УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: itsvel@hydro.nsc.ru

Рассматривается упругая пластина с физически нелинейным включением произвольной формы, которая находится в условиях чистого изгиба под действием поперечных сил и изгибающих моментов, приложенных на внешней границе пластины. Распределенные по поверхности нагрузки отсутствуют. Формулируется и решается задача о нахождении таких внешних воздействий, обеспечивающих во включении необходимое однородное моментное состояние, т. е. заданные постоянные моменты и кривизны.

Ключевые слова: чистый изгиб неоднородной пластины, физически нелинейное включение произвольной формы, однородное поле моментов.

В [1] изучена обратная задача для упругой области с физически нелинейным включением (ФНВ), находящейся в условиях плоской деформации или в обобщенном плоском напряженном состоянии. Требовалось за счет подбора внешних сил получить заданное однородное напряженно-деформированное состояние в ФНВ. В данной работе эта задача обобщается на случай чистого изгиба упругой пластины с ФНВ произвольной формы. Решение построено в замкнутом виде.

1. Постановка задачи. Рассмотрим пластину постоянной толщины h, срединная поверхность которой есть область $S = S_1 \cup S_2$ в плоскости Ox_1x_2, S_1, S_2 — физически нелинейная односвязная и изотропная линейно-упругая двусвязная области с внешними границами L_1 и L_2 (L_1 разделяет области S_2 и S_1). Внешние воздействия (поперечные силы и изгибающие моменты) приложены только на границе L_2, поверхностные нагрузки отсутствуют. В результате пластина находится в условиях чистого изгиба и для ее деформаций ε_{kl} имеем известные соотношения [2]

$$\begin{gathered}\varepsilon_{kl}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 w_{,kl}, \qquad k, l = 1, 2,\\ w = w(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in S, \quad |x_3| \leqslant h/2\end{gathered} \tag{1.1}$$

(индекс после запятой означает производную по соответствующей координате). Уравнения равновесия принимают вид

$$\begin{gathered}Q_k = M_{kl,l}, \qquad Q_{k,k} = 0,\\ Q_k = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3k}\, dx_3, \qquad M_{kl} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kl} x_3\, dx_3, \qquad k, l = 1, 2.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-00673, 05-01-08025, 06-08-96002) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-6481.2006.1).

В (1.1), (1.2) w — прогиб; Q_k, M_{kl} — перерезывающие силы и моменты; σ_{kl} — компоненты напряжений; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2. Система координат Ox_1x_2 выбрана таким образом, чтобы $(0,0) \in S_1$.

На границе L_1 областей S_1 и S_2 выполняются условия непрерывности прогибов w, углов поворота срединной поверхности (т. е. нормальной производной $\partial w/\partial n$), изгибающих моментов G и поперечных сил $Q + \partial H/\partial s$ [3], где $G = M_{kl}n_kn_l$; $Q = Q_kn_k$; $H = M_{kl}n_kt_l$ — крутящий момент; n_k, t_k — компоненты единичных векторов нормали и касательной к контуру L_1; s — длина дуги контура.

В упругой области S_2 справедливы равенства [3]

$$M_{kl} = -D[(1-\nu)w_{,kl} + \nu w_{,nn}\delta_{kl}], \qquad Q_k = -Dw_{,nnk}, \qquad k,l = 1,2,$$
$$D = Eh^3/[12(1-\nu^2)], \tag{1.3}$$

где δ_{kl} — компоненты плоского единичного тензора; D — цилиндрическая жесткость; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Определяющие уравнения для физически нелинейного включения S_1 имеют вид [2]

$$\sigma_{kl} = F_{kl}(\varepsilon_{mn}), \qquad \varepsilon_{kl} = x_3\varkappa_{kl}, \qquad \varkappa_{kl} = -w_{,kl},$$
$$F_{kl}(-\varepsilon_{mn}) = -F_{kl}(\varepsilon_{mn}), \qquad k,l,m,n = 1,2, \tag{1.4}$$

где F_{kl} — нелинейные дифференцируемые функции, удовлетворяющие при $\xi_{kl}\xi_{kl} \neq 0$ неравенству $\partial F_{kl}/\partial\varepsilon_{mn}\xi_{kl}\xi_{mn} > 0$, которое эквивалентно условию устойчивости процесса деформирования ФНВ [1, 2]:

$$\Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl} > 0 \qquad \text{при} \quad \Delta\varepsilon_{kl}\Delta\varepsilon_{kl} \neq 0. \tag{1.5}$$

Как показано в [2], неравенство (1.5) обеспечивает однозначную разрешимость вытекающих из (1.2) и (1.4) соотношений

$$M_{kl} = 2\int\limits_0^{h/2} F_{kl}(x_3\varkappa_{mn})x_3\,dx_3$$

относительно кривизн $\varkappa_{kl}$.

Кроме того, однородность поля моментов M_{kl} в S_1 обусловливает однородность поля кривизн $\varkappa_{kl}$ в S_1 [2].

Пример функций (1.4), удовлетворяющих условию (1.5), приведен в [2].

Сформулируем основную задачу: какие поперечные силы и изгибающие моменты необходимо приложить к внешней границе L_2 области S_2, чтобы в ФНВ получить необходимое однородное моментное состояние, т. е. чтобы величины M_{kl} в S_1 не зависели от x_k $(k,l = 1,2)$?

2. Решение задачи. Из (1.2) и (1.3) следует, что в рассматриваемом случае отсутствия поверхностных нагрузок прогиб w в области S_2 удовлетворяет бигармоническому уравнению $w_{,kkll} = 0$, поэтому имеет место известное представление [4]

$$2w = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}, \qquad z = x_1 + ix_2. \tag{2.1}$$

Согласно (2.1) прогиб w можно рассматривать как функцию двух независимых комплексных переменных z и $\bar{z}$. Тогда для моментов M_{kl} в S_2 получаем [3–5]

$$M_{11} + M_{22} = -2D(1+\nu)[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\,] = -4D(1+\nu)w_{,z\bar{z}},$$
$$M_{22} - M_{11} + 2iM_{12} = 2D(1-\nu)[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)] = 4D(1-\nu)w_{,zz}, \tag{2.2}$$
$$\Phi(z) = \varphi'(z), \qquad \Psi(z) = \chi''(z).$$

В области S_1 имеем $w_{,kl} = -\varkappa_{kl}$, причем $w_{,kl}$ не зависят от x_1 и x_2. Отсюда с точностью до линейной относительно x_1 и x_2 функции найдем

$$2w = -\varkappa_{kl} x_k x_l.$$

Переходя к переменным $z = x_1 + ix_2$ и $\bar{z} = x_1 - ix_2$, получим

$$8w(z, \bar{z}) = (\varkappa_{22} - \varkappa_{11} + 2i\varkappa_{12})z^2 + (\varkappa_{22} - \varkappa_{11} - 2i\varkappa_{12})\bar{z}^2 - 2(\varkappa_{11} + \varkappa_{22})z\bar{z}. \qquad (2.3)$$

Граничные условия на L_1 для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из (2.2), определяющих напряженно-деформированное состояние в S_2, имеют вид [2, 3]

$$\Phi(\tau) - \lambda_k \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]\,\mathrm{e}^{2i\alpha} = f_k, \qquad k = 1, 2,$$
$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = \frac{3 + \nu}{1 - \nu}, \qquad f_1 = \mathrm{e}^{i\alpha}\,\frac{d(w_{,2} + iw_{,1})}{ds} = 2i\,\mathrm{e}^{i\alpha}\,\frac{dw_{,z}}{ds}, \qquad (2.4)$$
$$f_2 = \frac{1}{D(1 - \nu)}\Big[G - i\Big(H + \int\limits_0^s Q\,ds\Big)\Big],$$

где α — угол между нормалью к контуру L_1 в точке τ и осью Ox_1. Величины $w_{,k}$ $(k = 1, 2)$, $w_{,z}$, G, H, Q из (2.4) считаются заданными на L_1 как функции дуговой координаты s. В силу указанных выше условий непрерывности эти функции можно определить, приближаясь к L_1 из области S_1, где напряженно-деформированное состояние задано, т. е. M_{kl} и $\varkappa_{kl}$ известны, а прогиб w определяется согласно (2.3).

Как показано в [2], для величин f_1 и f_2 из (2.4) справедливы равенства

$$f_1 = -[\varkappa_{11} + \varkappa_{22} + (\varkappa_{22} - \varkappa_{11} + 2i\varkappa_{12})\,\mathrm{e}^{2i\alpha}]/2,$$
$$f_2 = [M_{11} + M_{22} - (M_{22} - M_{11} + 2iM_{12})\,\mathrm{e}^{2i\alpha}]/[2D(1 - \nu)]. \qquad (2.5)$$

Пусть конформное отображение бесконечной области, расположенной вне границы L_1 и включающей область S_2, на внешность единичной окружности γ_1 комплексной плоскости ζ имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = m_1\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} m_{-k}\zeta^{-k}, \qquad \zeta = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}. \qquad (2.6)$$

Тогда из (2.4)–(2.6) при $\rho = 1$ получим граничные условия для функций $\Phi_1(\zeta) = \Phi(\omega(\zeta))$ и $\Psi_1(\zeta) = \Psi(\omega(\zeta))$, определяющих напряженно-деформированное состояние при $|\zeta| > 1$ [4, 5]:

$$\Phi_1(\sigma) - \lambda_k\overline{\Phi_1(\sigma)} - [\overline{\omega(\sigma)}\,\Phi_1'(\sigma)/\omega'(\sigma) + \Psi_1(\sigma)]\,\mathrm{e}^{2i\alpha} = \overline{F_k(\sigma)} \quad \text{на} \quad \gamma_1,$$
$$\overline{F_k(\sigma)} = f_k \quad (k = 1, 2), \qquad \sigma = \mathrm{e}^{i\theta}, \qquad \mathrm{e}^{2i\alpha} = \sigma^2\omega'(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}. \qquad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что

$$\Phi_1(\sigma) = (1 - \nu)[F_1(\sigma) - F_2(\sigma)]/4 \qquad \text{на} \quad \gamma_1.$$

Отсюда с учетом (2.5) найдем [4, 5]

$$\Phi_1(\zeta) = A - (B + iC)\omega_1'(\zeta)/\omega'(\zeta), \qquad \omega_1(\zeta) \equiv \bar{\omega}(\zeta^{-1}) = \overline{\omega(\bar{\zeta}^{-1})},$$
$$\Psi_1(\zeta) = \{[\bar{F}_1(\zeta^{-1}) - \Phi_1(\zeta) - \bar{\Phi}_1(\zeta^{-1})]\omega_1'(\zeta) - \Phi_1'(\zeta)\omega_1(\zeta)\}/\omega'(\zeta),$$
$$\bar{F}_1(\zeta^{-1}) = A_1 - (B_1 - iC_1)\omega'(\zeta)/\omega_1'(\zeta), \qquad |\zeta| > 1, \qquad (2.8)$$
$$8A = 2(1 - \nu)A_1 - (M_{11} + M_{22})/D, \qquad 8B = 2(1 - \nu)B_1 + (M_{22} - M_{11})/D,$$
$$4C = (1 - \nu)C_1 - M_{12}/D, \quad 2A_1 = -(\varkappa_{11} + \varkappa_{22}), \quad 2B_1 = -(\varkappa_{22} - \varkappa_{11}), \quad C_1 = \varkappa_{12}.$$

Из (2.6) и (2.8) следует, что функции $\Phi_1(\zeta)$ и $\Psi_1(\zeta)$ голоморфны в кольце $1 < |\zeta| < R$, где $R^{-1} = \lim |m_{-n}|^{1/n}$ при $n \to \infty$. Если в (2.6) под знаком суммы число слагаемых конечно, то $R = \infty$. Если контур γ_2 плоскости ζ, соответствующий границе L_2, лежит внутри указанного кольца, то искомые внешние воздействия на L_2 (поперечные силы и изгибающие моменты) определяются известными формулами вида (2.4) [3, 4].

Следует отметить, что, как и в [1], построенное в области S_2 решение может быть продолжено за границу L_2, если соответствующие значения $|\zeta| < R$. В частности, если контуром L_1 является эллипс, то продолжение возможно и при $|\zeta| \to \infty$. Это соответствует случаю чистого изгиба пластины с эллиптическим ФНВ под действием равномерно распределенных моментов на бесконечности [2].

3. Единственность решения задачи. Из зависимостей (2.8) следует, что при заданном напряженно-деформированном состоянии в S_1 и при условии, что контур γ_2, соответствующий L_2, лежит в кольце $1 < |\zeta| < R$, решение для напряженно-деформированного состояния в S_2 существует и единственно [1]. Имеет место также обратное утверждение: при заданных изгибающих моментах G и поперечных силах $Q + \partial H/\partial s$ на L_2 моменты M_{kl} и кривизны $\varkappa_{kl}$ в $S = S_1 \cup S_2$ определяются единственным образом, т. е. при найденных силовых воздействиях на L_2 в области S реализуется рассмотренное выше напряженно-деформированное состояние, следовательно, ФНВ находится в однородном моментном состоянии.

Доказательство данного утверждения аналогично приведенному в [1]. При этом используются условие (1.5) и уравнение виртуальных работ, которое в рассматриваемом случае чистого изгиба пластин при указанных выше условиях непрерывности на L_1 имеет вид [2]

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \int\limits_{S} \sigma_{kl}\varepsilon_{kl}\, dS\, dx_3 = \int\limits_{L_2} \Big[\Big(Q + \frac{\partial H}{\partial s}\Big) w - G\, \frac{\partial w}{\partial n}\Big] ds.$$

Данное уравнение справедливо для любых не связанных между собой полей σ_{kl} и ε_{kl}, при этом ε_{kl} и w удовлетворяют соотношениям (1.1), а Q_k и M_{kl} — уравнениям равновесия (1.2). Это же уравнение использовалось в [2] при доказательстве единственности решения задачи о чистом изгибе бесконечной пластины с эллиптическим ФНВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цвелодуб И. Ю.** Об одной обратной задаче для упругой среды, содержащей физически нелинейное включение // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 3. С. 424–430.
2. **Цвелодуб И. Ю.** Об изгибе упругих пластин с физически нелинейным включением // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 152–157.
3. **Григолюк Э. И.** Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. М.: Наука, 1970.
4. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
5. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.

Поступила в редакцию 6/X 2006 г.