Теплофизика и аэромеханика, 2011, том 18, № 1

УДК 536.21

Моделирование процессов теплопроводности в ортогонально армированных трубками гибридных композитах со связующим, дисперсно-упрочненным полыми включениями*

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановча СО РАН, Новосибирск

E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Предложены модели теплопроводности ортогонально армированной трубками среды со связующим, дисперсно-упрочненным полыми включениями, без учета и с учетом времени релаксации материалов фаз композиции. Для предельного случая вырождения трубок в сплошные волокна проведено сравнение расчетных значений эффективных коэффициентов теплопроводности однонаправлено и перекрестно армированных композитов с экспериментальными данными. Показано удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных значений этих величин.

Ключевые слова: теплопроводность, композиты, полые волокна, дисперсные включения, обобщенный закон Фурье, закон Стефана–Больцмана.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа продолжает исследования, опубликованные в работе [1], в которой была предложена модель теплопроводности ортогонально армированных сплошными волокнами гибридных композитов с дисперсным упрочнением связующего. Однако на практике [2, 3] помимо армирования сплошными волокнами используется армирование и полыми волокнами (трубками). Кроме того, известно, что при затвердевании связующих матриц из полимерных материалов в них могут образовываться многочисленные газовые полости малых размеров; в общем случае полости могут иметь и дисперсные включения, упрочняющие связующее. Следовательно, с практической точки зрения актуальной является проблема математического моделирования процессов теплопроводности в композитах, усиленных полыми армирующими элементами. Изучению этого вопроса посвящено настоящее исследование.

В силу постулата Онзагера, приведенного в работе [4], тензор коэффициентов теплопроводности Λ_{ij} любого реального материала симметричен $(\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}, i, j = 1, 2, 3)$,

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 10-01-90402-Укр_а) и Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 72).

поэтому в каждой точке $\mathbf{x}$ можно определить такую локальную ортогональную систему координат $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathbf{x}' = \{x_1', x_2', x_3'\}$) с единичными ортами $\mathbf{n}^{(i)} = \{n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, n_3^{(i)}\}$, в которой тензор Λ_{ij}' имеет диагональный вид ($\Lambda_{ij}' = \Lambda_{ji}' = 0,\ j \neq i$), причем $\Lambda_{ii}' \equiv \Lambda_i' > 0,\ i,\ j$ = 1, 2, 3. Методика определения величин Λ_i' и векторов $\mathbf{n}^{(i)}$ по заданным значениям Λ_{ij} подробно изложена в [1].

Если армировать гибридный композит по ортогональным направлениям $\mathbf{n}^{(i)}(\mathbf{x})$, то при соответствующем подборе материалов фаз композиции, плотностей армирования и размерах полостей в армирующих элементах можно получить материал с наперед заданными теплофизическими свойствами, например, с заданным распределением функций $\Lambda_{ij}(\mathbf{x})$, $C(\mathbf{x})$, $R(\mathbf{x})$, где C, R — эффективная удельная теплоемкость материала и его объемная плотность соответственно.
Кроме того, умение рассчитывать величины Λ_{ij}, C, R в случае композита с полыми армирующими элементами приобретает особое значение при исследовании вопросов тепломассопереноса в таком материале, когда по трубкам прокачивается жидкий теплоноситель [5].

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОРТОГОНАЛЬНО АРМИРОВАННОЙ ТРУБКАМИ СРЕДЫ СО СВЯЗУЮЩИМ, ДИСПЕРСНО-УПРОЧНЕННЫМ ПОЛЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Выделим из тела в произвольной точке $\mathbf{x}$ малый представительный элемент объема $\Delta x_1' \times \Delta x_2' \times \Delta x_3'$, ребра которого параллельны направлениям армирования $\mathbf{n}^{(i)}$ (i = 1, 2, 3). Поскольку установить фактическое распределение тепловых потоков и температурного поля в пространственно армированном многочисленными трубками материале весьма затруднительно, то при нахождении практически пригодных зависимостей для определения трех независимых теплофизических характеристик в виде компонент линейной теплопроводности необходимо сделать некоторые допущения, аналогичные тем, что были использованы в [1, 6] для вывода формул, определяющих эффективные коэффициенты теплопроводности подобных композитов, армированных сплошными волокнами:

1. Ортогонально армированный трубками и дисперсно-упрочненный материал в пределах представительного элемента представляет собой квазисплошное, квазиоднородное ортотропное тело;

2. В пределах представительного элемента материалы всех фаз композиции однородны, причем основной материал (связующее) и дисперсные включения теплофизически ортотропны и главные оси анизотропии в этих фазах композиции совпадают с направлениями x_i' локальной системы координат, в которой рассматривается представительный элемент; материалы армирующих трубок и/или волокон монотропны (трансверсально-изотропны), причем главные оси анизотропии совпадают с продольными осями этих армирующих элементов, уложенных в направлениях x_i' (i = 1, 2, 3);

3. Связь между вектором теплового потока и градиентом температуры во всех фазах композиции подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье, тепловые потоки внутри полостей армирующих элементов определяются по закону Стефана–Больцмана;

4. На границах между связующим и всеми армирующими элементами реализуются условия идеального теплового контакта;

5. Приращение осредненной температуры T вдоль произвольно ориентированного отрезка элементарной длины Δl равно сумме приращений температур в фазах композиции, которые этот отрезок пересекает;

6. Осредненный тепловой поток через произвольно ориентированную элементарную площадку подсчитывается по правилу простой смеси тепловых потоков в фазах композиции и в их полостях.

Дальнейший ход рассуждений такой же, как в работах [1, 6], поэтому ограничимся кратким изложением.

Введем следующие обозначения: K_0 — количество семейств дисперсных включений, K_i — количество семейств трубок и/или волокон, уложенных по направлениям $n^{(i)}$, λ_i^{m}, $\lambda_{i,k}^0$ — коэффициенты теплопроводности материалов связующей матрицы и k-семейства ($k = 1, 2, ..., K_0$) дисперсных включений в направлениях x_i' соответственно, $\lambda_{i,k}$, $\lambda_{i,k}^*$ — продольные и поперечные коэффициенты теплопроводности монотропных трубок и/или волокон k-семейства ($k = 1, 2, ..., K_i$), уложенных в направлении x_i' (i = 1, 2, 3), σ — постоянная Стефана ($5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт·м$^{-2}$К$^{-4}$), $\varepsilon^{(j,k)}$ — степень черноты внутренней поверхности (полости) k-семейства j-типа включений (j = 0 — дисперсных, j = 1, 2, 3 — трубок, уложенных в направлении x_j'), $D_i^{(j,k)}$ — характерный поперечный размер (в направлении x_i') полости k-семейства j-типа ($1 \le k \le K_j$, $j \ne i$, $0 \le j \le 3$, i = 1, 2, 3) армирующих элементов (по сравнению с миниуровнем представительного элемента (по сравнению с $\Delta x_i'$) размер $D_i^{(j,k)}$ относится к микроуровню, т. е. $D_i^{(j,k)} \ll \Delta x_i'$), $\omega_{0,k}$, $\omega_{i,n}$ — удельное объемное содержание материалов дисперсных включений k-семейства и трубок и/или волокон n-семейства, уложенных в направлении x_i', соответственно, $\Omega_{0,k}$, $\Omega_{i,n}$ — удельное объемное содержание полостей в дисперсных включениях k-семейства и в трубках n-семейства, уложенных в направлении x_i' ($1 \le k \le K_0$, $1 \le n \le K_i$, i = 1, 2, 3), a — удельное объемное содержание связующего в представительном элементе.

Выполняется условие нормировки

$$a + \sum_{i=0}^{3} \sum_{k=1}^{K_i} \left(\omega_{i,k} + \Omega_{i,k} \right) = 1. \qquad (1)$$

Если $\Omega_{i,k} = 0$ ($1 \le k \le K_i$, i = 0, 1, 2, 3), то получим случай композита, армированного сплошными волокнами и с дисперсно-упрочненным связующим (случай, рассмотренный в работе [1]). При $\omega_{0,k} = 0$, $\Omega_{0,k} > 0$ получаем в материале связующей матрицы газовые полости k-семейства ($1 \le k \le K_0$), при $\Omega_{j,k} = 0$, $\Omega_{j,k} > 0$ имеем в матрице каналы k-семейства, ориентированные в направлении x_j' ($1 \le k \le K_j$, j = 1, 2, 3).

Кроме условия нормировки (1) должны выполняться и физические условия взаимного непроникновения материалов различных компонентов композиции. Эти условия накладывают определенные ограничения на предельно допустимые значения суммарных плотностей армирования (на значения сумм в (1)) при плотной упаковке армирующих элементов. Так, в [7] приведены указанные предельные значения для ортогонально армированного сплошными круглыми волокнами композита, которые меньше единицы. Далее в настоящем исследовании предполагается, что эти ограничения на значения суммарных плотностей армирования выполняются. При построении модели теплопроводности рассматриваемого композита знание конкретных чисел $\omega_{i,k}$, $\Omega_{i,k}$ не обязательно, важным является выполнение условия нормировки (1).

Согласно шестому допущению, для компонент q_i осредненного вектора теплового потока имеем

$$q_i = aq_i^{\mathrm{m}} + \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=1}^{K_j} \left(\omega_{j,k} q_i^{(j,k)} + \Omega_{j,k} Q_i^{(j,k)} \right), \quad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где q_i^{m}, $q_i^{(0,k)}$, $Q_i^{(0,k)}$ — компоненты вектора теплового потока в связующей матрице, в материале дисперсных включений k-семейства ($1 \le k \le K_0$) и в их полостях в направлениях x'_j (i = 1, 2, 3) соответственно, $q_i^{(j,k)}$, $Q_i^{(j,k)}$ — i компоненты вектора теплового потока в материале трубок k-семейства ($1 \le k \le K_j$), уложенных в направлении x'_j ($1 \le k \le K_j$, j = 1, 2, 3), и в их полостях соответственно.

Идеализация. Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение следующую идеализацию. Будем предполагать, что полости в армирующих элементах заполнены некоторыми фиктивными материалами; связь между тепловыми потоками и градиентом температур в этих фиктивных материалах не подчиняется закону Фурье, а определяется соотношениями, которые будут получены в процессе рассуждений на основе закона Стефана–Больцмана. На внутренних поверхностях армирующих элементов выполняются условия идеального теплового контакта между армирующим и фиктивным материалами.

Из пятого допущения с учетом принятой идеализации по аналогии с [1, 6] вытекают равенства

$$\partial_i T = a\partial_i T_{\mathrm{m}} + \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=1}^{K_j} \left(\omega_{j,k} \partial_i T_{j,k} + \Omega_{j,k} \partial_i \theta_{j,k} \right), \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где T — осредненная температура композиции, T_{m}, $T_{0,k}$, $\theta_{0,k}$ — температура в связующей матрице, в материале дисперсных включений k-семейства ($1 \le k \le K_0$) семейства и в фиктивном материале, заполняющем полости этих включений, соответственно, $T_{j,k}$, $\theta_{j,k}$ — температура в материале трубок k-семейства ($1 \le k \le K_j$), уложенных в направлении x'_j ($1 \le k \le K_j$, j = 1, 2, 3), и в фиктивном материале, заполняющем их полости, соответственно, ∂_i — оператор частного дифференцирования по направлению x'_i.

Согласно четвертой гипотезе с учетом принятой идеализации, в пределах представительного элемента имеют место равенства, вытекающие из условий сопряжения:

$$\partial_i T_{i,k} = \partial_i T_{\mathrm{m}}, \ \ \partial_i T_{i,k} = \partial_i \theta_{i,k} \quad (1 \le k \le K_i, \ \ i = 1, 2, 3), \tag{4}$$

$$q_i^{(0,k)} = q_i^{\mathrm{m}}, \ \ q_i^{(0,k)} = Q_i^{(0,k)} \quad (1 \le k \le K_0, \ \ i = 1, 2, 3), \tag{5}$$

$$q_i^{(j,k)}=q_i^{\mathrm{m}},\;\; q_i^{(j,k)}=Q_i^{(j,k)}\quad (1\le k\le K_j,\quad j\ne i,\quad i,\ j=1,\,2,\,3). \tag{6}$$

Подставим равенства (5), (6) в уравнения (2), тогда получим

$$q_i=\left(a+\sum_{j=0,\,3}^{j\ne i}\sum_{k=1}^{K_j}\left(\omega_{j,k}+\Omega_{j,k}\right)\right)q_i^{\mathrm{m}}+\sum_{k=1}^{K_i}\left(\omega_{i,k}q_i^{(i,k)}+\Omega_{i,k}Q_i^{(i,k)}\right),\quad i=1,\,2,\,3. \tag{7}$$

В силу второго и третьего допущений имеют место соотношения:

$$q_i^{\mathrm{m}}=-\lambda_i^{\mathrm{m}}\partial_i T_{\mathrm{m}}\quad (i=1,\,2,\,3), \tag{8}$$

$$q_i^{(0,k)}=-\lambda_{i,k}^{0}\partial_i T_{0,k}\quad (1\le k\le K_0,\;\; i=1,\,2,\,3), \tag{9}$$

$$\begin{gathered} q_i^{(i,k)}=-\lambda_{i,k}\partial_i T_{i,k}\quad (1\le k\le K_i,\;\; i=1,\,2,\,3),\\ q_i^{(j,k)}=-\lambda_{j,k}^{*}\partial_i T_{j,k}\quad (1\le k\le K_j,\quad j\ne i,\quad i,\ j=1,\,2,\,3), \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} Q_i^{(j,k)}=-\varepsilon^{(j,k)}\sigma\left[\left(\theta_{j,k}+\Delta_i\theta_{j,k}\right)^4-\theta_{j,k}^4\right],\\ 1\le k\le K_j,\quad j\ne i,\quad 0\le j\le 3,\quad i=1,\,2,\,3, \end{gathered} \tag{11}$$

где $\Delta_i\theta_{j,k}$ — разность температур (в направлении x_i') в фиктивном материале, заполняющем полости в k-семействе j-типа армирующих элементов, причем на рассматриваемом миниуровне:

$$\begin{gathered} \Delta_i\theta_{j,k}=D_i^{(j,k)}\partial_i\theta_{j,k}+O\left[\left(D_i^{(j,k)}\right)^2\right]\approx D_i^{(j,k)}\partial_i\theta_{j,k}\\ (1\le k\le K_j,\quad j\ne i,\quad j=0,1,\,2,\,3,\quad i=1,\,2,\,3). \end{gathered} \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) и по-прежнему пренебрегая слагаемыми порядка $O\left[\left(D_i^{(j,k)}\right)^2\right]$, с учетом условий сопряжения по температуре (в соответствии с принятой идеализацией $\theta_{j,k}=T_{j,k}$ на поверхности полости) будем иметь

$$Q_i^{(j,k)}=-\sigma_i^{(j,k)}T_{j,k}^3\partial_i\theta_{j,k}\quad (1\le k\le K_j,\quad j\ne i,\quad j=0,1,\,2,\,3,\;\; i=1,\,2,\,3), \tag{13}$$

где

$$\sigma_i^{(j,k)}=4\varepsilon^{(j,k)}D_i^{(j,k)}\sigma\;(1\le k\le K_j,\quad j\ne i,\quad j=0,1,\,2,\,3,\;\; i=1,\,2,\,3). \tag{14}$$

Соотношения (13) с учетом равенств $T_{j,k}=\theta_{j,k}$ определяют закон, связывающий тепловой поток $Q_i^{(j,k)}$ (в поперечном направлении x_i', так как $j\ne i$) с градиентом температуры $\partial_i\theta_{j,k}$ в фиктивном материале, заполняющем полости в k-м семействе армирующих элементов j-типа.

Замечание 1. Правая часть равенств (13) зависит от температур $T_{j,k}$ $(1\le k\le K_j,\;\; 0\le j\le 3)$ в фазовых материалах композиции, что представляет определенное неудобство с точки зрения окончательного вида определяющих уравнений теплопроводности для композитной среды в целом, которые должны содержать лишь осредненную температуру T композиции. Поэтому вычислим среднюю температуру композиции в пределах представительного элемента:

$$\frac{1}{\Delta V}\iiint_{\Delta V} T dV = \frac{1}{\Delta V}\iiint_{\Delta V}\left[aT_{\mathrm{m}} + \sum_{j=0}^{3}\sum_{k=1}^{K_j}\left(\omega_{j,k}T_{j,k} + \Omega_{j,k}\theta_{j,k}\right)\right]dV, \tag{15}$$

где $dV = dx'_1 dx'_2 dx'_3$, $\Delta V = \Delta x'_1 \times \Delta x'_2 \times \Delta x'_3$ — объем представительного элемента. Учитывая условия сопряжения температур на границах контакта разных фаз композиции, из (15), отбрасывая слагаемые порядка $O\left(\Delta x'_i\right)$, на основании интегральной теоремы о среднем получим

$$T_{\mathrm{m}} = T_{j,k} = T \quad (1 \le k \le K_j, \quad j = 0, 1, 2, 3). \tag{16}$$

Из (13) с учетом (14), (16) окончательно следует

$$Q_i^{(j,k)} = -\sigma_i^{(j,k)} T^3 \partial_i \theta_{j,k} \quad (1 \le k \le K_j, \quad j \ne i, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3). \tag{17}$$

Подчеркнем, что рассуждения в замечании 1 относятся только к теплопереносу излучением внутри полостей.

Подставим в уравнение (7) соотношение (8) и первое равенство (10), тогда с учетом (1), (4) после элементарных преобразований получим

$$q_i = -\left(a_i\lambda_i^{\mathrm{m}} + \sum_{k=1}^{K_i}\omega_{i,k}\lambda_{i,k}\right)\partial_i T_{\mathrm{m}} + \sum_{k=1}^{K_i}\Omega_{i,k}Q_i^{(i,k)}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{18}$$

где

$$a_i = 1 - \sum_{k=1}^{K_i}\left(\omega_{i,k} + \Omega_{i,k}\right), \quad i = 1, 2, 3. \tag{19}$$

После подстановки в условия сопряжения (5), (6) соотношений (8)–(10), (17) будем иметь равенства:

$$\begin{aligned} &\partial_i T_{0,k} = \frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\lambda_{i,k}^{0}}\partial_i T_{\mathrm{m}} \quad (1 \le k \le K_0, \; i = 1, 2, 3), \\ &\partial_i T_{j,k} = \frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\lambda_{j,k}^{*}}\partial_i T_{\mathrm{m}} \quad (1 \le k \le K_j, \; j \ne i, \; i, \; j = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\partial_i \theta_{j,k} = \frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\sigma_i^{(j,k)}T^3}\partial_i T_{\mathrm{m}} \quad (1 \le k \le K_j, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3). \tag{21}$$

При выводе равенств (21) учтены соотношения (20).

Уравнение (3) после подстановки в него соотношений (4), (20) и (21) примет вид

$$\partial_i T = P_i\left(T\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} P_i\left(T\right) = a + \sum_{k=1}^{K_0}\left(\omega_{0,k}\frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\lambda_{i,k}^{0}} + \Omega_{0,k}\frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\sigma_i^{(0,k)}T^3}\right) + \sum_{k=1}^{K_i}\left(\omega_{i,k} + \Omega_{i,k}\right) + \\ + \sum_{\overline{j=1,3}}^{j\ne i}\sum_{k=1}^{K_j}\left(\omega_{j,k}\frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\lambda_{j,k}^{*}} + \Omega_{j,k}\frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\sigma_i^{(j,k)}T^3}\right), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{23}$$

Выразим из (22) производные $\partial_i T_{\text{m}}$ и подставим в равенства (18), тогда получим

$$q_i = -\frac{1}{P_i(T)}\left(a_i\lambda_i^{\text{m}} + \sum_{k=1}^{K_i}\omega_{i,k}\lambda_{i,k}\right)\partial_i T + \sum_{k=1}^{K_i}\Omega_{i,k}Q_i^{(i,k)}, \quad i = 1,\, 2,\, 3, \tag{24}$$

где продольные тепловые потоки $Q_i^{(i,k)}$ внутри трубок k-го семейства, уложенных в направлении x_i', в случае прямолинейного армирования могут быть определены, например, по закону Стефана–Больцмана

$$Q_i^{(i,k)} = -\sigma\left[\varepsilon_i^{(+)}\left(T_i^{(+)}\right)^4 - \varepsilon_i^{(-)}\left(T_i^{(-)}\right)^4\right], \; i = 1,\, 2,\, 3, \tag{25}$$

где $T_i^{(-)}$, $T_i^{(+)}$ — температуры некоторых излучающих поверхностей на входе и выходе из тела прямолинейных трубок, уложенных в i-м направлении, $\varepsilon_i^{(-)}$, $\varepsilon_i^{(+)}$ — степени черноты этих поверхностей.

Согласно (25), тепловые потоки $Q_i^{(i,k)}$ в (24) можно считать известными (заданными) функциями.

Коэффициенты

$$\Lambda_i'(T) = \frac{1}{P_i(T)}\left(a_i\lambda_i^{\text{m}} + \sum_{k=1}^{K_i}\omega_{i,k}\lambda_{i,k}\right), \; i = 1,\, 2,\, 3, \tag{26}$$

входящие в равенства (24), можно трактовать как эффективные коэффициенты теплопроводности рассматриваемого гибридного композита, определяющие уравнения в котором соответствуют следующему обобщенному закону Фурье:

$$q_i = -\Lambda_i'(T)\partial_i T + q_i^0, \quad i = 1,\, 2,\, 3, \tag{27}$$

где $q_i^0 = \sum_{k=1}^{K_i}\Omega_{i,\,k}Q_i^{(i,\,k)}$ — заданные тепловые потоки.

В силу равенств (26), (23) коэффициенты Λ_i' зависят от температуры T композиции, поэтому такой композитный материал следует рассматривать как термочувствительный даже в том случае, если термочувствительность материалов фаз композиции не учитывается (не учитываются зависимости коэффициентов λ_i^{m}, $\lambda_{i,k}^0$, $\lambda_{i,k}$, $\lambda_{i,k}^*$ от T, см. (16)).

Замечание 2. Важной особенностью построенной модели является возможность определения по градиенту осредненной температуры $\partial_i T$ тепловых потоков и градиентов температур $\partial_i T_{\text{m}}$, $\partial_i T_{j,k}$ во всех фазах композиции. Действительно, если из решения задачи теплопроводности для рассматриваемой композитной среды известны производные осредненной температуры $\partial_i T$, то из (22) можно определить производные от температуры в связующем $\partial_i T_{\text{m}}$, а затем из (4), (20) — градиенты температуры в армирующих элементах $\partial_i T_{j,k}$ $(1 \le k \le K_j$, $0 \le j \le 3$, i = 1, 2, 3), после чего, используя закон Фурье (8)–(10), определим тепловые потоки в фазах композиции.

Если в армирующих элементах отсутствуют полости, то из (26), с учетом (19), (23) и $\Omega_{j,k}=0$ $(1\le k\le K_j,\ \ 0\le j\le 3)$, получим

$$\Lambda_i'=\frac{a_i+\sum\limits_{k=1}^{K_i}\omega_{i,k}\dfrac{\lambda_{i,k}}{\lambda_i^{\mathrm{m}}}}{\dfrac{a}{\lambda_i^{\mathrm{m}}}+\sum\limits_{k=1}^{K_0}\dfrac{\omega_{0,k}}{\lambda_{i,k}^{0}}+\sum\limits_{k=1}^{K_i}\dfrac{\omega_{i,k}}{\lambda_i^{\mathrm{m}}}+\sum\limits_{\overline{j=1,\,3}}^{j\ne i}\sum\limits_{k=1}^{K_j}\dfrac{\omega_{j,k}}{\lambda_{j,k}^{*}}},\quad i=1,\,2,\,3, \tag{28}$$

где

$$a=1-\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=1}^{K_j}\omega_{j,k},\quad a_i=1-\sum_{k=1}^{K_i}\omega_{i,k},\quad i=1,\,2,\,3. \tag{29}$$

Соотношения (28) с учетом (29) определяют эффективные коэффициенты теплопроводности композита, ортогонально армированного сплошными волокнами и дисперсно-упрочненного сплошными включениями, и полностью совпадают (соотношения) с формулами (21), (16), полученными для такой композиции в работе [1].

Если композитный материал является лишь дисперсно-упрочненным полыми включениями (т. е. $\omega_{j,k}=\Omega_{j,k}=0,\ \ 1\le k\le K_j,\ \ j\ =\ 1,\ 2,\ 3,\ \ \omega_{0,k}>0,\ \ \Omega_{0,k}\ge 0,$ $1\le k\le K_0$), то из (26), с учетом (23), (19), (14), будем иметь

$$\frac{1}{\Lambda_i'(T)}=\frac{a}{\lambda_i^{\mathrm{m}}}+\sum_{k=1}^{K_0}\left(\frac{\omega_{0,k}}{\lambda_{i,k}^{0}}+\frac{\Omega_{0,k}}{\sigma_i^{(0,k)}T^3}\right)\quad i=1,\,2,\,3,\quad a=1-\sum_{k=1}^{K_0}\left(\omega_{0,k}+\Omega_{0,k}\right). \tag{30}$$

В случае изотропных материалов связующей матрицы и всех дисперсных включений ($\lambda_i^{\mathrm{m}}=\lambda_{\mathrm{m}},\ \ \lambda_{i,k}^{0}=\lambda_k^{0}$), а также при равенстве во всех направлениях x_i' характерных размеров полостей включений ($D_i^{(0,k)}=D^{(0,k)},\ \ 1\le k\le K_0,\ i\ =\ 1,\ 2,\ 3$) из (30) следует теплофизическая изотропность композитного материала ($\Lambda_1'=\Lambda_2'=\Lambda_3'$).

При $\omega_{0,k}=0$ $(1\le k\le K_0)$ из соотношений (30) получим выражения для эффективных коэффициентов теплопроводности материала с многочисленными замкнутыми полостями (пустотами) малых размеров.

Если гибридный композит армирован трубками лишь в одном направлении x_i' и не упрочнен дисперсно (т. е. $\omega_{j,k}=\Omega_{j,k}=0,\ \ 1\le k\le K_j,\ \ \ j\ne i,\ \ \ 0\le j\le 3,$ $\omega_{i,k}>0,\ \ \Omega_{i,k}\ge 0,\ \ 1\le k\le K_i$), то из (24), с учетом (23), (26), (19), (14), следует:

$$q_i=-\Lambda_i'\partial_i T+\sum_{k=1}^{K_i}\Omega_{i,k}Q_i^{(i,k)},\quad q_j=-\Lambda_j'(T)\partial_j T,$$
$$\Lambda_i'=a\lambda_i^{\mathrm{m}}+\sum_{k=1}^{K_i}\omega_{i,k}\lambda_{i,k},\quad \frac{1}{\Lambda_j'(T)}=\frac{a}{\lambda_j^{\mathrm{m}}}+\sum_{k=1}^{K_i}\left(\frac{\omega_{i,k}}{\lambda_{i,k}^{*}}+\frac{\Omega_{i,k}}{\sigma_j^{(i,k)}T^3}\right) \tag{31}$$
$$a=1-\sum_{k=1}^{K_i}\left(\omega_{i,k}+\Omega_{i,k}\right),\quad j\ne i,\quad i,\ j=1,\,2,\,3.$$

Для сравнения выпишем (с учетом принятых в настоящей работе обозначений) приведенные в [3] выражения для эффективных коэффициентов теплопроводности полиармированной в направлении x_i' композиции, состоящей из изотропной матрицы и внедренных в нее K_i сортов полых волокон:

$$\Lambda_i' = a\lambda_{\mathrm{m}} + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k}\lambda_{i,k}, \quad \Lambda_j' \approx \lambda_{\mathrm{m}} \left(a + 2\sum_{k=1}^{K_i} \frac{\lambda_{i,k}^{*}\omega_{i,k}\left(\omega_{i,k} + \Omega_{i,k}\right)}{\lambda_{i,k}^{*}\omega_{i,k} + \lambda_{\mathrm{m}}\left(\omega_{i,k} + 2\,\Omega_{i,k}\right)} \right) \times$$
$$\times \left(1 + 2\sum_{k=1}^{K_i} \frac{\left[\lambda_{i,k}^{*}\omega_{i,k} - \lambda_{\mathrm{m}}\left(\omega_{i,k} + 2\,\Omega_{i,k}\right)\right]\left(\omega_{i,k} + \Omega_{i,k}\right)}{\lambda_{i,k}^{*}\omega_{i,k} + \lambda_{\mathrm{m}}\left(\omega_{i,k} + 2\,\Omega_{i,k}\right)} \right)^{-1}, \quad j \neq i, \;\; i,\, j = 1,\, 2,\, 3, \tag{32}$$

где $\lambda_{\mathrm{m}} = \lambda_l^{\mathrm{m}}$ (l = 1, 2, 3) — коэффициент теплопроводности изотропного материала связующей матрицы. (Из соотношений (32) следует, что в рамках соответствующей модели теплопроводности [3] внутри полостей трубок не учитывается процесс передачи тепла излучением по закону Стефана–Больцмана.)

Если гибридный композит армирован трубками лишь в направлениях x_1', x_2' и не упрочнен дисперсно (т. е. $\omega_{j,k} = \Omega_{j,k} = 0$, $1 \le k \le K_j$, j = 0, 3, $\omega_{i,k} > 0$, $\Omega_{i,k} \ge 0$, $1 \le k \le K_i$, i = 1, 2), то из (24), с учетом (23), (26), (19), (14), получим

$$q_i = -\Lambda_i'(T)\partial_i T + \sum_{k=1}^{K_i} \Omega_{i,k} Q_i^{(i,k)} \quad (i = 1,\, 2), \qquad q_3 = -\Lambda_3'(T)\partial_3 T,$$
$$\Lambda_i'(T) = \left(a_i + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \frac{\lambda_{i,k}}{\lambda_i^{\mathrm{m}}} \right) \left[\frac{a_j}{\lambda_i^{\mathrm{m}}} + \sum_{k=1}^{K_j} \left(\frac{\omega_{j,k}}{\lambda_{j,k}^{*}} + \frac{\Omega_{j,k}}{\sigma_i^{(j,k)} T^3} \right) \right]^{-1}, \quad j = 3 - i, \;\; i = 1,\, 2, \tag{33}$$
$$\frac{1}{\Lambda_3'(T)} = \frac{a}{\lambda_3^{\mathrm{m}}} + \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_l} \left(\frac{\omega_{l,k}}{\lambda_{l,k}^{*}} + \frac{\Omega_{l,k}}{\sigma_3^{(l,k)} T^3} \right), \quad a = 1 - \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_l} \left(\omega_{l,k} + \Omega_{l,k} \right).$$

Помимо рассмотренных выше частных случаев гибридных композитов приведем выражения для эффективных коэффициентов теплопроводности для случаев, которые, по-видимому, наиболее часто могут встречаться на практике. С этой целью рассмотрим материал, состоящий из изотропного связующего с изотропными дисперсными включениями одного семейства ($K_0 = 1$), имеющего (связующего) полости, характерные размеры которых во всех направлениях одинаковы. Кроме того, материал ортогонально армирован тремя семействами монотропных трубок, причем каждое семейство укладывается в своем направлении x_k' (k = 1, 2, 3, $K_1 = K_2 = K_3 = 1$), и характерные поперечные размеры каналов в трубках одинаковы во всех направлениях (например, трубки имеют кольцевое поперечное сечение).

Для упрощения вида окончательных соотношений и удобства их восприятия в этом случае введем следующие обозначения: D_0, D_k — характерный поперечный размер полостей в связующем и в трубках k-го семейства соответственно, λ_{m}, λ_0 — коэффициенты теплопроводности изотропных материалов связующей матрицы и дисперсных включений, λ_k, λ_k^{*} — продольные и поперечные коэффициенты теплопроводности монотропных материалов трубок k-го семейства соответственно, ω_0, ω_k — удельное объемное содержание материалов дисперсных включений и трубок k-го семейства, Ω_0, Ω_k — удельное объемное содержание полостей в связующем и в трубках k-го семейства, $\varepsilon_0, \varepsilon_k$ — степень черноты внутренних поверхностей полостей в связующем и в трубках k-го семейства, остальные величины имеют прежний смысл.

С учетом введенных обозначений эффективные коэффициенты теплопроводности рассматриваемого пространственно армированного композита согласно формуле (26) имеют выражения:

$$\Lambda_i'(T) = \left((1-\omega_i-\Omega_i)\lambda_{\mathrm{m}} + \omega_i\lambda_i \right) / P_i(T),$$

$$P_i(T) = a + \omega_i + \Omega_i + \lambda_{\mathrm{m}} \left(\frac{\omega_0}{\lambda_0} + \frac{\Omega_0}{\sigma_0 T^3} + \sum_{j=1,\,3}^{j\neq i} \left(\frac{\omega_j}{\lambda_j^*} + \frac{\Omega_j}{\sigma_j T^3} \right) \right),$$

$$\sigma_0 = 4\varepsilon_0 D_0 \sigma, \quad \sigma_i = 4\varepsilon_i D_i \sigma, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Если рассматривается ортогонально и плоско армированный в направлениях x_1', x_2' композит ($\omega_3 = \Omega_3 = 0$), то из последних соотношений следует:

$$\Lambda_i'(T) = \left((1-\omega_i-\Omega_i)\lambda_{\mathrm{m}} + \omega_i\lambda_i \right) / P_i(T),$$

$$P_i(T) = a + \omega_i + \Omega_i + \lambda_{\mathrm{m}} \left(\frac{\omega_0}{\lambda_0} + \frac{\Omega_0}{\sigma_0 T^3} + \frac{\omega_j}{\lambda_j^*} + \frac{\Omega_j}{\sigma_j T^3} \right), \quad j = 3-i, \quad i = 1,\ 2,$$

$$\Lambda_3'(T) = \lambda_{\mathrm{m}} / P_3(T), \quad P_3(T) = a + \lambda_{\mathrm{m}} \left(\frac{\omega_0}{\lambda_0} + \frac{\Omega_0}{\sigma_0 T^3} + \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\omega_k}{\lambda_k^*} + \frac{\Omega_k}{\sigma_k T^3} \right) \right),$$

В случае же композита, армированного трубками лишь в направлении x_1' ($\omega_2 = \Omega_2 = 0,\ \omega_3 = \Omega_3 = 0$), отсюда получаем:

$$\Lambda_1'(T) = \left((1-\omega_1-\Omega_1)\lambda_{\mathrm{m}} + \omega_1\lambda_1 \right) \left[a + \omega_1 + \Omega_1 + \lambda_{\mathrm{m}} \left(\frac{\omega_0}{\lambda_0} + \frac{\Omega_0}{\sigma_0 T^3} \right) \right]^{-1},$$

$$\Lambda_j'(T) = \lambda_{\mathrm{m}} \left[a + \lambda_{\mathrm{m}} \left(\frac{\omega_0}{\lambda_0} + \frac{\Omega_0}{\sigma_0 T^3} + \frac{\omega_1}{\lambda_1^*} + \frac{\Omega_1}{\sigma_1 T^3} \right) \right]^{-1}, \quad j = 2,\ 3.$$

Последние три группы соотношений справедливы для композитов при идеальном сцеплении связующего с усиливающими элементами. В реальности же в пространственно армированных композитах на границах контакта связующего и арматуры могут возникнуть отслоения [7], которые можно моделировать как полости с разными характерными размерами в разных направлениях. Теплофизическое поведение таких реальных композитов уже нельзя описывать указанными соотношениями. В этом случае нужно использовать соотношения общего вида (23), (26), (27), которые тем самым имеют практическую ценность.

Автору не известны экспериментальные данные по определению эффективных коэффициентов теплопроводности композитов, армированных трубками или дисперсными полыми включениями, поэтому проведем косвенное сравнение с экспериментом. С этой целью рассмотрим предельный случай:

$$\Omega_{i,k} \to 0, \quad 1 \le k \le K_i, \quad 0 \le i \le 3, \tag{34}$$

т. е. случай армирования сплошными волокнами и дисперсными включениями без полостей.

Для сравнения расчетных значений эффективных коэффициентов теплопроводности с экспериментальными данными рассмотрим однонаправленно армированную композицию ($K_1 = 1,\ K_0 = K_2 = K_3 = 0,\ \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}'$) с изотропным связующим ($\lambda_i^{\mathrm{m}} \equiv \lambda_{\mathrm{m}},\ i$ = 1, 2, 3). Согласно соотношениям (28), (29) и (31), (32), с учетом (34), эффективный коэффициент продольной теплопроводности композиции по обеим рассмотренным выше моделям определяется по закону простой смеси

$$\Lambda_{11} = \Lambda_1' = \lambda_{\mathrm{m}}\left(1-\omega_{1,1}\right) + \lambda_{1,1}\omega_{1,1}, \tag{35}$$

а коэффициенты поперечной теплопроводности композиции характеризуются разными расчетными значениями. Так, из соотношений (28), (29) и (31), с учетом (34), следует

$$\Lambda_{22} \equiv \Lambda_2' = \Lambda_{33} \equiv \Lambda_3' = \left[\left(1-\omega_{1,1}\right)/\lambda_{\mathrm{m}} + \omega_{1,1}/\lambda_{1,1}^*\right]^{-1}, \tag{36}$$

а из (32), с учетом (34), имеем

$$\Lambda_{22} = \Lambda_{33} \approx \lambda_{\mathrm{m}}\left[1+\omega_{1,1}+\left(1-\omega_{1,1}\right)\lambda_{\mathrm{m}}/\lambda_{1,1}^*\right] \Big/ \left[1-\omega_{1,1}+\left(1+\omega_{1,1}\right)\lambda_{\mathrm{m}}/\lambda_{1,1}^*\right]. \tag{37}$$

В работах [1, 8] для однонаправленного микропластика на основе волокон кевлар-49 и эпоксисвязующего DER 332 / Джефамин T-403 проведено сравнение расчетных и экспериментальных значений эффективных коэффициентов теплопроводности такой композиции. Из этого сравнения следует, что рассчитанные по формулам (35), (36) характеристики отличаются от экспериментальных данных не более чем на 9 %, а расчетное значение, полученное по формуле (37), отличается от экспериментального на 36 %.

Лучшее согласование с экспериментом формул (35), (36) (по сравнению с (37)), полученных в предельном случае (34) на базе предложенной в настоящей работе модели теплопроводности, позволяет отдать ей предпочтение по сравнению с моделью, приведенной в [3], в рамках которой предельный случай (34) приводит к равенствам (35), (37).

Кроме того, при перекрестном армировании в направлениях $x_1',\ x_2'$ в предельном случае (34) из (33) получим равенства, полностью совпадающие с соотношениями (24) из работы [1], которые, как там показано, для указанной выше композиции обеспечивают 9-процертную точность для $\Lambda_{33} = \Lambda_3'$ и 14-процентную — для $\Lambda_{11} = \Lambda_1'$ по сравнению с экспериментальными данными. Такое удовлетворительное согласование с экспериментом (в предельном случае (34)) и для перекрестно армированной композиции позволяет доверительно относиться к предложенной в настоящей работе модели теплопроводности композита, усиленного полыми армирующими элементами.

Помимо эффективных коэффициентов теплопроводности Λ_i' (i = 1, 2, 3) важной интегральной теплофизической характеристикой композита является удельная теплоемкость C, которая для армированного полыми включениями материала, как и приведенная объемная плотность R, определяется по правилу простой смеси [3]:

$$C = a\rho_{\mathrm{m}}c_{\mathrm{m}} + \sum_{i=0}^{3}\sum_{k=1}^{K_i}\left(\omega_{i,k}\rho_{i,k}c_{i,k} + \Omega_{i,k}R_{i,k}C_{i,k}\right),$$
$$R = a\rho_{\mathrm{m}} + \sum_{i=0}^{3}\sum_{k=1}^{K_i}\left(\omega_{i,k}\rho_{i,k} + \Omega_{i,k}R_{i,k}\right), \tag{38}$$

где ρ_{m}, $\rho_{0,k}$ — объемные плотности материалов связующей матрицы и k-го семейства дисперсных включений, c_{m}, $c_{0,k}$ — удельные теплоемкости материалов связующего и k-го ($1 \le k \le K_0$) семейства дисперсных включений соответственно, $\rho_{j,k}$, $c_{j,k}$ — объемная плотность и удельная теплоемкость материала трубок k-го ($1 \le k \le K_j$) семейства, уложенных в направлении x'_j (j = 1, 2, 3) соответственно, $R_{i,k}$, $C_{i,k}$ — объемная плотность и удельная теплоемкость газов, заполняющих полости в k-м ($1 \le k \le K_i$) семействе i-го ($0 \le i \le 3$) типа армирующих элементов.

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОРТОГОНАЛЬНО АРМИРОВАННОЙ ТРУБКАМИ И ДИСПЕРСНО-УПРОЧНЕННОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ МАТЕРИАЛОВ ФАЗ КОМПОЗИЦИИ

Рассмотрим прежний композитный материал и используем прежние допущения (1)–(6), но учтем, что при высокоинтенсивных процессах теплопереноса соотношения обобщенного закона Фурье для всех твердых фаз композиции отличаются от (8)–(10) и имеют вид [9]:

$$q_i^{\mathrm{m}} + \tau_i^{\mathrm{m}}\partial_t q_i^{\mathrm{m}} = -\lambda_i^{\mathrm{m}}\partial_i T_{\mathrm{m}} \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{39}$$

$$q_i^{(0,k)} + \tau_{i,k}^{0}\partial_t q_i^{(0,k)} = -\lambda_{i,k}^{0}\partial_i T_{0,k} \quad (1 \le k \le K_0,\ \ i = 1,\ 2,\ 3), \tag{40}$$

$$q_i^{(i,k)} + \tau_{i,k}\partial_t q_i^{(i,k)} = -\lambda_{i,k}\partial_i T_{i,k} \quad (1 \le k \le K_i,\ \ i = 1,\ 2,\ 3),$$
$$q_i^{(j,k)} + \tau_{j,k}^{*}\partial_t q_i^{(j,k)} = -\lambda_{j,k}^{*}\partial_i T_{j,k} \quad (1 \le k \le K_j,\ \ j \ne i,\ \ i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \tag{41}$$

где τ_i^{m}, $\tau_{i,k}^{0}$ — время релаксации материалов связующей матрицы и k-го ($1 \le k \le K_0$) семейства полых дисперсных включений в направлениях x'_i соответственно, $\tau_{i,\,k}$, $\tau_{i,\,k}^{*}$ — время релаксации материала трубок k-го ($1 \le k \le K_i$) семейства в продольном и поперечном направлениях соответственно, уложенных в направлении x'_i (i = 1, 2, 3), ∂_t — оператор частного дифференцирования по времени t.

Проинтегрируем соотношения (39)–(41) по времени t, тогда:

$$q_i^{\mathrm{m}}(\mathbf{x}',\, t) = \left[q_{i0}^{\mathrm{m}}(\mathbf{x}') - \int_{t_0}^{t}\frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\exp\left(\frac{s}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}',\, s)\,ds\right]\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right), \tag{42}$$

$$q_i^{(0,k)}(\mathbf{x}',\, t) = \left[q_{i0}^{(0,k)}(\mathbf{x}') - \int_{t_0}^{t}\frac{\lambda_{i,k}^{0}}{\tau_{i,k}^{0}}\exp\left(\frac{s}{\tau_{i,k}^{0}}\right)\partial_i T_{0,k}(\mathbf{x}',\, s)\,ds\right]\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_{i,k}^{0}}\right),\quad 1 \le k \le K_0, \tag{43}$$

$$q_i^{(i,k)}(\mathbf{x}',t)=\left[q_{i0}^{(i,k)}(\mathbf{x}')-\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda_{i,k}}{\tau_{i,k}}\exp\left(\frac{s}{\tau_{i,k}}\right)\partial_i T_{i,k}(\mathbf{x}',s)\,ds\right]\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_{i,k}}\right),$$

$$q_i^{(j,n)}(\mathbf{x}',t)=\left[q_{i0}^{(j,n)}(\mathbf{x}')-\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda_{j,n}^*}{\tau_{j,n}^*}\exp\left(\frac{s}{\tau_{j,n}^*}\right)\partial_i T_{j,n}(\mathbf{x}',s)\,ds\right]\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_{j,n}^*}\right),\quad (44)$$

$$1\le k\le K_i,\ \ 1\le n\le K_j,\ \ j\ne i,\ \ i,\ j=1,\,2,\,3,$$

где

$$q_{i0}^{\mathrm{m}}(\mathbf{x}')=q_i^{\mathrm{m}}(\mathbf{x}',t_0),\ \ q_{i0}^{(j,k)}(\mathbf{x}')=q_i^{(j,k)}(\mathbf{x}',t_0),\ \ 1\le k\le K_j,\ \ j=0,\,1,\,2,\,3,\quad (45)$$

t_0 — начальный момент времени. (Далее для упрощения записей будем предполагать $t_0=0$.)

Согласно допущениям 4–6 (с учетом принятой в § 1 идеализации), остаются справедливыми равенства (3), (4)–(7). Из равенства (3), с учетом (4), следует

$$\partial_i T=\left(a+\sum_{k=1}^{K_i}\left(\omega_{i,k}+\Omega_{i,k}\right)\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}+\sum_{j=0,\,3}^{j\ne i}\sum_{k=1}^{K_j}\left(\omega_{j,k}\partial_i T_{j,k}+\Omega_{j,k}\partial_i\theta_{j,k}\right),\ \ i=1,\,2,\,3,\quad (46)$$

а из условий сопряжения (5), (6), с учетом (42)–(44) и (13), имеем:

$$-\sigma_i^{(0,k)}T^3\partial_i\theta_{0,k}=\left[q_{i0}^{(0,k)}(\mathbf{x}')-\int_0^t\frac{\lambda_{i,k}^0}{\tau_{i,k}^0}\exp\left(\frac{s}{\tau_{i,k}^0}\right)\partial_i T_{0,k}(\mathbf{x}',s)\,ds\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau_{i,k}^0}\right)=$$

$$=\left[q_{i0}^{\mathrm{m}}(\mathbf{x}')-\int_0^t\frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\exp\left(\frac{s}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}',s)\,ds\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right),\ \ 1\le k\le K_0,$$

$$-\sigma_i^{(j,k)}T^3\partial_i\theta_{j,k}=\left[q_{i0}^{(j,n)}(\mathbf{x}')-\int_0^t\frac{\lambda_{j,n}^*}{\tau_{j,n}^*}\exp\left(\frac{s}{\tau_{j,n}^*}\right)\partial_i T_{j,n}(\mathbf{x}',s)\,ds\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau_{j,n}^*}\right)=\quad (47)$$

$$=\left[q_{i0}^{\mathrm{m}}(\mathbf{x}')-\int_0^t\frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\exp\left(\frac{s}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}',s)\,ds\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right),\ \ 1\le n\le K_j,$$

$$j\ne i,\ \ i,\ j=1,\,2,\,3.$$

Выразим из (47) производные $\partial_i\theta_{0,k}$, $\partial_i T_{0,k}$, $\partial_i\theta_{j,n}$, , $\partial_i T_{j,n}$ $(j\ne i)$ через $\partial_i T_{\mathrm{m}}$, тогда после элементарных преобразований получим:

$$\partial_i T_{0,k}(\mathbf{x}',t)=a_{i,k}^0\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}',t)+b_{i,k}^0(\mathbf{x}')\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)-c_{i,k}^0\int_0^t\exp\left(\frac{s-t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}',s)\,ds,$$

$$\partial_i\theta_{0,k}(\mathbf{x}',t)=-Q_{i0}^{(0,k)}(\mathbf{x}';T)\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)+\Lambda_i^{(0,k)}(T)\int_0^t\exp\left(\frac{s-t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}',s)\,ds$$

$$(1\le k\le K_0),\qquad \partial_i T_{j,n}(\mathbf{x}',t)=a_{ij}^{(n)}\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}',t)+b_{ij}^{(n)}(\mathbf{x}')\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)-$$

$$-c_{ij}^{(n)}\int_0^t \exp\left(\frac{s-t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}', s)\,ds, \quad \partial_i\theta_{j,n}(\mathbf{x}', t) = -Q_{i0}^{(j,n)}(\mathbf{x}'; T)\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)+$$
$$+\Lambda_i^{(j,n)}(T)\int_0^t \exp\left(\frac{s-t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}', s)\,ds \quad (1\le n\le K_j, \;\; j\ne i, \;\; i,\; j=1,\,2,\,3), \tag{48}$$

где

$$a_{i,k}^0 = \frac{\tau_{i,k}^0\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\tau_i^{\mathrm{m}}\lambda_{i,k}^0}, \;\; b_{i,k}^0(\mathbf{x}') = \frac{\tau_{i,k}^0-\tau_i^{\mathrm{m}}}{\tau_i^{\mathrm{m}}\lambda_{i,k}^0}q_{i0}^{\mathrm{m}}(\mathbf{x}'), \;\; c_{i,k}^0 = \frac{\tau_{i,k}^0-\tau_i^{\mathrm{m}}}{\left(\tau_i^{\mathrm{m}}\right)^2}\frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\lambda_{i,k}^0} \quad (1\le k\le K_0),$$
$$a_{ij}^{(n)} = \frac{\tau_{j,n}^*\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\tau_i^{\mathrm{m}}\lambda_{j,n}^*}, \;\; b_{ij}^{(n)}(\mathbf{x}') = \frac{\tau_{j,n}^*-\tau_i^{\mathrm{m}}}{\tau_i^{\mathrm{m}}\lambda_{j,n}^*}q_{i0}^{\mathrm{m}}(\mathbf{x}'), \;\; c_{ij}^{(n)} = \frac{\tau_{j,n}^*-\tau_i^{\mathrm{m}}}{\left(\tau_i^{\mathrm{m}}\right)^2}\frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\lambda_{j,n}^*} \quad (1\le n\le K_j,$$
$$j\ne i, \;\; j=1,\,2,\,3), \;\; Q_{i0}^{(l,k)}(\mathbf{x}'; T) = \frac{q_{i0}^{\mathrm{m}}(\mathbf{x}')}{\sigma_i^{(l,k)}T^3}, \;\; \Lambda_i^{(l,k)}(T) = \frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\tau_i^{\mathrm{m}}\sigma_i^{(l,k)}T^3} \quad (1\le k\le K_l,$$
$$0\le l\le 3, \;\; i=1,\,2,\,3). \tag{49}$$

Введем для удобства дополнительные обозначения:

$$a_{ii}^{(n)} = 1, \;\; b_{ii}^{(n)} = c_{ii}^{(n)} = 0, \;\; 1\le n\le K_i, \;\; i=1,\,2,\,3. \tag{50}$$

Подставим производные (48) в равенство (46), после чего получим

$$\partial_i T(\mathbf{x}', t) = A_i\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}', t) + B_i(\mathbf{x}'; T)\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)-$$
$$-C_i(T)\int_0^t \exp\left(\frac{s-t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}', s)\,ds, \quad i=1,\,2,\,3, \tag{51}$$

где, с учетом (49), (50), имеем выражения для коэффициентов:

$$A_i = a + \sum_{k=1}^{K_0}\omega_{0,k}a_{i,k}^0 + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{K_j}\left(\omega_{j,k}a_{ij}^{(k)} + \Omega_{j,k}\delta_{ij}\right), \;\; B_i(\mathbf{x}'; T) = \sum_{k=1}^{K_0}\left(\omega_{0,k}b_{i,k}^0 -\right.$$
$$\left.-\Omega_{0,k}\,Q_{i0}^{(0,k)}(\mathbf{x}'; T)\right) + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{K_j}\left(\omega_{j,k}b_{ij}^{(k)} - \Omega_{j,k}\,Q_{i0}^{(j,k)}(\mathbf{x}'; T)\right), \;\; C_i(T) =$$
$$= \sum_{k=1}^{K_0}\left(\omega_{0,k}c_{i,k}^0 - \Omega_{0,k}\,\Lambda_i^{(0,k)}(T)\right) + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{K_j}\left(\omega_{j,k}c_{ij}^{(k)} - \Omega_{j,k}\,\Lambda_i^{(j,k)}(T)\right), \quad i=1,\,2,\,3, \tag{52}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Определим из уравнений (51) производные

$$\partial_i T_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}', t) = \frac{C_i\left(T(\mathbf{x}', t)\right)}{A_i C_i\left(T_0(\mathbf{x}')\right)}\left[A_i\partial_i T_{\mathrm{m}0}(\mathbf{x}') - \partial_i T_0(\mathbf{x}') + B_i\left(\mathbf{x}'; T_0(\mathbf{x}')\right)\right]\times$$
$$\times\exp\left[\int_0^t D_i\left(T(\mathbf{x}', \xi)\right)d\xi\right] + \frac{\partial_i T(\mathbf{x}', t)}{A_i} - \frac{B_i\left(\mathbf{x}'; T(\mathbf{x}', t)\right)}{A_i}\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)+$$

$$+\frac{C_i\left(T\left(\mathbf{x}',\,t\right)\right)}{A_i^2}\int_0^t\left\{\left[\partial_i T\left(\mathbf{x}',\,s\right)-B_i\left(\mathbf{x}';\,T\left(\mathbf{x}',\,s\right)\right)\exp\left(-\frac{s}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[\int_s^t D_i\left(T\left(\mathbf{x}',\,\xi\right)\right)d\xi\right]\right\}ds,\quad i=1,\,2,\,3, \tag{53}$$

где

$$D_i\left(T\right)=\frac{C_i\left(T\right)}{A_i}-\frac{1}{\tau_i^{\mathrm{m}}},\quad T_0\left(\mathbf{x}'\right)=T\left(\mathbf{x}',\,0\right),\quad \partial_i T_0\left(\mathbf{x}'\right)=\partial_i T\left(\mathbf{x}',\,0\right),$$
$$\partial_i T_{\mathrm{m}0}\left(\mathbf{x}'\right)=\partial_i T_{\mathrm{m}}\left(\mathbf{x}',\,0\right),\qquad i=1,\,2,\,3. \tag{54}$$

Из равенства (7), с учетом (42), (44) и (4), имеем

$$q_i\left(\mathbf{x}',\,t\right)=a_i\left[q_{i0}^{\mathrm{m}}\left(\mathbf{x}'\right)-\int_0^t\frac{\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\exp\left(\frac{s}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}\left(\mathbf{x}',\,s\right)ds\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{K_i}\omega_{i,k}\left[q_{i0}^{(i,k)}\left(\mathbf{x}'\right)-\int_0^t\frac{\lambda_{i,k}}{\tau_{i,k}}\exp\left(\frac{s}{\tau_{i,k}}\right)\partial_i T_{\mathrm{m}}\left(\mathbf{x}',\,s\right)ds\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau_{i,k}}\right)+ \tag{55}$$
$$+\sum_{k=1}^{K_i}\Omega_{i,k}Q_i^{(i,k)},\quad i=1,\,2,\,3,$$

где величины a_i определены в (19).

Подставим в равенства (55) соотношения (53), тогда получим

$$q_i\left(\mathbf{x}',\,t\right)=a_i q_{i0}^{\mathrm{m}}\left(\mathbf{x}'\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)+\sum_{k=1}^{K_i}\omega_{i,k}q_{i0}^{(i,k)}\left(\mathbf{x}'\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau_{i,k}}\right)-$$
$$-\int_0^t\left[\frac{a_i\lambda_i^{\mathrm{m}}}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\exp\left(\frac{s-t}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)+\sum_{k=1}^{K_i}\frac{\omega_{i,k}\lambda_{i,k}}{\tau_{i,k}}\exp\left(\frac{s-t}{\tau_{i,k}}\right)\right]\left\{\frac{C_i\left(T\left(\mathbf{x}',\,s\right)\right)}{A_iC_i\left(T_0\left(\mathbf{x}'\right)\right)}\left[A_i\partial_i T_{\mathrm{m}0}\left(\mathbf{x}'\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\partial_i T_0\left(\mathbf{x}'\right)+B_i\left(\mathbf{x}';\,T_0\left(\mathbf{x}'\right)\right)\right]\exp\left[\int_0^s D_i\left(T\left(\mathbf{x}',\,\xi\right)\right)d\xi\right]+\frac{\partial_i T\left(\mathbf{x}',\,s\right)}{A_i}-\frac{B_i\left(\mathbf{x}';\,T\left(\mathbf{x}',\,s\right)\right)}{A_i}\times \tag{56}$$
$$\times\exp\left(-\frac{s}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)+\frac{C_i\left(T\left(\mathbf{x}',\,s\right)\right)}{A_i^2}\int_0^s\left[\partial_i T\left(\mathbf{x}',\,r\right)-B_i\left(\mathbf{x}';\,T\left(\mathbf{x}',\,r\right)\right)\exp\left(-\frac{r}{\tau_i^{\mathrm{m}}}\right)\right]\times$$
$$\left.\times\exp\left[\int_r^s D_i\left(T\left(\mathbf{x}',\,\xi\right)\right)d\xi\right]dr\right\}ds+\sum_{k=1}^{K_i}\Omega_{i,k}Q_i^{(i,k)},\quad i=1,\,2,\,3.$$

Соотношения (56), с учетом равенств (19), (49), (50), (52), (54), (45), (25), образуют искомую систему определяющих уравнений теплопроводности ($q_i=f_i\left(\partial_i T\right)$) дисперсно-упрочненного гибридного композитного материала, армированного полыми волокнами в трех взаимно ортогональных направлениях x_i', при учете времени релаксации фаз композиции.

Замечание 3. Если до начального момента времени $t = t_0 = 0$ имелось стационарное температурное поле, то, зная $\partial_i T_0(\mathbf{x}')$, согласно замечанию 2, можно определить $\partial_i T_{\mathrm{m}0}(\mathbf{x}')$, а затем и $q_{i0}^{\mathrm{m}}(\mathbf{x}')$, $q_{i0}^{(i,k)}(\mathbf{x}')$, входящие в равенства (56).

После подстановки соотношений (56) в уравнение теплового баланса [9]

$$\operatorname{div}\mathbf{q} + C\partial_t T + T\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}\partial_t\varepsilon_{ij} = W \tag{57}$$

получим нелинейное интегродифференциальное уравнение теплопроводности относительно осредненной температуры T композиции, которое не будем здесь приводить в развернутом виде.

В уравнении (57) приняты обозначения: $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$, C — задана соотношением (38), W — приведенная плотность мощности внутренних источников тепла, которая определяется по правилу простой смеси от аналогичных величин для фаз композиции, ε_{ij} — компоненты тензора упругих деформаций, β_{ij} — компоненты тензора эффективных температурных жесткостей композиции. (Последняя группа слагаемых в левой части уравнения (57) учитывается, если рассматривается связанная задача термоупругости.)

Для однозначного интегрирования уравнения теплопроводности к нему необходимо присоединить общеизвестные начальные и граничные условия теории теплопроводности твердых тел [9], которые здесь не будем приводить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Проектирование армированных композитов с заданным набором эффективных теплофизических характеристик и некоторые смежные задачи диагностики их свойств // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15, № 2. С. 291–306.
2. **Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др.** Композиционные материалы: Справочник / Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. **Композиционные** материалы. Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
4. **Гуров К. П.** Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. М.: Наука, 1978. 128 с.
5. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Теплопроводноть конструкций с системой трубок, заполненных жидким теплоносителем // Теплофизика и аэромеханика. 2000. Т. 7, № 2. С. 267–284.
6. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Теплопроводность волокнистых оболочек // Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5, № 2. С. 215–235.
7. **Пространственно-армированные** композиционные материалы: Справочник / Под ред. Ю.М. Тарнопольского, И.Г. Жигуна, В.А. Полякова. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
8. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Сравнительный анализ структурных моделей теплопроводности волокнистых сред и сведение трехмерной задачи теплопроводности армированных пластин к двумерной // Конструкции из композиционных материалов. 2004. № 3. С. 36–51.
9. **Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.** Обобщенная термомеханика. Киев: Наукова думка, 1976. 310 с.

*Статья поступила в редакцию 15 сентября 2008 г.,
после переработки 13 января 2010 г.*