta^0}$$

(по повторяющемуся индексу предполагается суммирование) и запишем последнее из них с учетом (1) в компонентной и инвариантной формах

$$(\delta_{\alpha\sigma} - U_{\alpha\sigma})C_{\sigma\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad (\delta - U)C = \delta, \qquad C = (\delta - U)^{-1} \tag{2}$$

($\delta = (\delta_{\alpha\beta})$ — единичный тензор). Таким образом, градиент деформации является тензором, обратным к разности единичного тензора и градиента перемещения. Представим обратный тензор в зависимости от исходного тензора и его инвариантов. Пусть $H = \delta - U$ — двумерный тензор, H_1, H_2 — его базисные инварианты. Легко видеть, что тождество Гамильтона — Кели для этого тензора, записанное в формах [1]

$$H^2 - H_1 H + H_2\delta = 0, \qquad H\left(\frac{H_1}{H_2}\,\delta - \frac{1}{H_2}\,H\right) = \delta,$$

для обратного тензора H^{-1} дает выражение

$$H^{-1} = \frac{H_1}{H_2}\,\delta - \frac{1}{H_2}\,H, \tag{3}$$

в котором инварианты H_1, H_2 представляются через базисные инварианты U_1, U_2 градиента перемещения формулами

$$H_1 = 2 - U_1, \quad H_2 = 1 - U_1 + U_2, \quad U_1 = U_{11} + U_{22}, \quad U_2 = U_{11}U_{22} - U_{12}U_{21}. \tag{4}$$

Из (2)–(4) следует, что градиент деформации выражается через градиент перемещения квазилинейной зависимостью

$$\begin{gathered} C = \frac{(2 - U_1)\delta - U}{1 - U_1 + U_2}, \qquad C_{\alpha\beta} = \frac{(2 - U_1)\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha\beta}}{1 - U_1 + U_2}, \\ U_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}, \qquad U_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \qquad U_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \end{gathered} \tag{5}$$

Уравнение неразрывности в форме связи между плотностью материала ρ и градиентом деформации можно получить из закона сохранения массы тела с исходной плотностью ρ_0 и произвольным объемом V_0 при деформировании последнего в объем V

$$\int\limits_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int\limits_{V} \rho\, dV = \int\limits_{V_0} \rho \left|\frac{\partial x_\alpha}{\partial x^0_\beta}\right| dV_0$$

в виде соотношения [2] $\rho_0 = \rho|\partial x_\alpha/\partial x^0_\beta|$ или

$$\rho_0 = \rho C_2, \qquad C_2 = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}, \tag{6}$$

где C_2 — второй базисный инвариант градиента деформации.

Напряженное состояние тела в актуальном положении будем характеризовать симметричным тензором напряжений Коши $P = (P_{\alpha\beta})$. Определяющие соотношения возьмем в форме зависимости тензора Коши от градиента деформации. Эта зависимость является следствием уравнения баланса энергии, примененного к элементарному адиабатическому процессу, отвечающему произвольному виртуальному смещению (δx_β) частиц в актуальном положении [3]

$$\frac{1}{\rho}\,P_{\alpha\beta}\,\frac{\partial \delta x_\beta}{\partial x_\alpha} = \delta F,$$

где F — упругий потенциал, рассматриваемый как функция компонент градиента деформации. С учетом соотношений

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial C_{\beta\omega}}\,\delta C_{\beta\omega}, \qquad \delta C_{\beta\omega} = \frac{\partial \delta x_\beta}{\partial x^0_\omega} = C_{\alpha\omega}\,\frac{\partial \delta x_\beta}{\partial x_\alpha}$$

это уравнение можно представить в форме

$$\Big(\frac{1}{\rho}\,P_{\alpha\beta}-C_{\alpha\omega}\,\frac{\partial F}{\partial C_{\beta\omega}}\Big)\,\frac{\partial\delta x_\beta}{\partial x_\alpha}=0,$$

откуда ввиду произвольности градиентов виртуальных смещений следуют определяющие соотношения

$$P_{\alpha\beta}=\rho C_{\alpha\omega}\,\frac{\partial F}{\partial C_{\beta\omega}}. \tag{7}$$

Наконец, уравнения равновесия упругого тела произвольного объема V и поверхности Σ (с внешней нормалью (n_α)) в актуальных переменных следуют из условия равенства нулю главного вектора приложенных к телу объемных сил (с плотностью f_β) и поверхностных сил (с плотностью $P_{\beta\alpha}n_\alpha$):

$$0=\int\limits_V \rho f_\beta\,dV+\int\limits_\Sigma P_{\beta\alpha}n_\alpha\,d\sigma=\int\limits_V\Big(\rho f_\beta+\frac{\partial P_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}\Big)\,dV$$

и имеют вид [1]

$$\rho f_\beta+\frac{\partial P_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}=0. \tag{8}$$

Система соотношений (5)–(8), рассматриваемая относительно величин ρ, u_α, $C_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}$ (ρ_0, F и f_α полагаются заданными), является полной и определяет состояние равновесия упругого тела при плоской деформации. Эта система справедлива как для изотропного, так и для анизотропного (допускающего плоскую деформацию) тела.

Легко видеть, что из системы (5)–(8) следуют уравнения второго порядка относительно перемещений. Из нее можно получить также уравнения первого порядка для градиентов деформации, имеющие более простую структуру. Для этого достаточно исключить из системы плотность, напряжения и перемещения. Для исключения плотности и напряжений представим их через градиент деформации:

$$\rho=\frac{\rho_0}{C_2},\qquad P_{\alpha\beta}=\frac{\rho_0}{C_2}\,C_{\alpha\omega}\,\frac{\partial F}{\partial C_{\beta\omega}}. \tag{9}$$

Исключение перемещений приводит к уравнениям совместности градиентов деформаций

$$\frac{\partial C_{\beta1}}{\partial x_\sigma}\,C_{\sigma2}=\frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x_1^0\partial x_2^0}=\frac{\partial C_{\beta2}}{\partial x_\sigma}\,C_{\sigma1}. \tag{10}$$

Система четырех уравнений (8), (10) принимает вид

$$\frac{\partial P_{\beta\alpha}}{\partial C_{\sigma\tau}}\,\frac{\partial C_{\sigma\tau}}{\partial x_\alpha}+\rho f_\beta=0,\qquad C_{\sigma2}\,\frac{\partial C_{\beta1}}{\partial x_\sigma}-C_{\sigma1}\,\frac{\partial C_{\beta2}}{\partial x_\sigma}=0, \tag{11}$$

где напряжения и плотность определены выражениями (9), и представляет собой систему уравнений первого порядка для градиентов деформации.

Исследуем тип системы (11). Для удобства запишем систему в компактной форме, вводя в рассмотрение четырехмерные векторы и матрицы:

$$A_{kl.\nu}\,\frac{\partial V_k}{\partial x_\nu}+A_l=0, \tag{12}$$

где латинский индекс принимает значения 1, 2, 3, 4. Кроме того, здесь положено

$$(V_1, V_2, V_3, V_4) = (C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}), \qquad (A_1, A_2, A_3, A_4) = (\rho f_1, \rho f_2, 0, 0),$$

$$(A_{kl.1}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P_{11}}{\partial C_{11}} & \dfrac{\partial P_{12}}{\partial C_{11}} & C_{12} & 0 \\ \dfrac{\partial P_{11}}{\partial C_{12}} & \dfrac{\partial P_{12}}{\partial C_{12}} & -C_{11} & 0 \\ \dfrac{\partial P_{11}}{\partial C_{21}} & \dfrac{\partial P_{12}}{\partial C_{21}} & 0 & C_{12} \\ \dfrac{\partial P_{11}}{\partial C_{22}} & \dfrac{\partial P_{12}}{\partial C_{22}} & 0 & -C_{11} \end{pmatrix}, \quad (A_{kl.2}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P_{21}}{\partial C_{11}} & \dfrac{\partial P_{22}}{\partial C_{11}} & C_{22} & 0 \\ \dfrac{\partial P_{21}}{\partial C_{12}} & \dfrac{\partial P_{22}}{\partial C_{12}} & -C_{21} & 0 \\ \dfrac{\partial P_{21}}{\partial C_{21}} & \dfrac{\partial P_{22}}{\partial C_{21}} & 0 & C_{22} \\ \dfrac{\partial P_{21}}{\partial C_{22}} & \dfrac{\partial P_{22}}{\partial C_{22}} & 0 & -C_{21} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi(x_1, x_2) = 0$ — уравнение характеристической кривой системы (12). Рассмотрим характеристическую матрицу (Q_{kl}):

$$(Q_{kl}) = (A_{kl.\nu} n_\nu), \qquad n_\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} |\nabla \varphi|^{-1},$$

$$(Q_{kl}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P_{\sigma 1}}{\partial C_{11}} n_\sigma & \dfrac{\partial P_{\sigma 2}}{\partial C_{11}} n_\sigma & C_{\sigma 2} n_\sigma & 0 \\ \dfrac{\partial P_{\sigma 1}}{\partial C_{12}} n_\sigma & \dfrac{\partial P_{\sigma 2}}{\partial C_{12}} n_\sigma & -C_{\sigma 1} n_\sigma & 0 \\ \dfrac{\partial P_{\sigma 1}}{\partial C_{21}} n_\sigma & \dfrac{\partial P_{\sigma 2}}{\partial C_{21}} n_\sigma & 0 & C_{\sigma 2} n_\sigma \\ \dfrac{\partial P_{\sigma 1}}{\partial C_{22}} n_\sigma & \dfrac{\partial P_{\sigma 2}}{\partial C_{22}} n_\sigma & 0 & -C_{\sigma 1} n_\sigma \end{pmatrix}.$$

Известно [4], что система уравнений (12) будет эллиптического типа, если не имеет вещественных корней характеристическое уравнение

$$\det (Q_{kl}) = 0. \tag{13}$$

Выполнение уравнения (13) (существование его вещественных корней) эквивалентно существованию ненулевого правого вектор-столбца (d_l) характеристической матрицы

$$Q_{kl} d_l = 0. \tag{14}$$

В этом случае, вводя для компонент собственного вектора обозначения $d_1 = a_1$, $d_2 = a_2$, $d_3 = b_1$, $d_4 = b_2$ и записывая систему (14) в развернутом виде, получим

$$\begin{aligned} Q_{1l} d_l &= \frac{\partial P_{\sigma\tau}}{\partial C_{11}} n_\sigma a_\tau + C_{\sigma 2} n_\sigma b_1 = 0, & Q_{2l} d_l &= \frac{\partial P_{\sigma\tau}}{\partial C_{12}} n_\sigma a_\tau - C_{\sigma 1} n_\sigma b_1 = 0, \\ Q_{3l} d_l &= \frac{\partial P_{\sigma\tau}}{\partial C_{21}} n_\sigma a_\tau + C_{\sigma 2} n_\sigma b_2 = 0, & Q_{4l} d_l &= \frac{\partial P_{\sigma\tau}}{\partial C_{22}} n_\sigma a_\tau - C_{\sigma 1} n_\sigma b_2 = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Исключение из (15) величин b_1 и b_2 приводит к однородной алгебраической системе для a_1, a_2

$$S_{\lambda\tau} a_\tau = 0, \qquad S_{\lambda\tau} = \frac{\partial P_{\sigma\tau}}{\partial C_{\lambda\mu}} n_\sigma n_\omega C_{\omega\mu}. \tag{16}$$

Тензор $(S_{\lambda\tau})$ из (16) симметричен. Действительно, если воспользоваться выражением для производных от инвариантов C_1, C_2 градиента деформации по его компонентам [1]

$$C_1 = \delta_{\sigma\tau}C_{\tau\sigma}, \quad 2C_2 = (\delta_{\sigma\tau}C_{\tau\sigma})^2 - C_{\sigma\tau}C_{\tau\sigma}, \quad \frac{\partial C_1}{\partial C_{\lambda\mu}} = \delta_{\mu\lambda}, \quad \frac{\partial C_2}{\partial C_{\lambda\mu}} = C_1\delta_{\mu\lambda} - C_{\mu\lambda} \tag{17}$$

и представлением (3) для обратного к градиенту деформации тензора

$$C^{-1} = \frac{1}{C_2}(C_1\delta - C), \qquad C^{-1}_{\mu\lambda} = \frac{1}{C_2}(C_1\delta_{\mu\lambda} - C_{\mu\lambda}) \qquad (C^{-1}_{\mu\lambda} \equiv (C^{-1})_{\mu\lambda}), \tag{18}$$

то производную от плотности (6) по компонентам градиента деформации можно представить формулой

$$\frac{\partial\rho}{\partial C_{\lambda\mu}} = -\frac{\rho_0}{C_2^2}\frac{\partial C_2}{\partial C_{\lambda\mu}} = -\frac{\rho_0}{C_2^2}(C_1\delta_{\mu\lambda} - C_{\mu\lambda}) = -\rho C^{-1}_{\mu\lambda}. \tag{19}$$

Обращаясь к (7) и используя (17)–(19), можно установить, что производные от напряжений по деформациям определяются выражениями

$$\frac{\partial P_{\sigma\tau}}{\partial C_{\lambda\mu}} = \rho\frac{\partial F}{\partial C_{\tau\beta}}(\delta_{\mu\beta}\delta_{\lambda\sigma} - C^{-1}_{\mu\lambda}C_{\sigma\beta}) + \rho C_{\sigma\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial C_{\tau\beta}\partial C_{\lambda\mu}}. \tag{20}$$

Тензор (16) с учетом (20) допускает представление

$$S_{\lambda\tau} = \rho\frac{\partial F}{\partial C_{\tau\beta}}(n_\lambda n_\omega C_{\omega\beta} - n_\sigma C_{\sigma\beta}n_\omega C_{\omega\mu}C^{-1}_{\mu\lambda}) + \rho C_{\sigma\beta}n_\sigma\frac{\partial^2 F}{\partial C_{\tau\beta}\partial C_{\lambda\mu}}C_{\omega\mu}n_\omega.$$

В силу соотношений

$$n_\omega C_{\omega\mu}C^{-1}_{\mu\lambda} = n_\omega\delta_{\omega\lambda} = n_\lambda,$$

$$n_\lambda n_\omega C_{\omega\beta} - n_\sigma C_{\sigma\beta}n_\omega C_{\omega\mu}C^{-1}_{\mu\lambda} = n_\lambda n_\omega C_{\omega\beta} - n_\lambda n_\sigma C_{\sigma\beta} = 0$$

первое слагаемое в этом представлении обращается в нуль и тензор $(S_{\lambda\tau})$ принимает вид, из которого его симметричность становится очевидной:

$$S_{\lambda\tau} = \rho n_\sigma C_{\sigma\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial C_{\tau\beta}\partial C_{\lambda\mu}}n_\omega C_{\omega\mu} = S_{\tau\lambda}. \tag{21}$$

При сделанном допущении система (16) должна определять ненулевой вектор (a_1, a_2) (при $a_1 = a_2 = 0$ уравнения (15), если учесть, что $n_\sigma n_\sigma = 1$, $C_2 \neq 0$, дают $b_1 = b_2 = 0$, что противоречит исходным посылкам), поэтому должно быть $\det(S_{\lambda\tau}) = 0$. Умножая уравнение (16) на a_λ и суммируя по λ, найдем, что в рассматриваемом случае должна равняться нулю квадратичная форма $S_{\lambda\tau}a_\tau a_\lambda = 0$.

Теперь потребуем, чтобы для любого вектора (a_α) была положительно- или отрицательно-определенной квадратичная форма $S_{\lambda\tau}a_\tau a_\lambda > 0$ или в силу (21) и $\rho > 0$ форма

$$A_{\tau\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial C_{\tau\beta}\partial C_{\lambda\mu}}A_{\lambda\mu} > 0 \qquad (A_{\tau\beta} = a_\tau n_\sigma C_{\sigma\beta}). \tag{22}$$

Тогда согласно условиям Сильвестра [5] $\det(S_{\lambda\tau}) > 0$ и система (16) имеет только нулевое решение $(a_1, a_2) = (0, 0)$. Уравнение (15) при этом определяет только нулевой вектор $(b_1, b_2) = (0, 0)$. Тем самым система (14) не будет иметь ненулевых собственных векторов (т. е. ее определитель отличен от нуля), что эквивалентно отсутствию действительных корней характеристического уравнения (13). В этом случае квазилинейная система (12) будет эллиптического типа. Таким образом, условие (22) (или условие, получающееся при изменении знака неравенства (22) на противоположный) является достаточным условием эллиптичности системы уравнений в деформациях нелинейной упругости при плоской деформации. Условие эллиптичности накладывает ограничение на вид зависимости упругого потенциала от характеристик деформирования.

Для изотропного материала зависимость упругого потенциала от компонент градиента деформации реализуется через инварианты этого тензора. Примем, что упругий потенциал есть функция вида $F(C_1', C_2')$, где $C_1' = \delta_{\sigma\tau}C_{\tau\sigma}$, $C_2' = C_{\sigma\tau}C_{\tau\sigma}$ — инварианты-свертки градиента деформации, связанные с базисными инвариантами C_1, C_2 этого тензора формулами

$$C_1' = C_1, \qquad C_2' = C_1^2 - 2C_2. \tag{23}$$

Из соотношений (17) и (23) следует, что производные сверток по компонентам градиента деформации имеют значения

$$\frac{\partial C_1'}{\partial C_{\lambda\mu}} = \delta_{\mu\lambda}, \qquad \frac{\partial C_2'}{\partial C_{\lambda\mu}} = 2C_{\mu\lambda},$$

с учетом которых вторые производные упругого потенциала по компонентам градиента деформации равны

$$\frac{\partial^2 F}{\partial C_{\tau\beta}\partial C_{\lambda\mu}} = 2\,\frac{\partial F}{\partial C_2'}\,\delta_{\beta\lambda}\delta_{\mu\tau} + \frac{\partial^2 F}{\partial C_1'^2}\,\delta_{\mu\lambda}\delta_{\beta\tau} + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial C_1'\partial C_2'}\,(C_{\mu\lambda}\delta_{\beta\tau} + \delta_{\mu\lambda}C_{\beta\tau}) + 4\,\frac{\partial^2 F}{\partial C_2'^2}\,C_{\mu\lambda}C_{\beta\tau}.$$

Наряду с тензорами $(C_{\alpha\beta})$ и $(A_{\alpha\beta})$ введем их скалярное произведение $(D_{\alpha\beta}) = (C_{\alpha\sigma}A_{\sigma\beta})$ и рассмотрим инварианты-свертки $A_1' = A_1 = A_{\sigma\sigma}$, $A_2' = A_{\sigma\tau}A_{\tau\sigma}$, $D_1' = D_1 = C_{\alpha\sigma}A_{\sigma\alpha}$, $D_2' = C_{\alpha\sigma}A_{\sigma\beta}C_{\beta\tau}A_{\tau\alpha}$. На основании этих соотношений условию эллиптичности (22) для изотропного тела можно придать вид

$$2\,\frac{\partial F}{\partial C_2'}\,A_2' + \frac{\partial^2 F}{\partial C_1'^2}\,A_1^2 + 4\,\frac{\partial^2 F}{\partial C_1'\partial C_2'}\,A_1 D_1 + 4\,\frac{\partial^2 F}{\partial C_2'^2}\,D_1^2 > 0. \tag{24}$$

Если воспользоваться вытекающим из (22) свойством инварианта A_2'

$$A_2' = A_{\sigma\tau}A_{\tau\sigma} = a_\sigma n_\omega C_{\omega\tau} a_\tau n_\lambda C_{\lambda\sigma} = (n_\omega C_{\omega\tau} a_\tau)^2 = A_1^2$$

и определить компоненты произвольного вектора (ξ_α) формулами

$$\xi_1 = A_1 = n_\omega C_{\omega\sigma} a_\sigma, \qquad \xi_2 = 2D_1 = 2C_{\alpha\sigma}A_{\sigma\alpha} = 2n_\omega C_{\omega\alpha}C_{\alpha\sigma}a_\sigma,$$

то условие эллиптичности изотропного тела (24) можно записать в виде

$$2\,\frac{\partial F}{\partial C_2'}\,\xi_1^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial C_\alpha'\partial C_\beta'}\,\xi_\alpha\xi_\beta > 0. \tag{25}$$

Из (25) видно, что условие эллиптичности будет выполнено, если будет положительным первое слагаемое и положительно-определенной квадратичная форма, т. е. если производные упругого потенциала по инвариантам-сверткам удовлетворяют неравенствам [5]

$$\frac{\partial F}{\partial C_2'} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial C_1'^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial C_1'^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial C_2'^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial C_1'\partial C_2'}\right)^2 > 0. \tag{26}$$

Неравенства (26) — достаточные условия эллиптичности уравнений нелинейной упругости для изотропного тела при плоской деформации.

При исследовании конечных деформаций упругого тела в актуальных переменных широко применяется также тензор деформации Альманси $\varepsilon = (\varepsilon_{\alpha\beta})$, компоненты которого определяются выражениями

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial x_c^0}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\sigma^0}{\partial x_\beta}.$$

Тензор ε является функцией градиента деформации C и сопряженного ему тензора C^* [1]:

$$2\varepsilon = \delta - C^{*^{-1}} C^{-1} = \delta - (CC^*)^{-1}.$$

Рассмотрим также тензор деформации $B = (B_{\alpha\beta})$ как изотропную функцию тензора ε, который более просто, чем ε, связан с тензорами C и C^*:

$$B = (\delta - 2\varepsilon)^{-1} = CC^*, \qquad B_{\alpha\beta} = C_{\alpha\sigma} C^*_{\sigma\beta} = C_{\alpha\sigma} C_{\beta\sigma}.$$

Инварианты-свертки B'_1, B'_2 тензора B определяются через компоненты тензора $(C_{\sigma\tau})$ формулами

$$B'_1 = B_{\alpha\alpha} = C_{\alpha\sigma} C_{\alpha\sigma}, \qquad B'_2 = B_{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} = C_{\alpha\sigma} C_{\beta\sigma} C_{\beta\tau} C_{\alpha\tau}.$$

С помощью представления (3) для обратного тензора нетрудно установить, что B и ε выражаются друг через друга соотношениями

$$B = \frac{(1 - 2\varepsilon_1)\delta - 2\varepsilon}{1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2}, \qquad \varepsilon = \frac{(B_2 - B_1)\delta + B}{2B_2}, \tag{27}$$

где ε_1, ε_2, B_1, B_2 — базисные инварианты тензоров ε и B. Из (27) следуют равенства

$$\begin{gathered} \Big(1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 - \frac{1}{B_2}\Big) B - \Big(2 - 2\varepsilon_1 - \frac{B_1}{B_2}\Big)\delta \equiv 0, \\ 1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 = \frac{1}{B_2}, \qquad 2(1 - \varepsilon_1) = \frac{B_1}{B_2}. \end{gathered} \tag{28}$$

Полагая, что относительная плотность материала является конечной ненулевой величиной, и используя представление уравнения неразрывности через ε и B

$$\Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big)^2 = 1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 = \frac{1}{B_2} \neq 0, \infty,$$

имеем $1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, что, согласно (28), позволит установить связи инвариантов-сверток тензоров ε и B:

$$\varepsilon'_1 = \frac{B'_1(B'_1 - 1) - B'_2}{B'^2_1 - B'_2}, \qquad \varepsilon'_2 = \frac{2B'_2 + (B'^2_1 - B'_2)(B'^2_1 - 2B'_1 - B'_2)}{2(B'^2_1 - B'_2)^2}. \tag{29}$$

В силу связи между рассмотренными различными мерами деформаций можно считать, что упругий потенциал в условии эллиптичности (22) зависит от компонент градиента деформации через компоненты тензора Альманси: $F[\varepsilon_{\alpha\beta}(C_{\sigma\tau})]$. В случае изотропного тела эта зависимость реализуется через базисные инварианты тензора Альманси. Выбирая в качестве базисных инварианты ε'_1, ε'_2 или в силу (29) инварианты B'_1, B'_2 (более просто связанные с $(C_{\sigma\tau})$), имеем $F(B'_1(C_{\sigma\tau}), B'_2(C_{\sigma\tau}))$.

Если воспользоваться формулами

$$\frac{\partial^2 F}{\partial C_{\tau\beta} \partial C_{\lambda\mu}} = \frac{\partial F}{\partial B'_1} \frac{\partial^2 B'_1}{\partial C_{\tau\beta} \partial C_{\lambda\mu}} + \frac{\partial F}{\partial B'_2} \frac{\partial^2 B'_2}{\partial C_{\tau\beta} \partial C_{\lambda\mu}} +$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial B_1'^2}\frac{\partial B_1'}{\partial C_{\tau\beta}}\frac{\partial B_1'}{\partial C_{\lambda\mu}}+\frac{\partial^2 F}{\partial B_1'\partial B_2'}\left(\frac{\partial B_1'}{\partial C_{\tau\beta}}\frac{\partial B_2'}{\partial C_{\lambda\mu}}+\frac{\partial B_2'}{\partial C_{\tau\beta}}\frac{\partial B_1'}{\partial C_{\lambda\mu}}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial B_2'^2}\frac{\partial B_2'}{\partial C_{\tau\beta}}\frac{\partial B_2'}{\partial C_{\lambda\mu}},$$

$$\frac{\partial B_1'}{\partial C_{\tau\beta}}=2C_{\tau\beta},\quad \frac{\partial B_2}{\partial C_{\tau\beta}}=4S_{\tau\beta},\quad S_{\tau\beta}=C_{\tau\sigma}C_{\alpha\sigma}C_{\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial^2 B_1'}{\partial C_{\tau\beta}\partial C_{\lambda\mu}}=2\delta_{\tau\lambda}\delta_{\beta\mu},\quad \frac{\partial^2 B_2'}{\partial C_{\tau\beta}\partial C_{\lambda\mu}}=4(\delta_{\mu\beta}C_{\lambda\sigma}C_{\tau\sigma}+\delta_{\lambda\tau}C_{\alpha\beta}C_{\alpha\mu}+C_{\lambda\beta}C_{\tau\mu}),$$

то условие эллиптичности (22) для изотропного тела запишется в виде

$$a_\tau m_\beta\frac{\partial^2 F}{\partial C_{\tau\beta}\partial C_{\lambda\mu}}a_\lambda m_\mu=\frac{\partial^2 F}{\partial B_\alpha'\partial B_\beta'}\eta_\alpha\eta_\beta+2\frac{\partial F}{\partial B_1'}(a_\sigma a_\sigma)(m_\beta m_\beta)+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial B_2'}[(m_\beta m_\beta)(l_\sigma l_\sigma)+(a_\sigma a_\sigma)(k_\alpha k_\alpha)+\eta_1^2]>0, \tag{30}$$

где $m_\beta=n_\omega C_{\omega\beta}$, $l_\sigma=2a_\tau C_{\tau\sigma}$, $k_\alpha=2C_{\alpha\beta}m_\beta$, $\eta_1=2a_\sigma C_{\sigma\beta}m_\beta$, $\eta_2=4a_\sigma S_{\sigma\beta}m_\beta$.

Легко видеть, что для произвольного ненулевого вектора $(a_1,\ a_2)$ положительно определены формы $m_\beta m_\beta a_\sigma a_\sigma>0$, $m_\beta m_\beta l_\sigma l_\sigma+k_\alpha k_\alpha a_\sigma a_\sigma+\eta_1^2>0$, поэтому условию (30) можно удовлетворить, потребовав, чтобы были положительны первые производные от упругого потенциала и положительно определена квадратичная форма:

$$\frac{\partial F}{\partial B_1'}>0,\quad \frac{\partial F}{\partial B_2'}>0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial B_1'^2}>0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial B_1'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial B_2'^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial B_1'\partial B_2'}\right)^2>0. \tag{31}$$

Неравенства (31) дают другую (отличную от (26)) форму достаточных условий эллиптичности статических уравнений изотропной нелинейной упругости при плоской деформации. Эти условия ограничивают значения первых и вторых производных в функциональной зависимости упругого потенциала вида $F(B_1',B_2')$ от базисных инвариантов деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
2. **Мейз Дж.** Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974.
3. **Murnaghan F. D.** Finite deformation of an elastic solid. N. Y.: John Wiley, Chapman, 1951.
4. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
5. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 29/VI 1998 г.