

УДК 539.3

## УТОЧНЕННАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТРЕУГОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ

В. В. Кузнецов, С. В. Левяков

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск  
E-mails: vku1952@yandex.ru, lest@sibmail.ru

Рассматривается уточненная геометрически нелинейная формулировка (на основе гипотез Кирхгофа — Лява) треугольного конечного элемента тонкой оболочки. С использованием результата интегрирования дифференциального уравнения плоской кривой построены деформационные соотношения, позволяющие корректно описывать деформации элемента при конечных искривлениях его срединной поверхности. Для треугольного элемента, имеющего 15 степеней свободы, разработан экономичный алгоритм вычисления коэффициентов первой и второй вариаций энергии деформации, в терминах которых записываются условия равновесия и устойчивости дискретной модели оболочки. На примере тестовых задач о нелинейном деформировании упругих пластин и оболочек исследованы точность и сходимости конечно-элементных решений.

**Ключевые слова:** тонкая оболочка, нелинейное деформирование, метод конечных элементов, инварианты, кинематическая группа, плоская кривая.

**Введение.** Значительный прогресс в решении сложных задач нелинейной механики тонкостенных оболочечных конструкций обусловлен использованием методов дискретного анализа, среди которых наибольшее распространение получил метод конечных элементов. Применительно к расчету пластин и оболочек этот метод развивался по двум направлениям: на основе гипотез Кирхгофа — Лява и на основе теории пластин и оболочек Тимошенко и Рейсснера — Миндлина, учитывающей деформацию поперечного сдвига. Основное направление исследования конечно-элементных моделей оболочек связано с использованием модели Рейсснера — Миндлина, которая требует меньшей гладкости аппроксимирующих функций. Однако скорость сходимости по числу конечных элементов решения, полученного с использованием простых конечных элементов при уменьшении толщины оболочки вследствие эффектов “запирания”, низка. Попытки устранения указанного недостатка приводят к весьма сложным формулировкам (см., например, [1]).

Построение конечных элементов, основанное на гипотезах Кирхгофа — Лява, позволяет избежать эффектов “запирания”, но требует использования аппроксимирующих полиномов высокого порядка, что ведет к увеличению объема вычислений и усложнению вычислительных алгоритмов.

Представляет интерес исследование возможности уточнения простых конечно-элементных моделей тонкой оболочки без увеличения числа степеней свободы. Традиционный подход к построению конечных элементов состоит в установлении зависимости полей перемещений в пределах элемента от узловых параметров посредством функций форм. При этом компоненты тензора деформаций определяются путем дифференцирования функций форм. Альтернативные подходы, такие как методы геометрических и механических аналогий, используются редко. В настоящей работе для решения геометрически нелинейных задач рассматривается один из таких подходов к построению конечного элемента тонкой оболочки, основанный на представлении энергии деформации через инварианты тензоров

деформаций и искривлений срединной поверхности оболочки [2], теории кинематических групп [3], а также на интегрировании дифференциального уравнения плоской кривой [4]. Использование этих понятий позволяет уточнить формулировку основных соотношений без увеличения числа степеней свободы и получить экономичный алгоритм вычисления компонент первой и второй вариаций энергии деформации конечного элемента, необходимых для записи условий равновесия и устойчивости дискретной модели оболочки. Разработан треугольный конечный элемент, имеющий 15 степеней свободы. Особенностью предлагаемого подхода является определение геометрии оболочки в исходном и деформированном состояниях координатами и направляющими косинусами нормали к срединной поверхности в каждом узле конечно-элементной модели.

**1. Потенциальная энергия деформации элемента оболочки.** Рассмотрим треугольный конечный элемент тонкой изотропной оболочки. Деформации оболочки будем считать малыми по сравнению с единицей, при этом ограничения на величину перемещений и углов поворота не налагаются. Предположим, что срединная поверхность элемента изометрична плоскому треугольнику со сторонами  $l_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ). В качестве физических компонент тензора деформаций Грина примем нормальные деформации  $\varepsilon_m$  волокон, направленных вдоль сторон треугольника. Полагая, что для оболочки справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява  $\varepsilon_m^z = \varepsilon_m + z\chi_m$ ,  $\sigma_z = 0$  ( $z$  — нормальная координата к срединной поверхности;  $\sigma_z$  — нормальное напряжение;  $\chi_m$  — изменение кривизны срединной поверхности в соответствующем направлении), получим потенциальную энергию деформации элемента оболочки в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_F B(I_\varepsilon^2 - 2(1 - \nu)I_{\varepsilon\varepsilon}) dF + \frac{1}{2} \int_F D(I_\chi^2 - 2(1 - \nu)I_{\chi\chi}) dF, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= (\varepsilon_m l_m^2 l^2 - 2\varepsilon_m l_m^4)/(8F^2), & I_{\varepsilon\varepsilon} &= ((\varepsilon_m l_m^2)^2 - 2\varepsilon_m^2 l_m^4)/(16F^2), \\ I_\chi &= (\chi_m l_m^2 l^2 - 2\chi_m l_m^4)/(8F^2), & I_{\chi\chi} &= ((\chi_m l_m^2)^2 - 2\chi_m^2 l_m^4)/(16F^2), \\ F^2 &= (l^4 - 2l_m^2 l_m^2)/16, & l^2 &= l_m l_m, & B &= Eh/(1 - \nu^2), & D &= Bh^2/12, \end{aligned}$$

$I_\varepsilon$ ,  $I_{\varepsilon\varepsilon}$  ( $I_\chi$ ,  $I_{\chi\chi}$ ) — первый и второй инварианты деформаций (искривлений) срединной поверхности;  $F$  — площадь срединной поверхности треугольного элемента;  $E$ ,  $\nu$ ,  $h$  — модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина оболочки соответственно; по индексу  $m = 1, 2, 3$  проводится суммирование.

**2. Кинематическая группа элемента оболочки.** Кинематическая группа треугольного элемента оболочки [3] характеризуется радиус-векторами узлов  $\mathbf{r}_i$  и присоединенными единичными векторами  $\mathbf{n}_i$ , нормальными к ее срединной поверхности. В качестве независимых компонент обобщенного метрического тензора группы выберем следующие параметры:

$$e_i = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)^2/(2l_i^2), \quad \psi_{1i} = \mathbf{n}_i(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)/l_k, \quad \psi_{2i} = \mathbf{n}_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)/l_j. \quad (2.1)$$

Здесь и далее индексы  $i, j, k$  принимают значения 1, 2, 3 при их циклической перестановке; длины  $l_i$  имеют смысл нормировочных коэффициентов, введенных для удобства. Путем замены  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{n}_i$  на  $\mathbf{r}_i^*$ ,  $\mathbf{n}_i^*$  в формулах (2.1) определяются компоненты обобщенного метрического тензора кинематической группы в деформированном состоянии (знак “\*” обозначает величины, соответствующие деформированному состоянию). При этом нормировочные коэффициенты не меняются.

**3. Деформационная модель элемента оболочки.** Допустим, что деформации  $\varepsilon_i$  срединной поверхности постоянны и определяются по деформациям сторон треугольного элемента, а искривления  $\varkappa_i$  можно записать через углы поворота нормали в нормальной плоскости, проходящей через соответствующие узлы элемента. Положим, что в исходном и деформированном состояниях сечение срединной поверхности оболочки нормальной плоскостью представляет собой кривую, по форме близкую к дуге окружности. При этом отклонением от нормальной плоскости ортов нормалей в узлах, через которые проходит эта плоскость, будем пренебрегать [5]. Следует отметить, что сделанные допущения справедливы для достаточно малых элементов, но обладают более высоким порядком аппроксимации по сравнению с асимптотическими соотношениями [6].

Рассмотрим дифференциальное уравнение плоской кривой (стороны конечного элемента в исходном состоянии)

$$\mathbf{n}' = \varkappa \mathbf{r}', \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор кривой;  $\mathbf{n}$  — нормаль;  $\varkappa$  — кривизна кривой; штрих обозначает производную по натуральной координате. Интегрируя уравнение (3.1) от 0 до  $l_i$  в предположении, что  $\varkappa = \text{const}$  между узлами  $j$  и  $k$ , получаем

$$\mathbf{n}_k - \mathbf{n}_j = (\varphi_i/l_i)(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j), \quad (3.2)$$

где  $\varkappa = \varphi_i/l_i$ ;  $\varphi_i$  — угол между векторами  $\mathbf{n}_j$  и  $\mathbf{n}_k$  (угол раствора). Возводя в квадрат обе части уравнения (3.2), получим

$$2(1 - \cos \varphi_i) = (\varphi_i^2/l_i^2)(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)^2. \quad (3.3)$$

Записывая уравнение (3.3) для деформированного состояния и по определению физических компонент тензора Грина полагая  $l_i^{*2} = (1 + 2\varepsilon_i)l_i^2$ , с учетом первого соотношения (2.1) получим выражение для деформации

$$\varepsilon_i = (2e_i^*G(\varphi_i^*) - 1)/2, \quad G(\varphi) = \varphi^2/[2(1 - \cos \varphi)].$$

Используя (3.2), находим соотношения для углов раствора

$$\varphi_i = \theta_{2k} - \theta_{1j}, \quad \theta_{1i} = \psi_{1i}/(2e_k), \quad \theta_{2i} = \psi_{2i}/(2e_j). \quad (3.4)$$

Здесь  $\pi/2 - \theta_{mn}$  — угол наклона нормали в узле  $n$  в нормальной плоскости относительно секущей, проходящей через узлы (рис. 1). Углы поворота нормали в нормальной плоскости, обусловленные деформированием элемента, определяются выражениями

$$\vartheta_{mn} = \theta_{mn}^* - \theta_{mn}.$$

Поскольку в исходном состоянии векторы  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{n}_i$  заданы, длины сторон элемента определяются из соотношений (3.3), (3.4):

$$l_i^2 = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)^2 G(\varphi_i), \quad \varphi_i = \arccos \{1 - a_i^2/[2(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)^2]\}, \quad a_i = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)(\mathbf{n}_k - \mathbf{n}_j).$$

Для аппроксимации  $\varkappa_i$  используем следующий закон изменения кривизны шарнирно опертого стержня, находящегося под воздействием изгибающих моментов, приложенных к его концам [4]:

$$\varkappa_i = (\vartheta_{2k} - \vartheta_{1j})/l_i + 3(\vartheta_{2k} + \vartheta_{1j})(L_k - L_j)/l_i. \quad (3.5)$$

Здесь  $L_k$  —  $L$ -координаты [7]; первое слагаемое, справедливое при любых  $\vartheta_{mn}$ , соответствует изменению кривизны на постоянную величину; второе слагаемое (которым пренебрегалось при определении  $\varepsilon_i$ ) соответствует малому отклонению формы нормального сечения от дуги окружности. Следует отметить, что использование выражения для энергии

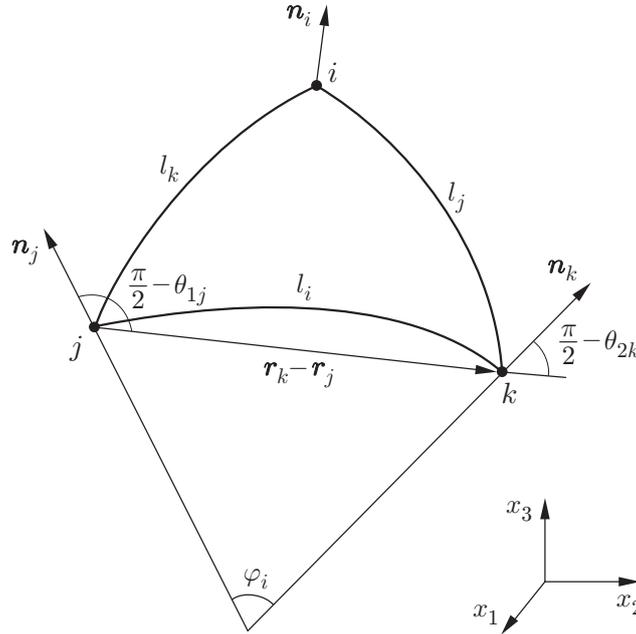


Рис. 1. Конечный элемент оболочки

деформации (1.1) не требует раскрытия содержания  $L$ -координат. Это позволяет уменьшить число арифметических операций при вычислении матрицы жесткости элемента.

Из приведенных выше соотношений следует, что величины, характеризующие деформированное состояние элемента оболочки, можно выразить через метрические тензоры кинематической группы (2.1) в исходном и деформированном состояниях. Следовательно, вариационная задача для конечного элемента сводится к вариационной задаче для кинематической группы [3].

**4. Вариации потенциальной энергии деформации.** Для формулирования условий равновесия, устойчивости и итерационного процесса решения необходимо вычислить первую и вторую вариации энергии деформации дискретной системы. Для алгоритмизации вычислений введем три уровня варьируемых параметров [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(1)} &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \vartheta_{23}, \vartheta_{12}, \vartheta_{21}, \vartheta_{13}, \vartheta_{22}, \vartheta_{11})^T, \\ \mathbf{u}_{(2)} &= (e_1^*, e_2^*, e_3^*, \psi_{23}^*, \psi_{12}^*, \psi_{21}^*, \psi_{13}^*, \psi_{22}^*, \psi_{11}^*)^T, \\ \mathbf{u}_{(3)} = \mathbf{q} &= (\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \mathbf{q}_3^T)^T, \quad \mathbf{q}_m^T = (x_{1m}^*, x_{2m}^*, x_{3m}^*, \omega_{1m}, \omega_{2m}) \quad (m = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где  $x_{mn}^*$  — компоненты радиус-вектора  $\mathbf{r}_n^*$ ;  $\omega_{mn}$  — компоненты вектора поворота нормали  $\mathbf{n}_n^*$ ; нижний индекс в скобках соответствует номеру уровня. На любом уровне варьирования первая и вторая вариации энергии деформации имеют вид

$$\delta\Pi = \delta\mathbf{u}_{(m)}^T \mathbf{g}_{(m)}, \quad \delta^2\Pi = \delta\mathbf{u}_{(m)}^T H_{(m)} \delta\mathbf{u}_{(m)}$$

( $\mathbf{g}_{(m)}$ ,  $H_{(m)}$  — градиент и матрица Гессе  $m$ -го уровня). Для вычисления  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{(3)}$  и  $H = H_{(3)}$  (уровень обобщенных координат кинематической группы) используем рекуррентные соотношения [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{(m+1)} &= u'_{(m)} \mathbf{g}_{(m)}, \quad H_{(m+1)} = u'_{(m)} H_{(m)} u'^T_{(m)} + g_{(m)s} u''_{(m)s}, \\ m &= 1, 2, \quad s = 1, \dots, 9. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь  $g_{(m)s}$  — компоненты вектора  $\mathbf{g}_{(m)}$ ;  $u'_{(m)}$ ,  $u''_{(m)s}$  — матрицы первых и вторых частных производных от переменных  $m$ -го уровня по переменным  $(m+1)$ -го уровня соответственно;

по  $s$  проводится суммирование. Поскольку на первом уровне энергия деформации имеет вид

$$\Pi = \mathbf{u}_{(1)}^T K \mathbf{u}_{(1)} / 2$$

( $K$  — матрица жесткости), начальные значения в рекуррентных формулах (4.2) имеют вид

$$\mathbf{g}_{(1)} = K \mathbf{u}_{(1)}, \quad H_{(1)} = K.$$

Используя соотношения (1.1), (2.1), (3.5), получаем выражение для матрицы жесткости элемента

$$K = \begin{pmatrix} K_\varepsilon & 0 \\ 0 & K_\vartheta \end{pmatrix}, \quad K_\varepsilon = BFA, \quad A = \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}^T - \frac{1-\nu}{8F^2} (\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T - \rho), \quad (4.3)$$

где

$$\boldsymbol{\tau}^T = (l^2 l_1^2 - 2l_1^4, l^2 l_2^2 - 2l_2^4, l^2 l_3^2 - 2l_3^4) / (8F^2), \quad \rho_{mm} = 2l_m^4, \quad \boldsymbol{\mu}^T = (l_1^2, l_2^2, l_3^2),$$

$$K_\vartheta = D \int_F M(L_1, L_2, L_3) dF, \quad M(L_1, L_2, L_3) = C^T A C,$$

для матрицы  $\rho$  указаны ненулевые компоненты; матрица  $C$  размерностью  $3 \times 6$  определяется ненулевыми коэффициентами

$$\begin{aligned} C_{11} &= (1 + 3(L_3 - L_2)) / l_1, & C_{12} &= -(1 + 3(L_2 - L_3)) / l_1, \\ C_{23} &= (1 + 3(L_1 - L_3)) / l_2, & C_{24} &= -(1 + 3(L_3 - L_1)) / l_2, \\ C_{35} &= (1 + 3(L_2 - L_1)) / l_3, & C_{36} &= -(1 + 3(L_1 - L_2)) / l_3. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Поскольку выражения (4.4) линейны относительно  $L$ -координат, компоненты матрицы  $M(L_1, L_2, L_3)$  квадратично зависят от  $L$ -координат. Тогда интеграл в (4.3) вычисляется точно по формуле [7]

$$\int_F M(L_1, L_2, L_3) dF = \frac{F}{3} \left( M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + M\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + M\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \right).$$

Ненулевые компоненты матрицы  $u'_{(1)}$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial e_i^*} &= G(\varphi_i^*) - \varphi_i^* G'(\varphi_i^*), & \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \psi_{2k}^*} &= -\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \psi_{1j}^*} = \frac{1}{2} G'(\varphi_i^*), \\ \frac{\partial \vartheta_{2k}}{\partial e_i^*} &= -\frac{1}{2e_i^{*2}} \psi_{2k}^*, & \frac{\partial \vartheta_{1j}}{\partial e_i^*} &= -\frac{1}{2e_i^{*2}} \psi_{1j}^*, \\ \frac{\partial \vartheta_{2k}}{\partial \psi_{2k}^*} &= \frac{\partial \vartheta_{1j}}{\partial \psi_{1j}^*} = \frac{1}{2e_i^*}, & G'(\varphi) &= \frac{\varphi(1 - \cos \varphi - (1/2)\varphi \sin \varphi)}{(1 - \cos \varphi)^2}. \end{aligned}$$

Отличные от нуля компоненты матриц  $u''_{(1)s}$  ( $s = 1, \dots, 9$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial e_i^{*2}} &= \frac{\varphi_i^{*2}}{e_i^*} G''(\varphi_i^*), & \frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial e_i^* \partial \psi_{2k}^*} &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial e_i^* \partial \psi_{1j}^*} = -\frac{\varphi_i^*}{2e_i^*} G''(\varphi_i^*), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial \psi_{2k}^{*2}} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial \psi_{1j}^{*2}} = -\frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial \psi_{2k}^* \partial \psi_{1j}^*} = \frac{1}{4e_i^*} G''(\varphi_i^*), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{2k}}{\partial e_i^{*2}} = \frac{1}{e_i^{*3}} \psi_{2k}^*, \quad \frac{\partial^2 \vartheta_{1j}}{\partial e_i^{*2}} = \frac{1}{e_i^{*3}} \psi_{1j}^*, \quad \frac{\partial^2 \vartheta_{2k}}{\partial e_i^* \partial \psi_{2k}^*} = \frac{\partial^2 \vartheta_{1j}}{\partial e_i^* \partial \psi_{1j}^*} = -\frac{1}{2e_i^{*2}},$$

$$G''(\varphi) = \frac{1 - \cos \varphi - 2\varphi \sin \varphi + \varphi^2(1 + (1/2) \cos \varphi)}{(1 - \cos \varphi)^2}.$$

Следует отметить, что при  $\varphi \rightarrow 0$  выражения для функции  $G(\varphi)$  и ее производных содержат неопределенности вида  $(0/0)$ . При малых значениях параметра  $|\varphi| < 0,1$  используем разложения в ряд Тейлора

$$G(\varphi) = 1 + \frac{\varphi^2}{12} + \frac{\varphi^4}{240} + O(\varphi^6), \quad G'(\varphi) = \frac{\varphi}{6} + \frac{\varphi^3}{60} + O(\varphi^5), \quad G''(\varphi) = \frac{1}{6} + \frac{\varphi^2}{20} + O(\varphi^4).$$

Частные производные от переменных второго уровня по переменным третьего уровня (4.1), определяющие матрицы  $u'_{(2)}$  и  $u''_{(2)s}$  ( $s = 1, \dots, 9$ ), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i^*}{\partial x_{mk}^*} &= -\frac{\partial e_i^*}{\partial x_{mj}^*} = \frac{1}{l_i^2} (x_{mk}^* - x_{mj}^*), & \frac{\partial \psi_{1i}^*}{\partial x_{mj}^*} &= -\frac{\partial \psi_{1i}^*}{\partial x_{mi}^*} = \frac{\lambda_{3mi}^*}{l_k}, \\ \frac{\partial \psi_{2i}^*}{\partial x_{mi}^*} &= -\frac{\partial \psi_{2i}^*}{\partial x_{mk}^*} = \frac{\lambda_{3mi}^*}{l_j}, & \frac{\partial \psi_{1i}^*}{\partial \omega_{mi}} &= \frac{1}{l_k} \lambda_{mni}^* (x_{nj}^* - x_{ni}^*), & \frac{\partial \psi_{2i}^*}{\partial \omega_{mi}} &= \frac{1}{l_j} \lambda_{mni}^* (x_{ni}^* - x_{nk}^*), \\ \frac{\partial^2 e_i^*}{\partial x_{mk}^{*2}} &= \frac{\partial^2 e_i^*}{\partial x_{mj}^{*2}} = -\frac{\partial^2 e_i^*}{\partial x_{mk}^* \partial x_{mj}^*} = \frac{1}{l_i^2}, & \frac{\partial^2 \psi_{1i}^*}{\partial x_{mj}^* \partial \omega_{si}} &= -\frac{\partial^2 \psi_{1i}^*}{\partial x_{mi}^* \partial \omega_{si}} = \frac{\lambda_{smi}^*}{l_k}, \\ & & \frac{\partial^2 \psi_{2i}^*}{\partial x_{mi}^* \partial \omega_{si}} &= -\frac{\partial^2 \psi_{2i}^*}{\partial x_{mk}^* \partial \omega_{si}} = \frac{\lambda_{smi}^*}{l_j}, \\ & & \frac{\partial^2 \psi_{1i}^*}{\partial \omega_{mi}^2} &= -\frac{1}{l_k} \lambda_{3ni}^* (x_{nj}^* - x_{ni}^*), & \frac{\partial^2 \psi_{2i}^*}{\partial \omega_{mi}^2} &= -\frac{1}{l_j} \lambda_{3ni}^* (x_{ni}^* - x_{nk}^*). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь по  $n = 1, 2, 3$  проводится суммирование;  $\lambda_{jni}^*$  — направляющие косинусы векторов  $\mathbf{t}_{1i}^*, \mathbf{t}_{2i}^*, \mathbf{t}_{3i}^* = \mathbf{n}_i^*$  в  $i$ -м узле, которые образуют взаимно ортогональную правую тройку векторов  $\mathbf{t}_{mi}^* = (\lambda_{m1i}^*, \lambda_{m2i}^*, \lambda_{m3i}^*)^T$  ( $i, m = 1, 2, 3$ ).

При расчете оболочек в рамках рассмотренного подхода в качестве исходных данных требуются значения координат  $x_{si}$  и направляющих косинусов нормалей  $\lambda_{3si}$  в узлах конечно-элементной сетки. Заметим, что орты  $\mathbf{t}_{1i}^*$  и  $\mathbf{t}_{2i}^*$ , касательные к срединной поверхности оболочки в деформированном состоянии, имеют вспомогательный характер и служат для вычисления вариаций нормалей по формулам (4.5). Их построение по известной нормали  $\mathbf{n}_i^*$  не вызывает затруднений.

**5. Алгоритм решения.** Уравнения равновесия для ансамбля конечных элементов можно записать в матричном виде

$$\mathbf{g} - \lambda \mathbf{P} = 0. \quad (5.1)$$

Здесь  $\mathbf{P}$  — вектор обобщенных внешних сил с линейным потенциалом;  $\lambda$  — параметр нагрузки. Уравнение (5.1) решается итерационным методом Ньютона — Рафсона в сочетании с пошаговым изменением параметра нагружения по схеме

$$H^{(p)} \delta \mathbf{q}^{(p)} + \mathbf{g}^{(p)} - \lambda \mathbf{P} = 0,$$

где верхний индекс в скобках обозначает номер итерации. Устойчивость найденных состояний равновесия определяется по критерию Сильвестра для матрицы  $H$ . При выполнении итераций новые значения узловых неизвестных определяются по формулам [9]

$$\mathbf{r}_s^{*(p+1)} = \mathbf{r}_s^{*(p)} + \delta \mathbf{r}_s^{*(p)}, \quad \mathbf{n}_s^{*(p+1)} = a_1 \mathbf{n}_s^{*(p)} + a_2 (\mathbf{t}_{1s}^{*(p)} \delta \omega_{1s}^{(p)} + \mathbf{t}_{2s}^{*(p)} \delta \omega_{2s}^{(p)}),$$

$$\mathbf{t}_{ms}^{*(p+1)} = \mathbf{t}_{ms}^{*(p)} - \delta\omega_{ms} [a_2 \mathbf{n}_s^{*(p)} + a_3 (\mathbf{t}_{1s}^{*(p)} \delta\omega_{1s}^{(p)} + \mathbf{t}_{2s}^{*(p)} \delta\omega_{2s}^{(p)})],$$

$$\delta\omega_s^{(p)} = (\delta\omega_{1m}^{(p)2} + \delta\omega_{2m}^{(p)2})^{1/2}, \quad a_1 = \cos \delta\omega_s^{(p)}, \quad a_2 = \frac{\sin \delta\omega_s^{(p)}}{\delta\omega_s^{(p)}}, \quad a_3 = \frac{1 - \cos \delta\omega_s^{(p)}}{\delta\omega_s^{(p)2}}.$$

При  $\delta\omega_s^{(p)} \rightarrow 0$  формулы для коэффициентов  $a_2, a_3$  имеют неопределенности вида  $(0/0)$ . При малых значениях  $\delta\omega_s^{(p)} < 0,1$  используем разложения в ряд Тейлора

$$a_2 = 1 - \frac{\delta\omega_s^{(p)2}}{6} + \frac{\delta\omega_s^{(p)4}}{120} - O(\delta\omega_s^{(p)6}), \quad a_3 = \frac{1}{2} - \frac{\delta\omega_s^{(p)2}}{24} + \frac{\delta\omega_s^{(p)4}}{720} O(\delta\omega_s^{(p)6}).$$

**6. Численные результаты.** Ниже приведены результаты численных исследований для пяти тестовых задач о нелинейном деформировании тонких пластин и оболочек.

6.1. *Чистый изгиб полосы.* Консольная полоса длиной  $L$  с прямоугольным поперечным сечением, имеющим размеры  $b \times h$ , нагружена на конце изгибающим моментом  $M$  в плоскости наименьшей жесткости. Используются следующие параметры работы [10] (размерности величин не указаны):  $L = 12$ ;  $b = 1$ ;  $h = 0,1$ ;  $E = 12 \cdot 10^5$ ;  $\nu = 0$ ;  $M_{\max} = 50\pi/3$ . Исходя из условий симметрии рассматривалась половина полосы, на которую наносилась равномерная сетка конечных элементов  $n_1 \times n_2$ , показанная на рис. 2 ( $n_1, n_2$  — шаг сетки по осям  $x_1, x_2$  соответственно). В табл. 1 приведены значения осевого перемещения  $u_A$  и прогиба  $w_A$  свободного конца полосы, полученные с использованием конечных элементов. Эти значения сравниваются с точным решением

$$u_A = L \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right), \quad w_A = L \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{ML}{EI}$$

( $I = bh^3/12$  — момент инерции поперечного сечения), которое дает  $u_A = 12$ ,  $w_A = 7,639$  при  $M = 0,5M_{\max}$  и  $u_A = 12$ ,  $w_A = 0$  при  $M = M_{\max}$ . Приведем также результаты, полученные в [10] на сетке прямоугольных четырехузловых элементов  $1 \times 16$  с шестью степенями свободы в каждом узле:  $u_A = 12,000$ ,  $w_A = 7,652$  при  $M = 0,5M_{\max}$  и  $u_A = 12,000$ ,  $w_A = 0,000$  при  $M = M_{\max}$ .

Следует отметить, что с использованием предлагаемого конечного элемента даже на грубых сетках большие перемещения описываются с удовлетворительной точностью. Например, при  $M/M_{\max} = 0,5$ , когда полоса принимает форму полукольца, относительная погрешность в определении перемещений  $u_A$  и  $w_A$  на сетке  $1 \times 2$  (четыре элемента с

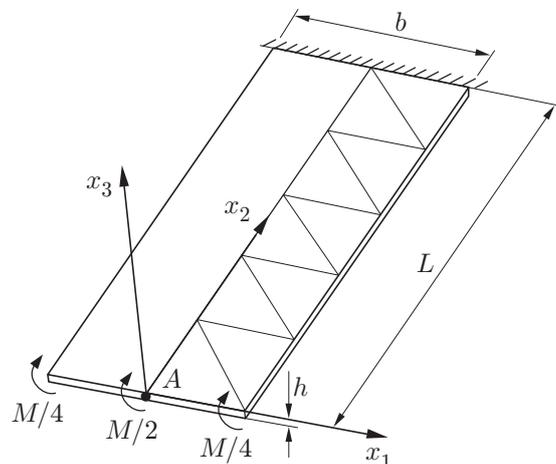


Рис. 2. Консольная полоса при чистом изгибе

Таблица 1

Значения перемещений консольной полосы в случае чистого изгиба при различном числе конечных элементов

Сетка	$u_A$		$w_A$	
	Рассматриваемое решение	Решение [6]	Рассматриваемое решение	Решение [6]
$M/M_{\max} = 0,5$				
$1 \times 2$	11,445	—	7,802	—
$1 \times 5$	11,998	12,975	7,640	7,019
$1 \times 10$	12,001	12,368	7,639	7,411
$1 \times 16$	12,001	12,273	7,639	7,462
$1 \times 20$	12,001	12,225	7,639	7,494
$M/M_{\max} = 1,0$				
$1 \times 5$	12,007	—	0,026	—
$1 \times 10$	11,996	10,943	0,000	0,349
$1 \times 16$	11,995	11,462	0,000	0,080
$1 \times 20$	11,995	11,607	0,000	0,041

Таблица 2

Значения перемещений консольной полосы в случае поперечного изгиба при различном числе конечных элементов

Сетка	$u_A$		$w_A$	
	Рассматриваемое решение	Решение [6]	Рассматриваемое решение	Решение [6]
$P/P_{\max} = 0,5$				
$1 \times 2$	1,493	1,680	4,707	5,168
$1 \times 5$	1,592	1,629	4,906	4,986
$1 \times 10$	1,605	1,640	4,932	4,985
$1 \times 16$	1,607	1,638	4,935	4,980
$1 \times 20$	1,607	1,632	4,936	4,971
$P/P_{\max} = 1$				
$1 \times 2$	3,106	3,756	6,416	7,286
$1 \times 5$	3,268	3,361	6,665	6,793
$1 \times 10$	3,287	3,341	6,697	6,749
$1 \times 16$	3,290	3,334	6,701	6,738
$1 \times 20$	3,290	3,324	6,701	6,730

отношением сторон  $12 : 1$ ) составляет лишь 4,6 и 2,1 % соответственно. В случае использования конечного элемента [6] на грубых сетках решение не имеет физического смысла. Из табл. 1 следует, что рассматриваемый конечный элемент позволяет получить не менее точные результаты при меньшем общем числе степеней свободы.

6.2. *Поперечный изгиб полосы.* Консольная полоса длиной  $L$  с прямоугольным поперечным сечением, имеющим размеры  $b \times h$ , нагружена на свободном конце поперечной силой  $P$ . Конечно-элементная сетка и способ распределения нагрузки по узлам аналогичны принятым в п. 6.1 (см. рис. 2). Используются следующие параметры работы [10] (размерности величин не указаны):  $L = 10$ ;  $b = 1$ ;  $h = 0,1$ ;  $E = 12 \cdot 10^5$ ;  $\nu = 0$ ;  $P_{\max} = 4$ . В табл. 2 приведены значения перемещений конца полосы  $u_A$  и  $w_A$  для двух значений нагрузки.

При увеличении числа конечных элементов решение, полученное с использованием рассматриваемого элемента, быстро сходится к значениям, найденным по стержневой модели плоского растяжимого стержня [4]:  $u_A = 1,606$ ,  $w_A = 4,935$  при  $P = 0,5P_{\max}$  и  $u_A = 3,289$ ,  $w_A = 6,700$  при  $P = P_{\max}$ . Для сравнения приведем результаты работы [10], полученные на сетке прямоугольных четырехузловых элементов  $1 \times 16$  с шестью степенями свободы в каждом узле:  $u_A = 1,604$ ,  $w_A = 4,933$  при  $P = 0,5P_{\max}$  и  $u_A = 3,286$ ,  $w_A = 6,698$  при  $P = P_{\max}$ . Из табл. 2 следует, что рассматриваемый элемент позволяет получить достаточно точные результаты при меньшем общем числе степеней свободы.

Заметим, что при использовании конечного элемента [6] получаются несколько завышенные значения перемещений.

6.3. *Устойчивость пластины.* Рассмотрим задачу об устойчивости квадратной шарнирно опертой пластины, длина стороны которой равна  $b$ , при одноосном сжатии распределенными усилиями  $p$ . Эта задача выбрана с целью проверки взаимодействия мембранных и изгибных факторов при нелинейных зависимостях между ними. Критическое значение нагрузки вычислялось при следующих параметрах:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>;  $\nu = 0$ ;  $b = 1$  м;  $h = 0,01$  м. Исходя из условия симметрии рассмотрена 1/4 пластины, на которую наносилась равномерная сетка конечных элементов (рис. 3). В табл. 3 приведены значения параметра критической нагрузки  $k = p_{cr}b^2/(\pi^2D)$ . Точное аналитическое решение, полученное в классической постановке задачи устойчивости, дает значение  $k = 4$  [11]. Использование двух элементов дает незначительную погрешность — 3,8 %.

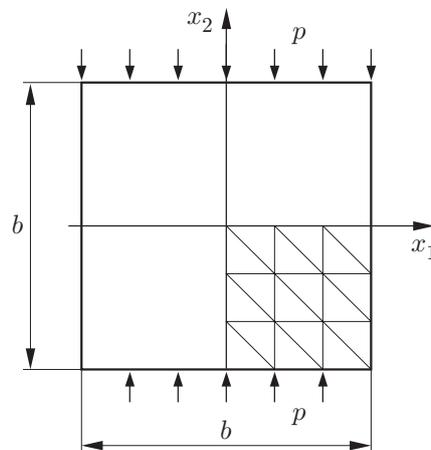


Рис. 3. Квадратная пластина при одноосном сжатии

Таблица 3

Значения параметра критической нагрузки шарнирно опертой квадратной пластины при различном числе конечных элементов

Сетка	$k$	
	Рассматриваемое решение	Решение [6]
$1 \times 1$	3,8499	3,4649
$2 \times 2$	3,9758	3,8740
$3 \times 3$	3,9932	3,9436
$4 \times 4$	3,9978	3,9675

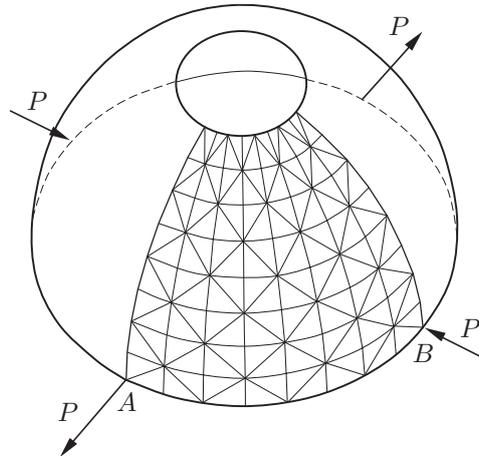


Рис. 4. Полусферическая оболочка, нагруженная четырьмя радиальными силами

6.4. *Изгиб сферической оболочки.* Рассмотрим задачу о нелинейном деформировании оболочки в виде усеченной полусферы радиусом  $R$ , нагруженной двумя сжимающими и двумя растягивающими радиальными силами  $P$  (рис. 4). Приняты следующие параметры задачи [10] (размерности величин не указаны):  $E = 6,825 \cdot 10^7$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $R = 10$ ;  $h = 0,04$ ;  $P_{\max} = 400$ ;  $\alpha = 18^\circ$  ( $\alpha$  — угол, определяющий размер выреза у полюса оболочки). Исходя из условий симметрии рассмотрена  $1/4$  оболочки, для которой использовалась “изотропная” сетка конечных элементов (пример сетки  $8 \times 8$  показан на рис. 4). В табл. 4 приведены значения радиальных перемещений точек приложения нагрузки в зависимости от уровня этой нагрузки. Значения прогибов, полученные с использованием рассматриваемого элемента, сходятся к значениям прогибов, несколько меньшим по сравнению со значениями, полученными в [10] на сетке четырехугольных четырехузловых элементов  $16 \times 16$  с шестью степенями свободы в каждом узле (максимальное различие, не превышающее 2,3 %, наблюдается при определении прогиба  $w_B$  на начальной стадии нагружения оболочки).

6.5. *Радиальное сжатие цилиндрической оболочки.* Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку радиусом  $R$  и длиной  $L$ , сжатую четырьмя радиальными силами  $P$ , действующими в плоскости среднего поперечного сечения оболочки (рис. 5,а). Будем полагать, что каждый из нагруженных узлов может смещаться только в радиальном направлении. Таким образом, налагается восемь ограничений, которые исключают возможность смещения оболочки как твердого тела. Примем следующие параметры задачи:  $R = 0,1$  м;  $L = 0,1$  м;  $h = 0,001$  м;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>;  $\nu = 0$ . Нелинейное деформирование оболочки для случая кинематического нагружения, т. е. в предположении равномерного сближения всех нагруженных узлов, исследовано в [6]. Установлено, что при некотором уровне нагрузки наряду с симметричными четырехлепестковыми формами равновесия существуют конфигурации, характеризующиеся депланацией поперечных сечений.

Представляет интерес уточнить результаты [6] на основе рассматриваемой конечно-элементной модели. На рис. 5,б сплошными линиями показана зависимость параметра нагрузки  $\lambda = PR^2/(DL)$  от прогиба  $w$  в нагруженном узле оболочки, полученная на “изотропной” сетке  $12 \times 72$ , включающей 1728 элементов и 936 узлов. Для сравнения приведено решение, полученное на сетке  $8 \times 48$ , включающей 768 элементов и 432 узла (штриховые линии). Расчеты показывают, что при силовом нагружении оболочки основная ветвь деформирования содержит точки бифуркации  $B_1, \dots, B_4$ . Заметим, что аналогичные результаты для узкого кольца получены в [12] при тех же условиях нагружения с использованием конечно-элементной модели пространственного стержня. Анализ найденных точек бифур-

Таблица 4

Значения прогибов полусферической оболочки, нагруженной четырьмя силами, при различном числе конечных элементов

$P/P_{\max}$	Сетка	$w_A$	$w_B$
0,2	8 × 8	2,342	3,324
	12 × 12	2,316	3,214
	16 × 16	2,310 (2,321)	3,190 (3,261)
	20 × 20	2,310	3,190
0,4	8 × 8	3,191	5,287
	12 × 12	3,152	5,114
	16 × 16	3,143 (3,158)	5,082 (5,196)
	20 × 20	3,142	5,085
0,6	8 × 8	3,658	6,660
	12 × 12	3,604	6,431
	16 × 16	3,590 (3,598)	6,385 (6,497)
	20 × 20	3,587	6,383
0,8	8 × 8	3,981	7,746
	12 × 12	3,898	7,428
	16 × 16	3,877 (3,875)	7,360 (7,448)
	20 × 20	3,871	7,348
1,0	8 × 8	4,324	8,937
	12 × 12	4,110	8,225
	16 × 16	4,080 (4,067)	8,125 (8,178)
	20 × 20	4,070	8,101

Примечание. В скобках указаны значения, полученные в [10].

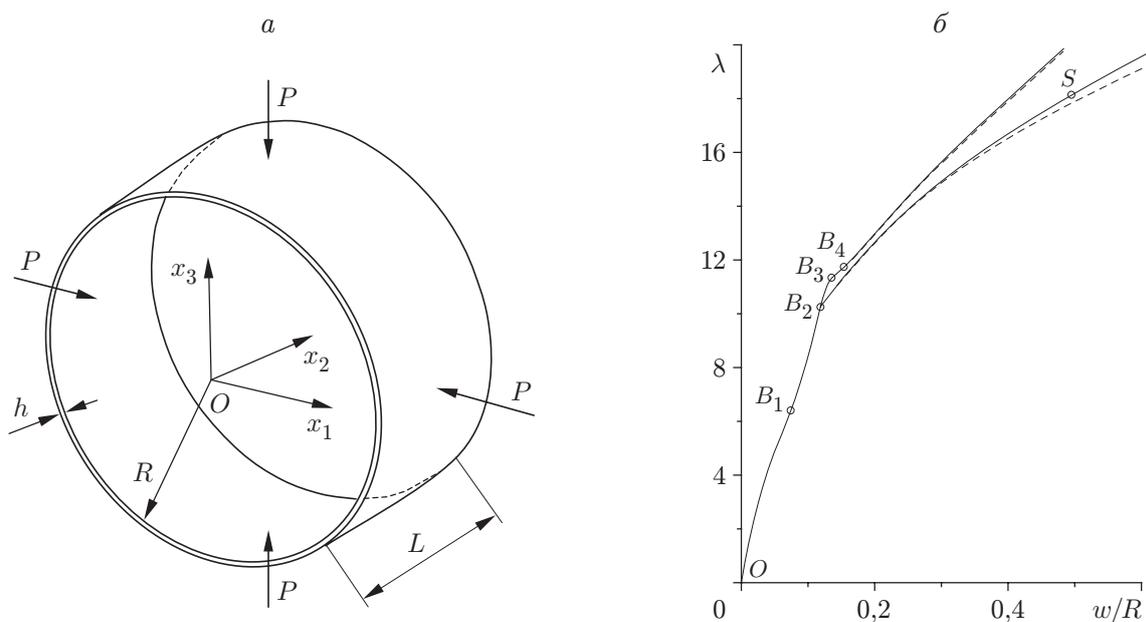


Рис. 5. Схема нагружения цилиндрической оболочки четырьмя радиальными силами (а) и зависимость параметра нагрузки от прогиба (б): сплошные линии — сетка 12 × 72; штриховые — сетка 8 × 48

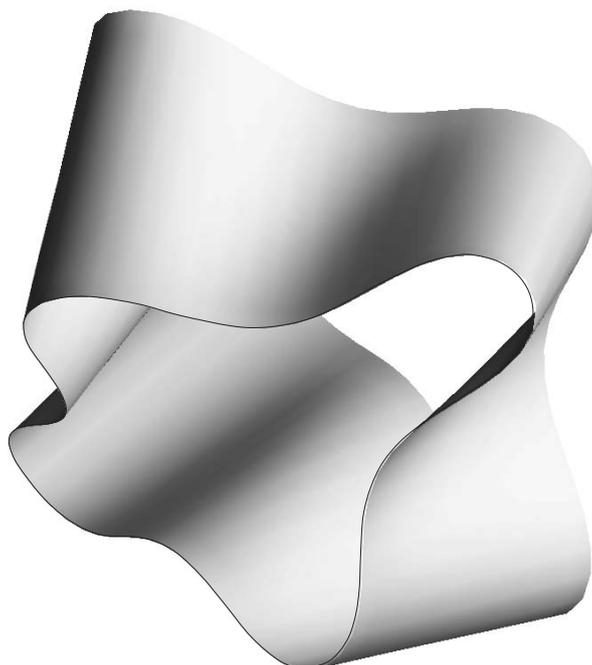


Рис. 6. Закритическая форма равновесия цилиндрической оболочки при сжатии четырьмя радиальными силами

кации и соответствующих им ветвей равновесных состояний требует большого объема вычислений и выходит за рамки данной работы, поэтому ограничимся ветвями решения, рассмотренными в [6]. На начальном участке кривой деформирования  $OB_1$  оболочка устойчива. При достижении точки бифуркации  $B_1$  происходит выпучивание оболочки, при этом поперечные сечения принимают форму, близкую к овалу. При условии равномерного сближения нагруженных узлов (т. е. при кинематическом нагружении) диапазон устойчивого деформирования расширяется до точки  $B_2$  ( $\lambda = 10,251$ ,  $w = 0,118R$ ), через которую проходит ветвь несимметричных форм равновесия оболочки с депланацией поперечных сечений. На рис. 6 приведен пример таких форм для состояния  $S$  (см. рис. 5, б), которое характеризуется значениями  $\lambda = 18,147$  и  $w = 0,495R$ .

**Заключение.** В рамках гипотез Кирхгофа — Лява изложен новый подход к построению конечно-элементной модели нелинейного деформирования тонких оболочек. Этот подход позволяет учитывать конечные искривления в пределах одного элемента и отличается простотой формулировки определяющих соотношений. Трудности, обусловленные применением вариационных методов к существенно нелинейной системе, можно преодолеть, используя трехуровневую схему вычисления вариаций.

Из результатов решения тестовых задач следует, что по сравнению с [6] достигнуто существенное увеличение скорости сходимости решения по числу конечных элементов. Учитывая, что при моделировании поверхностей произвольной геометрии треугольные элементы универсальны, можно сделать вывод об эффективности разработанного конечного элемента для анализа нелинейного деформирования и устойчивости тонких упругих оболочек.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Klinkel S., Gruttmann F., Wagner W. A robust non-linear solid shell element based on a mixed variational formulation // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 2006. V. 195. P. 179–201.

2. **Кузнецов В. В., Образцов И. Ф.** О технических приложениях инвариантов в механике тонкостенных конструкций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 6. С. 132–140.
3. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** Кинематические группы и конечные элементы в механике деформируемого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 3. С. 67–82.
4. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** Геометрически нелинейные модели гибких стержней // Строит. механика и расчет сооружений. 1991. № 5. С. 7–10.
5. **Фиников С. П.** Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехтеоретиздат, 1952.
6. **Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.** Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 1. С. 131–138.
7. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
8. **Кузнецов В. В.** Рекуррентные соотношения для коэффициентов вариаций энергии нелинейных упругих систем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 4. С. 182–183.
9. **Кузнецов В. В.** К определению произвольных вращений в нелинейном анализе тонкостенных конструкций // Расчет элементов конструкций летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1990. С. 59–63.
10. **Sze K. Y., Liu X. H., Lo S. H.** Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells // Finite Elements Anal. Design. 2004. V. 40, N 11. P. 1551–1569.
11. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
12. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** Анализ нелинейных решений со многими особыми точками в задачах пространственного деформирования стержней // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 6. С. 148–153.

*Поступила в редакцию 25/IV 2006 г.,  
в окончательном варианте — 31/VIII 2006 г.*

---