

УДК 536.252+53.098+536.33

**Свободноконвективное течение  
вдоль вертикальной пластины, вызванное  
переменной температурой поверхности,  
в присутствии источника/стока тепла,  
магнитного поля и теплового излучения**

**П.Б.А. Редди<sup>1</sup>, Н.Б. Редди<sup>1</sup>, Г. Палани<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Университет С.В., Тирупати, А. П., Индия*

<sup>2</sup>*Гос. колледж Искусств им. Др. Амбедкара, Ченнай, Тамил Наду,  
Индия*

E-mail: gpalani32@yahoo.co.in

В настоящей работе проводится численное моделирование с целью изучения теплообменных характеристик свободно-конвективного течения вдоль вертикальной пластины в присутствии источника/стока тепла, магнитного поля и теплового излучения. На поверхности пластины задана переменная температура. Уравнения пограничного слоя, описывающие течение, сводятся к безразмерным уравнениям, применимым к режиму свободной конвекции, с использованием соответствующих безразмерных параметров. Безразмерные определяющие уравнения решаются неявным методом конечных разностей Крэнка–Никольсона с быстрой сходимостью, большой точностью и безусловной устойчивостью. Численные результаты получены и представлены для скорости, температуры, локального и среднего касательного напряжения на стенке и локального и среднего числа Нуссельта в воздухе. Настоящие результаты сравниваются с имеющимися в литературе и оказываются идеально согласованными.

**Ключевые слова:** источник тепла, магнитная гидродинамика, излучение, конечные разности, поверхностное трение.

**Введение**

Свободно-конвективные течения и теплообмен в них являются важными моментами в тепловом проектировании различного промышленного оборудования, а также в ядерных реакторах и геофизической динамике жидкости. Нестационарные свободно-конвективные потоки на вертикальных поверхностях имеют широкое применение в конструировании технологического оборудования. Свободно-конвективный поток на полубесконечной пластине был впервые изучен в работе [1] с использованием интегрального метода, в то время как метод подобия впервые применен для изучения данной проблемы в работе [2], были получены решения соответствующих нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При неоднородности поверхностного нагрева стационарная свободная конвекция на полубесконечной вертикальной пластине становится довольно сложной. Неоднородный нагрев изучался в работе [3] в предположении степенной зависимости

температуры стенки от координаты  $T'_w = T'_\infty + ax^n$ , где  $a$  — константа. Авторы работы [4] изучали нестационарную свободную конвекцию на полубесконечной вертикальной пластине с неоднородной температурой поверхности. Безразмерные определяющие уравнения в частных производных решаются с использованием неявной конечно-разностной схемы.

Ламинарная свободная конвекция в пограничном слое электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля исследована многими учеными по причине ее широкого применения в промышленности и технологиях. Влияние магнитного поля на течение несжимаемой вязкой электропроводной жидкости важно для многих приложений, таких как экструзия пластиков в производстве вискозы и нейлона, очистка сырой нефти, обработка магнетиков, процесс контроля над производством стекла, бумажная промышленность, различные геофизические применения и т. д. Во многих промышленных процессах охлаждение нитей или листов некоторых полимерных материалов важно на производственных поточных линиях. Конвекция в магнитном поле играет важную роль в различных промышленных приложениях, включая управление магнитным полем течением жидкого чугуна при производстве стали и охлаждением жидких металлов в ядерных реакторах.

Свободно-конвективный теплообмен был рассмотрен авторами [5] при одновременном действии плавучести и индуцированных магнитных сил. Исследователи выяснили, что магнитное поле значительно влияет на свободно-конвективный теплообмен в жидких металлах. В работе [6] изучалось развитие асимметричного течения вязкой электропроводной жидкости в окрестности точки торможения на двумерном теле и вдоль его поверхности под действием магнитного поля, когда внешний поток или тело внезапно приводились в движение из состояния покоя. Естественная магнитногидродинамическая (МГД) конвекция от неизотермической наклонной поверхности с многочисленными щелями для отсоса/вдува, находящейся в термически стратифицированной высокопористой среде, изучена в работе [7]. Нелинейные параболические уравнения в частных производных решались численно с использованием неявной конечно-разностной схемы. Преобразованные уравнения пограничного слоя решались численно с использованием конечно-разностной схемы. Ламинарное свободно-конвективное течение в пограничном слое в присутствии поперечного магнитного поля вокруг охлаждаемого конуса, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии, изучалось в [8] с использованием переменных подобия.

Течения с существенным влиянием радиационно-конвективного теплообмена имеют многочисленные применения в производстве стекла, в технологиях, применяющихся в печах, высокотемпературной аэродинамике, динамике развития опасных факторов пожара и при возвращении космических кораблей. Авторы работы [9] показали, что в оптически тонком пределе жидкость не поглощает собственное излучение, но поглощает излучение на границах. Авторы работы [10] показали, что в оптически тонком пределе физические условия можно упростить, и затем получили точное решение для стационарного потока излучающей жидкости в вертикальном канале. В работе [12] изучался свободно-конвективный теплообмен при влиянии теплового излучения в приближении оптически тонкого серого газа на полубесконечной вертикальной пластине. Воздействие излучения на смешанную конвекцию вдоль изотермической вертикальной пластины изучались в работе [13]. Авторы [14] изучали воздействия теплового излучения и свободно-конвективного течения на движущейся вертикальной пластине. Воздействие излучения на свободно-конвективное течение на вертикальной пластине с массопереносом изучались в работе [15]. Уравнения пограничного слоя для данной задачи решались численно неявным методом конечных разностей. Авторы работы [16] изучили воздей-

ствие излучения на поток на бесконечной вертикальной мгновенно начинающей двигаться пластине при переменных температурах с использованием преобразования Лапласа.

Множество процессов в областях новых технологий протекают при высоких температурах, и знание о теплообмене излучением в дополнение к знаниям о конвективном теплообмене становится важным для проектирования соответствующего оборудования. Атомные электростанции, газовые турбины и различные двигатели для самолетов, ракет, спутников и космических аппаратов являются примерами таких областей конструирования. Более того, теплообмен излучением происходит в жидкостях, которые могут проводить электричество и быть ионизированными вследствие высоких рабочих температур. Поэтому интересно изучить воздействие магнитного поля на течение. Изучение таких эффектов имеет большую важность в применениях, где тепловое излучение и магнитное поле взаимосвязаны. Процесс плавления металлов и процесс охлаждения внутренней стенки защитной оболочки термоядерного реактора, где горячая плазма изолирована от стенки прикладываемыми магнитными полями, представляют примеры таких течений.

Магнитогидродинамический поток на пластине в присутствии излучения изучен авторами в работе [17]. Получено аналитическое решение для средней температуры, скорости и магнитного поля, и обсуждается воздействие излучения на температуру. Комбинированные воздействия потока теплового излучения, теплопроводности, чисел Рейнольдса и не подчиняющихся закону Дарси (сопротивление Форшаймера и пограничное сопротивление Бринкмана) массовых сил тела на стационарное ламинарное течение в пограничном слое вдоль вертикальной поверхности в идеализированной геологической пористой среде исследованы в работе [18]. Влияние излучения на свободно-конвективный поток и массоперенос на вертикальной изотермической конической поверхности с химической реакцией в присутствии магнитного поля изучено в [19] с использованием переменных подобия. Воздействие излучения на магнитогидродинамический нестационарный свободно-конвективный поток на полубесконечной вертикальной пористой пластине в присутствии трансверсального однородного магнитного поля изучалось в работе [20]. Эффекты теплового излучения и сил сопротивления на пористой поверхности при естественном конвективном теплопереносе вязкой несжимаемой серой абсорбирующей и излучающей жидкости, стекающей по мгновенно начинающей движение вертикальной пластине, смежные с пористым режимом, не подчиняющимся закону Дарси, исследованы авторами работы [21].

Влияние источника/стока тепла на естественную конвекцию значительно там, где могут существовать высокие перепады температур между поверхностью (например, корпусом космического аппарата) и окружающей жидкостью. Также тепловыделение важно в контексте экзотермических или эндотермических химических реакций. В работе [22] проведено одно из первых исследований с использованием метода подобия для потока в точке торможения с источником тепла/теплоотвода, интенсивность которого зависит от времени. Авторы работы [23] изучали нестационарный свободно-конвективный поток на бесконечной пластине с постоянным стоком и источником тепла. Намного позже в работе [24] было представлено одно из самых подробных исследований тепловых и концентрационных пограничных слоев с эффектами МГД для случая точечного стока тепла. Авторы работы [25] расширили этот анализ на случай поперечного потока массы (вдув/отсос на стенке) и источника тепла, совмещенных с холловскими эффектами в двойных диффузионных пограничных слоях под влиянием сильного магнитного поля. В работе [26] рассмотрены магнитогидродинамические свободно-конвективные течения на бесконечной вертикальной пластине с постоянным отсосом и отводом тепла.

Однако свободно-конвективный поток при воздействии магнитного поля и теплового излучения на вертикальной пластине при переменных температурах поверхности в присутствии источника/стока тепла еще не привлекал внимания исследователей. Предмет настоящего исследования — совместное воздействие магнитного поля и теплового излучения на полубесконечной вертикальной пластине при влиянии переменных температур поверхности, когда жидкость является несжимаемой, излучающей, вязкой и электропроводной. Система безразмерных определяющих уравнений решается методом конечных разностей.

### 1. Основные уравнения и математический анализ

Рассматривается двумерный нестационарный поток электропроводной излучающей вязкой несжимаемой жидкости на полубесконечной вертикальной пластине с температурой  $T'_w(x) = T'_\infty + x^n$ , (где  $n$  — константа). Окружающая жидкость в состоянии покоя имеет температуру  $T'_\infty$ . Система координат выбирается так, чтобы ось  $x$  была направлена вдоль пластины вертикально вверх и ось  $y$  — по нормали к пластине. Предполагается, что эффектом вязкой диссипации в уравнениях энергии можно пренебречь. Равномерное магнитное поле  $B_0$  приложено по оси  $y$ . Все свойства жидкости считаются постоянными за исключением изменений плотности в члене массовой силы в приближении Буссинеска.

Так, полностью развитый поток излучающего газа определяется следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T' - T'_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u, \quad (2)$$

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} \right] = k \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} - \frac{\partial q_r}{\partial y} + Q_0(T' - T'_\infty). \quad (3)$$

Излучающий газ называется несерым, если коэффициент абсорбции  $K_\lambda$  зависит от длины волны  $\lambda$  [11, 20]. Уравнение, описывающее сохранение потока излучения в единичном объеме для всех длин волн:

$$\Delta \cdot \bar{q}_r = \int_0^\infty K_\lambda(T') [4\pi I_{b\lambda}(T') - G_\lambda] d\lambda, \quad (4)$$

где  $I_{b\lambda}$  — спектральная плотность для черного тела,  $q_r$  — радиационный тепловой поток и  $G_\lambda$  — падающее излучение, определяемое как

$$G_\lambda = \int_{\Omega=4\pi} I_{b\lambda}(\Omega) d\Omega, \quad (5)$$

где  $\Omega$  — пространственный угол.

Теперь для теплообмена излучением оптически тонкой жидкости с пластиной при средней температуре  $T'_w$  в соответствии с уравнением (5) и законом Кирхгофа падающее излучение задается в соответствии с [9, 20]  $G_\lambda = 4\pi I_{b\lambda}(T'_w) = 4e_{b\lambda}(T'_w)$ .

Таким образом, уравнение (4) сводится к

$$\Delta \cdot \bar{q}_r = 4 \int_0^{\infty} K_{\lambda}(T') [e_{b\lambda}(T') - e_{b\lambda}(T'_w)] d\lambda. \quad (6)$$

Разлагая  $e_{b\lambda}(T')$  и  $K_{\lambda}(T')$  в ряды Тейлора вблизи  $T'_w$  для малых  $(T' - T'_w)$ , можно переписать дивергенцию теплового потока  $q_r$  как

$$\Delta \cdot \bar{q}_r = 4(T' - T'_w) \int_0^{\infty} K_{\lambda w} \left( \frac{\partial e_{b\lambda}}{\partial T'} \right)_w d\lambda = 4(T' - T'_w) \Gamma, \quad (7)$$

где  $K_{\lambda w} = K_{\lambda}(T'_w)$  — коэффициент средней абсорбции,  $\Gamma = \int_0^{\infty} K_{\lambda w} \left( \frac{\partial e_{b\lambda}}{\partial T'} \right)_w d\lambda$  и  $e_{b\lambda}$  — функция Планка.

Следовательно для оптически тонкого несерого газа около точки равновесия действует следующая зависимость:

$$\Delta \cdot \bar{q}_r = 4(T' - T'_w) \Gamma, \quad (8)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial q_r}{\partial y} = 4(T' - T'_w) \Gamma. \quad (9)$$

Таким образом, уравнение энергии (3) сводится к

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} \right] = k \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} - 4(T' - T'_w) \Gamma + Q_0(T' - T'_w). \quad (10)$$

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} t' \leq 0: & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_\infty && \text{для всех } x \text{ и } y \\ t' > 0: & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_\infty + x^n && \text{при } y = 0 \\ & \quad u = 0, \quad T' = T'_\infty && \text{при } x = 0 \\ & \quad u \rightarrow 0, \quad T' \rightarrow T'_\infty && \text{при } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (11)$$

где  $u$  и  $v$  — компоненты скорости по осям  $x$  и  $y$  соответственно,  $T'$  — температура газа в пограничном слое,  $T'_\infty$  — температура вдали от пластины,  $t'$  — время,  $g$  — ускорение свободного падения,  $k$  — теплопроводность жидкости,  $\beta$  — объемный коэффициент теплового расширения,  $\rho$  — плотность,  $C_p$  — удельная теплоемкость,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $B_0$  — индукция магнитного поля,  $\sigma$  — электропроводность,  $\mu$  — коэффициент вязкости,  $q_r$  — радиационный тепловой поток и  $Q_0$  — источник/сток тепла. При выборе безразмерных величин:

$$\begin{aligned} X = x/L, \quad Y = \frac{y}{L} Gr_L^{1/4}, \quad U = \frac{uL}{L} Gr_L^{-1/2}, \quad V = \frac{vL}{\nu} Gr_L^{-1/4}, \quad t = \frac{\nu t'}{L^2} Gr_L^{1/2}, \\ T = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w - T'_\infty}, \quad Gr_L = \frac{g\beta L^3 (T'_w - T'_\infty)}{\nu^2}, \quad Ra = \frac{4\Gamma L^2}{\nu\rho C_p} Gr_L^{-1/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu C_p}{k}, \quad M = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{\rho \nu} \text{Gr}_L^{-1/2}, \quad \phi = \frac{Q_0 L^2}{\rho C_p \nu} \text{Gr}_L^{-1/2},$$

где  $\text{Pr}$  — число Прандтля для жидкости,  $M$  — параметр магнитного поля,  $\text{Gr}_L$  — число Грасгофа,  $L$  — масштаб длины,  $Ra$  — параметр излучения и  $\phi$  — источник/сток тепла, уравнения (1), (2) и (10) сводятся к следующему безразмерному виду:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = T + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - MU, \quad (14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} - Ra(T-1) + \phi T. \quad (15)$$

Соответствующие начальные и граничные условия в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} t \leq 0: \quad & U = 0, \quad V = 0, \quad T = 0 \quad \text{для всех } x \text{ и } y \\ t > 0: \quad & U = 0, \quad V = 0, \quad T = X^n \quad \text{при } Y = 0 \\ & U = 0, \quad T = 0 \quad \text{при } X = 0 \\ & U \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (16)$$

Локальное безразмерное поверхностное трение и локальное число Нуссельта задаются следующим образом:

$$\tau_X = \text{Gr}_L^{3/4} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0}, \quad \text{Nu}_X = \frac{-X \text{Gr}_L^{1/4} \left( \frac{\partial T}{\partial Y} \right)_0}{T_{Y=0}}. \quad (17)$$

Безразмерное среднее поверхностное трение и среднее число Нуссельта задаются:

$$\bar{\tau} = \text{Gr}_L^{3/4} \int_0^1 \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0} dX, \quad \bar{\text{Nu}} = \text{Gr}_L^{1/4} \int_0^1 \left[ \frac{\left( \frac{\partial T}{\partial Y} \right)_0}{T_{Y=0}} \right] dX. \quad (18)$$

## 2. Численные методы

Определяющие уравнения (13)–(15) представляют связанную систему нелинейных уравнений в частных производных, решаемых численно при начальных и граничных условиях (16) с использованием неявной схемы конечных разностей Крэнка–Никольсона. Конечно-разностные уравнения, соответствующие уравнениям (13)–(15), следующие:

$$\begin{aligned} & \frac{[U_{i,j}^{m+1} - U_{i-1,j}^{m+1} + U_{i,j}^m - U_{i-1,j}^m + U_{i,j-1}^{m+1} - U_{i-1,j-1}^{m+1} + U_{i,j-1}^m - U_{i-1,j-1}^m]}{4\Delta X} + \\ & + \frac{[V_{i,j}^{m+1} - V_{i,j-1}^{m+1} + V_{i,j}^m - V_{i,j-1}^m]}{2\Delta Y} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{[U_{i,j}^{m+1} - U_{i,j}^m]}{\Delta t} + U_{i,j}^m \frac{[U_{i,j}^{m+1} - U_{i-1,j}^{m+1} + U_{i,j}^m - U_{i-1,j}^m]}{2\Delta X} + \\
& + V_{i,j}^m \frac{[U_{i,j+1}^{m+1} - U_{i,j-1}^{m+1} + U_{i,j+1}^m - U_{i,j-1}^m]}{4\Delta Y} = \frac{1}{2} [T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j}^m] + \\
& + \frac{[U_{i,j-1}^{m+1} - 2U_{i,j}^{m+1} + U_{i,j+1}^{m+1} + U_{i,j-1}^m - 2U_{i,j}^m + U_{i,j+1}^m]}{2(\Delta Y)^2} - M \frac{[U_{i,j}^{m+1} + U_{i,j}^m]}{2}. \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{[T_{i,j}^{m+1} - T_{i,j}^m]}{\Delta t} + U_{i,j}^m \frac{[T_{i,j}^{m+1} - T_{i-1,j}^{m+1} + T_{i,j}^m - T_{i-1,j}^m]}{2\Delta X} + \\
& + V_{i,j}^m \frac{[T_{i,j+1}^{m+1} - T_{i,j-1}^{m+1} + T_{i,j+1}^m - T_{i,j-1}^m]}{4\Delta Y} = \\
& = \frac{1}{Pr} \frac{[T_{i,j-1}^{m+1} - 2T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j+1}^{m+1} + T_{i,j-1}^m - 2T_{i,j}^m + T_{i,j+1}^m]}{2(\Delta Y)^2} - \\
& - Ra \left[ \frac{1}{2} (T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j}^m) - 1 \right] + \phi \left[ \frac{1}{2} (T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j}^m) \right]. \quad (21)
\end{aligned}$$

Область интегрирования — прямоугольник со сторонами  $X_{\max} (= 1)$  и  $Y_{\max} (= 30)$ , где  $Y_{\max}$  соответствует  $Y = \infty$  и лежит вне динамического и теплового пограничных слоев. По результатам предварительных расчетов максимум  $Y$  выбран равным 30, чтобы выполнялись последние два из граничных условий (16). Для получения экономичной и надежной расчетной сетки было рассмотрено влияние количества ее узлов на результаты вычислений. Для всех последующих расчетов выбрана сетка  $20 \times 120$  с  $\Delta X = 0,05$  и  $\Delta Y = 0,25$ . Также исследование зависимости решения от величины временного шага показало, что  $\Delta t = 0,01$  дает надежные результаты. Здесь нижний индекс  $i$  обозначает точку сетки по направлению  $X$ ,  $j$  — по направлению  $Y$ , и верхний индекс  $m$  — по направлению  $t$ . На протяжении одного временного шага коэффициенты  $U_{ij}^m$  и  $V_{ij}^m$ , появляющиеся в разностных уравнениях, считаются постоянными. Величины  $U$ ,  $V$  и  $T$  известны во всех точках сетки при  $t = 0$  из начальных условий. Вычисления  $U$ ,  $V$  и  $T$  на временном уровне  $(m + 1)$  с использованием величин на прежнем временном уровне  $(m)$  выполняются следующим образом. Уравнение в конечных разностях (21) в каждой внутренней узловой точке на определенном  $i$ -уровне образует трехдиагональную матрицу (систему уравнений). Такая система уравнений решается алгоритмом Томаса, как описано в работе [27]. Таким образом, величины  $T$  находятся в каждой узловой точке для определенного  $i$  при  $(m + 1)^{\text{th}}$ . Используя величины  $T$  при временном уровне  $(m + 1)^{\text{th}}$  в уравнении (20), величины  $U$  при временном уровне  $(m + 1)^{\text{th}}$  можно найти схожим образом. Таким образом, величины  $T$  и  $U$  известны на определенном уровне  $i$ . Наконец, величины  $V$  рассчитываются явно с использованием уравнения (19) в каждой узловой точке на определенном  $i$ -уровне на временном уровне  $(m + 1)^{\text{th}}$ . Этот процесс повторяется для разных  $i$ -уровней. Таким образом, величины  $T$ ,  $U$  и  $V$  известны во всех узловых точках в области прямоугольника на временном уровне  $(m + 1)^{\text{th}}$ .

Вычисления проводятся до достижения стационарного состояния. Предполагается, что стационарное решение получено, когда абсолютная разница между величинами  $U$ , а также температурой  $T$  при двух последовательных временных шагах меньше  $10^{-5}$  во всех точках сетки.

Производные в уравнениях (17) и (18) оцениваются с использованием пяти-точечной аппроксимационной формулы, а затем интегралы оцениваются с использованием замкнутой формулы интегрирования Ньютона–Кюта.

### 3. Устойчивость и сходимость конечноразностной схемы

Критерий устойчивости конечно-разностной схемы при постоянном шаге сетки изучается с использованием техники фон Неймана [27]. Общая часть разложения Фурье для  $U$  и  $T$  в момент времени, произвольно обозначаемый  $t = 0$ , предположительно такова:  $e^{i\alpha X} e^{i\beta Y}$  (здесь  $i = \sqrt{-1}$ ). При возрастании  $t$  получим:

$$\begin{aligned} U &= F(t)e^{i\alpha X} e^{i\beta Y}, \\ T &= G(t)e^{i\alpha X} e^{i\beta Y}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (22) в уравнения (20) и (21), при допущении, что коэффициенты  $U$  и  $T$  являются постоянными при любом одном временном шаге, и определяя величины после одного временного шага как  $F'$  и  $G'$ , после упрощения получаем:

$$\begin{aligned} \frac{(F' - F)}{\Delta t} + \frac{U}{2} \frac{(F' + F)(1 - e^{-i\alpha\Delta X})}{\Delta X} + \frac{V}{2} \frac{(F' + F)i \sin \beta\Delta Y}{\Delta Y} &= \\ = \frac{(G' + G)}{2} + \frac{(F' + F)(\cos \beta\Delta Y - 1)}{(\Delta Y)^2} - M \frac{(F' + F)}{2}. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{(G' - G)}{\Delta t} + \frac{U}{2} \frac{(G' + G)(1 - e^{-i\alpha\Delta X})}{\Delta X} + \frac{V}{2} \frac{(G' + G)i \sin \beta\Delta Y}{\Delta Y} &= \\ = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{(G' + G)(\cos \beta\Delta Y - 1)}{(\Delta Y)^2} - Ra \left( \frac{G' + G}{2} - 1 \right) + \phi \left( \frac{G' + G}{2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения (23) и (24) можно переписать как:

$$(1 + A)F' = (1 - A)F + \frac{(G' + G)}{2} \Delta t, \quad (25)$$

$$(1 + B)G' = (1 - B)G + Ra\Delta t, \quad (26)$$

где

$$A = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X} (1 - e^{-i\alpha\Delta X}) + \frac{V}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y} i \sin(\beta\Delta Y) - (\cos \beta\Delta Y - 1) \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2} + \frac{\Delta t}{2} M,$$

$$B = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X} (1 - e^{-i\alpha\Delta X}) + \frac{V}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y} i \sin(\beta\Delta Y) - \frac{(\cos \beta\Delta Y - 1)}{\text{Pr}} \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2} + \frac{Ra}{2} \Delta t - \frac{\phi}{2} \Delta t.$$

Исключив  $G'$  в уравнении (25) и используя уравнение (26), получаем результирующее уравнение:

$$(1+A)F' = (1-A)F + \frac{G}{(1+B)}\Delta t + Ra \frac{(\Delta t)^2}{2(1+B)}. \quad (27)$$

Уравнения (27) и (26) можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\begin{bmatrix} F' \\ G' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-A}{1+A} \frac{\Delta t}{(1+A)(1+B)} & \\ 0 & \frac{1-B}{1+B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Ra\Delta t^2}{2(1+A)(1+B)} \\ \frac{Ra\Delta t}{1+B} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Теперь для устойчивости конечно-разностной схемы модуль каждого собственного значения матрицы перехода не должен превышать единицы. Поскольку матрица в уравнении (28) треугольная, собственные значения являются ее диагональными элементами. Собственные значения матрицы перехода —  $(1-A)/(1+A)$  и  $(1-B)/(1+B)$ . Предположив, что  $U$  везде неотрицательная, а  $V$  везде неположительная, получаем:

$$A = 2\alpha \sin^2\left(\frac{\alpha\Delta X}{2}\right) + 2c \sin^2\left(\frac{\beta\Delta Y}{2}\right) + i(a \sin \alpha\Delta X - b \sin \beta\Delta Y) + \frac{M}{2}\Delta t,$$

где

$$a = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X}, \quad b = \frac{|V|}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y}, \quad c = \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2}.$$

Поскольку действительная часть  $A$  больше или равна нулю,  $|(1-A)/(1+A)| < 1$  всегда. Также  $|(1-B)/(1+B)| \leq 1$ . Поэтому конечно-разностная схема безусловно устойчива. Локальная ошибка усечения порядка  $O(\Delta t^2 + \Delta Y^2 + \Delta X)$  стремится к нулю при  $\Delta t$ ,  $\Delta X$  и  $\Delta Y$  стремящихся к нулю и схема является согласованной. Устойчивость и согласованность схемы обеспечивают сходимость.

#### 4. Результаты и обсуждение

Для проверки точности настоящих численных результатов они сравниваются с другими опубликованными данными. Результаты вычислений для стационарных профилей скорости при  $X = 1$  с  $\phi = 0$ ,  $n = 0$ ,  $Ra = 0$ ,  $M = 0$  хорошо согласуются с результатами работы [4] (см. рис. 1).

Нестационарные профили скорости при  $X = 1$  для разных параметров магнитного поля и показателя  $n$  рассчитаны численно и представлены в графическом виде на рис. 2. Скорость жидкости возрастает со временем до достижения временного

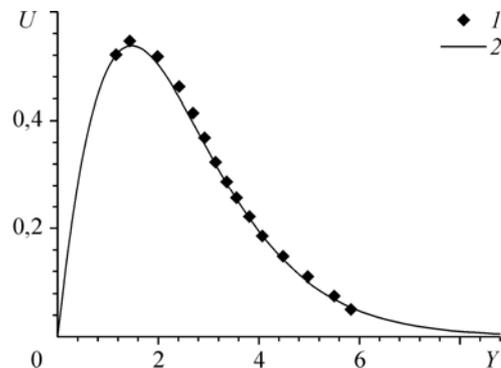


Рис. 1. Сравнение профилей скорости стационарного состояния при  $X = 1$ .

$Pr = 0,7$ ,  $M = 0$ ,  $n = 0$ ,  $\phi = 0$ ,  $Ra = 0$ .

1 — результаты работы [4], 2 — результаты настоящей работы.

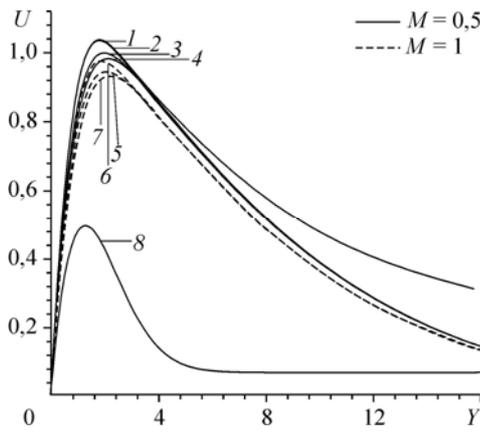


Рис. 2. Нестационарные профили скорости при  $X = 1$  для разных значений  $Ra$  и  $\phi$ .

$Pr = 0,71, Ra = 0,04, \phi = 1$ . При  $n = 0$   $t = 8,95$  (1),  $31,78^*$  (2),  $32,59^*$  (5),  $1,5$  (8); при  $n = 0,5$   $t = 31,82^*$  (3),  $32,63^*$  (6); при  $n = 1$   $t = 31,85^*$  (4),  $32,66^*$  (7) (\* — стационарное состояние).

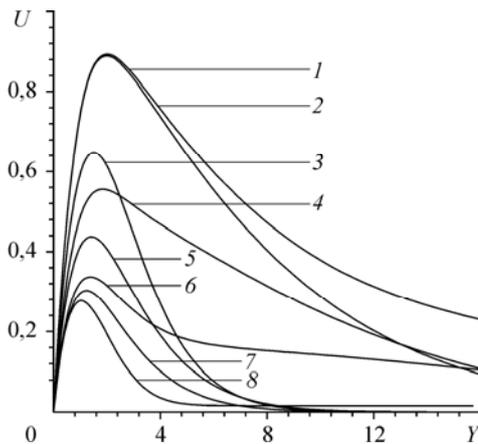


Рис. 3. Нестационарные профили скорости при  $X = 1$  для разных значений  $M$  и  $n$ .

$Pr = 0,71, M = 1, n = 0,5$ . При  $Ra = 0,02$  и  $\phi = 1$   $t = 11,21$  (1),  $40,59^*$  (2),  $1,18$  (8); при  $Ra = 0$  и  $\phi = 1$   $t = 20,18^*$  (3); при  $\phi = 0,5$   $Ra = 0,02$  и  $t = 33,11^*$  (4),  $Ra = 0$  и  $t = 14,49^*$  (5); при  $\phi = 0$   $Ra = 0,02$  и  $t = 22,11^*$  (6),  $Ra = 0$  и  $t = 7,45^*$  (7) (\* — стационарное состояние).

максимума, а затем наблюдается ее умеренное уменьшение до достижения окончательного стационарного состояния. Замечено, что время достижения стационарного состояния возрастает с увеличением параметра магнитного поля. Воздействие поперечного магнитного поля на проводящую электричество жидкость увеличивают силу сопротивления, называемую силой Лоренца. Эта сила вызывает замедление движения жидкости и увеличение ее температуры. Мы также наблюдаем из рисунка, что скорость в стационарном состоянии уменьшается по мере увеличения  $n$  при всех положениях относительно передней кромки. Время достижения стационарного состояния увеличивается с ростом  $n$ .

Рис. 3 показывает распределение скорости воздуха для разных величин параметра излучения  $Ra$  и параметра источника тепла  $\phi$ . На рис. 3 видно, что скорость воздуха возрастает с ростом параметра излучения. Требуется больше времени для достижения стационарного состояния для больших величин параметра радиации  $Ra$ . Из-за присутствия источника энергии скорость воздуха увеличивается. Далее

также можно заметить, что для достижения стационарного состояния при больших величинах параметра источника тепла  $\phi$  требуется больше времени.

На рис. 4 представлено влияние расстояния от передней кромки и параметра магнитного поля на нестационарную температуру для воздуха. Мы наблюдаем на этом

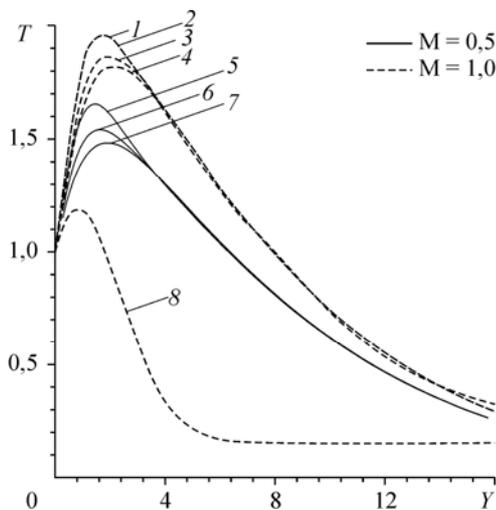
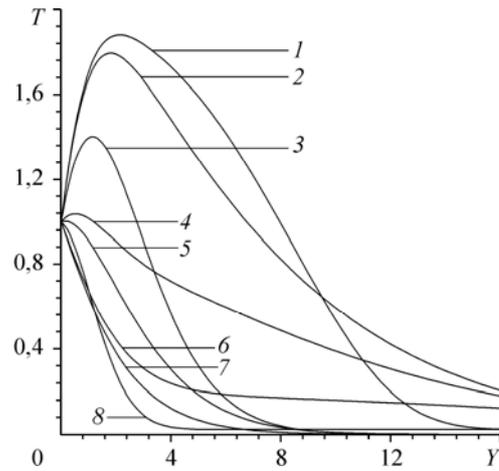


Рис. 4. Профили переходной температуры при  $X = 1$  для разных значений  $M$  и  $n$ .

$Pr = 0,71, Ra = 0,04, \phi = 1$ . При  $n = 0$   $t = 14,33$  (1),  $32,59^*$  (2),  $31,78^*$  (5),  $1,6$  (8); при  $n = 0,5$   $t = 32,63^*$  (3),  $31,82^*$  (6); при  $n = 1$   $t = 32,66^*$  (4),  $31,85^*$  (7) (\* — стационарное состояние).

Рис. 5. Профили переходной температуры при  $X = 1$  для разных значений  $Ra$  и  $\phi$ .  
 $Pr = 0,71$ ,  $M = 1$ ,  $n = 0,5$ . При  $Ra = 0,02$  и  $\phi = 1$   $t = 5$  (1),  $40,59^*$  (2),  $0,76$  (8); при  $Ra = 0$  и  $\phi = 1$   $t = 20,18^*$  (3); при  $\phi = 0,5$   $Ra = 0,02$  и  $t = 33,11^*$  (4),  $R = 0$  и  $t = 14,49^*$  (5); при  $\phi = 0$   $Ra = 0,02$  и  $t = 22,11^*$  (6),  $Ra = 0$  и  $t = 7,45^*$  (7) (\* — стационарное состояние).



рисунке, что температура уменьшается с ростом величины  $n$ . Влияние  $n$  больше около передней кромки пластины. Температура жидкости также уменьшается при уменьшении параметра магнитного поля  $M$ .

Профили нестационарной температуры по координате  $Y$  в их временном максимуме и стационарном состоянии при изменении параметра излучения  $Ra$  и параметра источника тепла  $\phi$  показаны для воздуха при  $X = 1$  на рис. 5. Видно, что температура растет с ростом параметра излучения  $Ra$ . Этот результат качественно согласуется с ожидаемым, поскольку воздействие излучения и температуры поверхности должно увеличивать скорость теплопереноса в жидкость, таким образом увеличивая температуру жидкости. Отмечается, что время, требуемое для достижения стационарного состояния потока, возрастает с ростом величины параметра излучения  $Ra$ , это подразумевает, что излучение способствует медленному достижению стационарного состояния. Присутствие источника тепла в пограничном слое вызывает рост температуры жидкости.

Изучение влияния параметров на локальное, а также среднее касательное напряжение и скорость теплопереноса важно в задачах теплопереноса. Величины стационарного состояния локального поверхностного напряжения и числа Нуссельта для разных значений параметра излучения  $Ra$ , параметра магнитного поля  $M$ , источника тепла  $\phi$  и показателя  $n$  рассчитываются из уравнений (17)–(18) и представлены графически на рис. 6 и 7 соответственно. Локальное поверхностное трение уменьшается с ростом величины  $n$ , и воздействие на него показателя  $n$

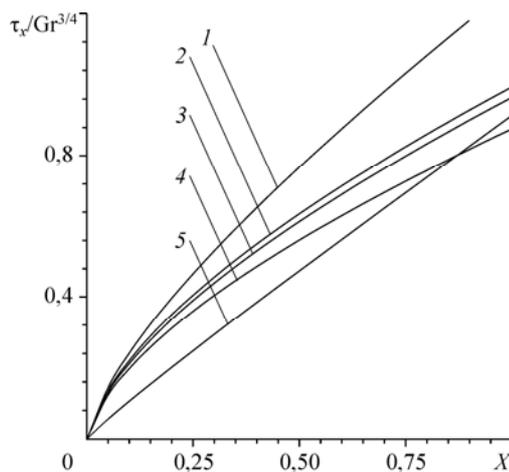


Рис. 6. Локальное поверхностное трение.

$Pr = 0,71$ . При  $M = 0,5$  и  $n = 0,5$   $Ra = 0,02$  (1, 3),  $0,04$  (2),  $\phi = 1$  (1),  $0,5$  (2, 3); при  $Ra = 0,02$  и  $\phi = 0,5$   $M = 1$  (4),  $0,5$  (5),  $n = 0,5$  (4),  $1$  (5).

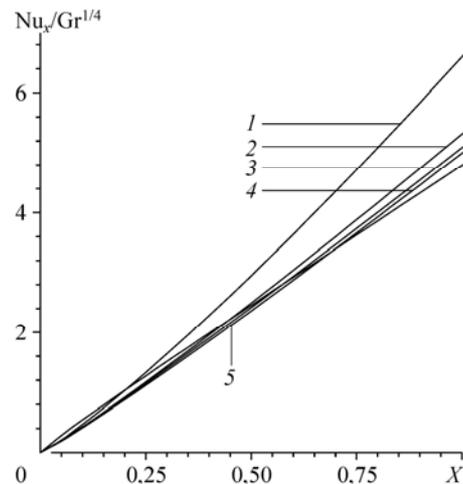


Рис. 7. Локальное число Нуссельта.

$Pr = 0,71$ . При  $M = 0,5$  и  $n = 0,5$   $Ra = 0,02$  (1, 4),  $0,04$  (3),  $\phi = 1$  (1),  $0,5$  (3, 4); при  $Ra = 0,02$  и  $\phi = 0,5$   $M = 1$  (2),  $0,5$  (5),  $n = 0,5$  (2),  $1$  (5).

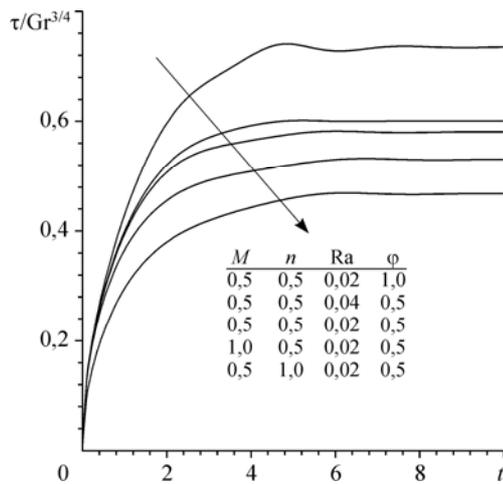


Рис. 8. Среднее поверхностное трение.

$Pr = 0,71.$

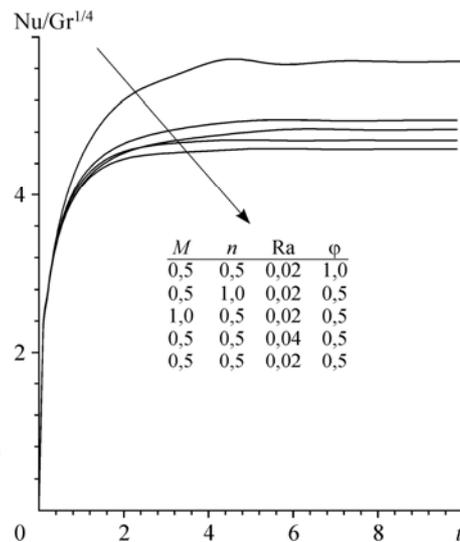


Рис. 9. Среднее число Нуссельта.

$Pr = 0,71.$

постепенно уменьшается с ростом расстояния вдоль поверхности. Локальное касательное напряжение на стенке уменьшается с ростом величины  $M$ . Далее отмечается, что локальное поверхностное трение возрастает с ростом параметров излучения  $Ra$  и источника тепла  $\phi$ .

Локальное число Нуссельта уменьшается вдоль поверхности с ростом величины показателя  $n$ . Теплоперенос возрастает с ростом величины параметра магнитного поля  $M$ , локальное число Нуссельта растет с ростом параметров излучения  $Ra$  и источника тепла  $\phi$ .

Среднее поверхностное трение и число Нуссельта представлены на рис. 8 и 9 для разных величин  $Ra$ ,  $n$ ,  $\phi$  и  $M$ . Влияние  $n$  на среднее поверхностное трение больше, когда показатель  $n$  уменьшается. Также наблюдается, что среднее поверхностное трение для воздуха растет с ростом  $Ra$  и  $\phi$ . Также мы отметили, что среднее поверхностное трение уменьшается с ростом  $M$ .

В начальный момент наблюдались большие величины среднего числа Нуссельта. Они со временем уменьшались и приобретали постоянные значения. Наблюдалось, что за короткие промежутки времени среднее число Нуссельта было постоянным при различных значениях параметров задачи. Это показывает, что изначально имеется только кондуктивный перенос тепла. Среднее число Нуссельта возрастает с ростом параметров  $M$ ,  $Ra$ ,  $\phi$  и  $n$ .

### Заключение

Представлена математическая модель для нестационарного свободно-конвективного теплообмена на вертикальной пластине с совместным влиянием магнитного поля и теплового излучения в присутствии источника тепла. На поверхности вертикальной пластины задавалась переменная температура. Безразмерные уравнения пограничного слоя решались методом конечных разностей.

1. Увеличение интенсивности приложенного магнитного поля уменьшает скорость жидкости вдоль пластины, в то время как температура жидкости на пластине растет по мере возрастания силы магнитного поля.

2. Безразмерная температура также растет с увеличением интенсивности теплового излучения.

3. Профиль скорости достигает стационарного состояния сравнительно медленно при больших величинах параметра радиации  $Ra$ , из чего следует, что увеличение интенсивности теплового излучения приводит к более медленному достижению стационарного состояния.

4. Тепловое излучение увеличивает среднее поверхностное трение.

### Список литературы

1. Pohlhausen E. Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung / *Z. Angew. Math. Mech.* 1921. Vol. 1. P. 115–121.
2. Ostrach S. An analysis of laminar free convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force // *NACA Report.* 1953. No. 1111. P. 63–79.
3. Sparrow E.M., Gregg J.L. Similar Solutions for free convection from a non-isothermal vertical plate // *Transactions of ASME of J. of Heat transfer.* 1958. Vol. 80. P. 379–386.
4. Takhar H.S., Ganesan P., Ekambavannan K., Soundalgekar V.M. Transient free convection flow past a semi-infinite vertical plate with variable surface temperature // *Intern. J. for Numerical Methods of Heat and Fluid Flow.* 1997. Vol. 7, No. 4. P. 280–296.
5. Sparrow E.M., Cess R.D. The effect of a magnetic field on free convection heat transfer // *Intern. J. of Heat and Mass Transfer.* 1961. Vol. 3, No. 4. P. 267–274.
6. Kumari M., Nath G. Development of two dimensional boundary layer with an applied magnetic field due to an impulsive motion // *Indian J. Pure Appl. Math.* 1999. Vol. 30. P. 695–708.
7. Takhar H.S., Chamkha A.J., Nath G. Effects of non-uniform wall temperature or mass transfer in finite sections of an inclined plate on the MHD natural convection flow in a temperature stratified high-porosity medium // *Int. J. Thermal Si.* 2003. Vol. 42. P. 829–836.
8. Ece M.C. Free convection flow about a vertical spinning cone under a magnetic field // *Appl. Mathem. and Computation.* 2006. Vol. 179. P. 231–242.
9. Cogley A.C., Vincenti W.G., Gill S.E. Differential approximation for radiative transfer in a non-gray gas near equilibrium // *AIAA J.* 1968. Vol. 6. P. 551–553.
10. Grief R., Habib L.S., Lin L.C. Laminar convection of a radiating gas in a vertical channel // *J. Fluid Mech.* 1971. Vol. 45. P. 513–520.
11. Shih T.M. *Numerical Heat Transfer.* Washington, DC: Hemisphere Publishing Corporation, 1984. P. 380–381.
12. Soundalgekar V.M., Takhar H.S. Radiation effects on free convection flow past a semi-infinite vertical plate // *Modelling Measurement and Control.* 1993. Vol. B51. P. 31–40.
13. Hossain M.A., Takhar H.S. Radiation effects on mixed convection along a vertical plate with uniform surface temperature // *Heat and Mass Tr.* 1996. Vol. 31. P. 243–248.
14. Raptis A., Perdikis C. Radiation and free convection flow past a moving plate // *App. Mech and Engng.* 1999. Vol. 4, No. 4. P. 817–821.
15. Chamkha A.J., Takhar H.S., Soundalgekar V.M. Radiation effects on free convective flow past a semi-infinite vertical plate with mass transfer // *Chemical Engng. J.* 2001. Vol. 84. P. 335–342.
16. Muthucumaraswamy R., Ganesan P. Radiation effects on flow past an impulsively started infinite vertical plate with variable temperature // *Int. J. Appl. Mech. Engng.* 2003. Vol. 8, No. 1. P. 125–129.
17. Raptis A., Massalas C.V. Magnetohydrodynamic flow past a plate by the presence of radiation // *Heat and Mass Tr.* 1998. Vol. 34. P. 107–109.
18. Takhar H.S., Beg O.A., Chamkha A.J., Filip D., Pop I. Mixed radiation-convection boundary layer flow of an optically dense fluid along a vertical flat plate in a non-Darcy porous medium // *Int. J. Applied Mechanics and Engng.* 2003. Vol. 8, No. 3. P. 483–496.
19. Afify A.A. The effect of radiation on free convective flow and mass transfer past a vertical isothermal cone surface with chemical reaction in the presence of a transverse magnetic field // *Can. J. Physics.* 2004. P. 447–458.
20. Abd El-Naby M.A., Elsayed M.E., Nayed Y.A. Finite difference solution of radiation on MHD unsteady free-convection flow over vertical porous plate // *Applied Mathematics and Computation.* 2004. Vol. 151. P. 327–246.

21. **Anwar Beg O., Zueco J., Takhar H.S., Beg T.A.** Network numerical simulation of impulsively-started transient radiation-convection heat and mass transfer in a saturated Darcy-Forchheimer porous medium, nonlinear analysis // *Modell. and Control.* 2008. Vol. 13, No. 3. P. 281–303.
22. **Sparrow E.M., Cess R.D.** Temperature-dependent heat sources or sinks in a stagnation point flow // *Appl. Sci. Res.* 1961. Vol. A10. 185 p.
23. **Pop I., Soundalgekar V.M.** Viscous dissipation effects on unsteady free convective flow past an infinite vertical porous plate with variable suction // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1962. Vol. 17. P. 85–92.
24. **Takhar H.S., Surma Devi C.D., Nath G.** Heat and mass transfer for a point sink in a plane with a magnetic field // *Mech. Research Communications.* 1986. Vol. 13. P. 71–78.
25. **Takhar H.S., Ram P.C., Singh S.S.** Hall effects on heat and mass transfer flow with variable suction and heat generation // *Astrophysics and Space Sci.* 1992. Vol. 191. P. 101–106.
26. **Sahoo P.K., Datta N., Biswal S.** MHD unsteady free convection flow past an infinite vertical plate with constant suction and heat sink // *Indian J. of Pure and Applied Mathematics.* 2003. Vol. 34, No. 1. P. 145–155.
27. **Carnahan B., Luther H.A., Wilkes J.O.** *Applied Numerical Methods.* New York: John Wiley and Sons, 1969.

*Поступила в редакцию 14 декабря 2010 г.*