Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 1

К ПОСТРОЕНИЮ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАВИТИРУЮЩИХ ДИСПЕРСНЫХ ЖИДКИХ СРЕД

УДК 532.135:532.528

С. В. Стебновский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 630090 Новосибирск

В работе [1] было показано, что в процессе растяжения нагружаемых в импульсном режиме дисперсных жидких сред (эмульсий или суспензий) разрушению (фрагментации) среды предшествует стадия неограниченного роста кавитационных пузырьков при низких концентрациях дисперсной фазы или роста пор в случае высококонцентрированных суспензий (паст). Поэтому математическая модель импульсного разрушения дисперсных жидкостных сред должна учитывать и развитие кавитационного процесса, что сопряжено с весьма большими трудностями, так как известные математические модели пузырьковых суспензий [2–4] справедливы лишь для маловязких жидких матриц в диапазоне низких концентраций пузырьков α_0 без учета их взаимодействия. А согласно [5, 6], даже для маловязких жидкостей типа воды с ростом α_0 существенно увеличивается время релаксации сдвиговых напряжений в пузырьковой среде λ_0 так, что уже при $\alpha_0 = 0{,}8$ $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha_0)/\lambda_0(\alpha_0 = 0) \simeq 10^4$, и среда приобретает вязкоупругие свойства. Но все концентрированные эмульсии и суспензии (в том числе и с маловязкими матрицами) имеют достаточно большие времена релаксации сдвиговых напряжений λ_1^0 для эмульсий и λ_2^0 для суспензий уже в исходном состоянии при $\alpha_0 = 0$ [1], т. е. до начала процесса растяжения среды. Следовательно, с ростом α_0 λ_1^0 и λ_2^0 должны увеличиваться, а растягиваемые среды — приобретать еще более выраженные упругие свойства.

Таким образом, в математической модели динамического разрушения дисперсных жидких сред необходимо учитывать эволюцию их вязкоупругих свойств в процессе трансформации морфологии сред, связанной с кавитационными процессами. В настоящей работе предлагается макрореологический подход к созданию физико-математической модели исследуемого процесса. При этом в рамках такого подхода построена механическая модель кавитирующих дисперсных жидких сред (ДЖС), справедливая в диапазоне α_0 от нуля до значений, соответствующих формированию ячеистых структур в дисперсной среде ($\alpha_0 > 0{,}9$), а также рассмотрена задача о влиянии присутствующих в ДЖС кавитационных пузырьков на ее вязкоупругие свойства.

1. Для построения реологической модели, кавитирующей при монотонном растяжении ДЖС, необходимо произвести анализ эволюции морфологии среды в процессе растяжения и составить адекватную ей на всех стадиях процесса механическую модель.

Пусть μ_0 — эффективная сдвиговая вязкость среды, G_1 и μ_1 — модуль сдвиговой упругости и сдвиговая вязкость дисперсной фазы (твердой в суспензиях и жидкой в эмульсиях). Тогда, если до начала растяжения ДЖС в ней с точностью до кавитационных зародышей отсутствуют пузырьки, т. е. $\alpha_0 \approx 0$, такую среду можно описать общепринятой в реологии механической моделью [7] (рис. 1,*а*) — последовательным соединением вязкого элемента μ_0, соответствующего текучести среды, и узла Фойгта $G_1|\mu_1$, являющегося параллельным соединением вязкого μ_1 и упругого G_1 элементов и отвечающего вязкоупругим свойствам дисперсных элементов, обладающих ненулевой сжимаемостью.

В процессе течения жидкой матрицы происходит деформирование дисперсных эле-

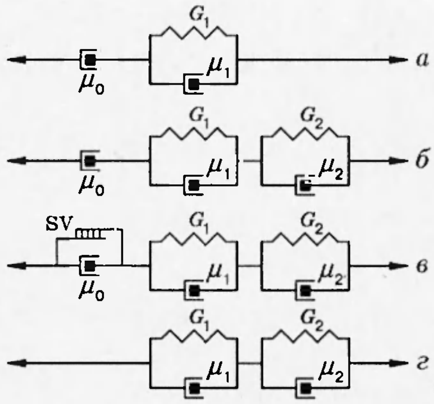

Рис. 1

ментов (в эмульсии сдвиговая упругость капель обусловлена межфазным натяжением на границе раздела капли и матрицы). По такой механической схеме в силу последовательного соединения вязкого элемента μ_0 и узла $G_1|\mu_1$ деформации жидкой матрицы и вязкоупругих дисперсных элементов складываются, а напряжения в матрице и дисперсных элементах равны.

Если к такой среде приложить растягивающее усилие, то в ней, как уже отмечалось, начнут из кавитационных зародышей, содержащихся в жидкой матрице и на границе с дисперсной фазой, расти кавитационные пузырьки или поры, и, таким образом, в среде появятся новые по фазе дисперсные элементы. А поскольку пузырьки привносят в среду дополнительную вязкость и упругость (вследствие упругости их формы), то в этом случае механическую схему среды необходимо дополнить вторым последовательно включенным узлом Фойгта $\mu_2|G_2$ (рис. 1,*б*), соответствующим вязкоупругим свойствам пузырьков.

Но если α_0 достигает, а затем и превышает концентрацию предельной упаковки пузырьков α_{0*}, то среда должна перейти в качественно новое реологическое состояние. Действительно, при $\alpha_0 = \alpha_{0*}$ все пузырьки вступают во взаимный контакт, и далее при $\alpha_0 > \alpha_{0*}$ вследствие их консолидации среда теряет свойство текучести, по крайней мере при малых сдвиговых деформациях, трансформируясь в пенообразный каркас. Согласно [8], статический модуль сдвига сухой пены ($\alpha_0 > 0{,}95$) можно оценивать по формуле $G \simeq \sigma S_0/3$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости матрицы, S_0 — удельная поверхность ячеек пены (в случае водяной матрицы для сухой пены $G \sim 10^2$ Па).

Чтобы иметь более четкое представление о реологических характеристиках дисперсной среды при $\alpha_0 > 0{,}9$, т. е. когда в ней начинают формироваться ячейки пенообразной структуры, проанализируем результаты работы [9], в которой на теоретической модели исследуется поведение стационарных сухих пен (имеющих гомогенную жидкую матрицу) при сдвиговых деформациях. Если к образцу сухой пены, имеющей гексагональную структуру (рис. 2,*а*, штриховкой и точками отмечены контрольные ячейки), мгновенно приложить напряжение простого сдвига τ, то среда будет вести себя следующим образом (рис. 2 и 3 взяты из работы [9]). Вначале (при $\tau = 0$) среда имеет сотовую структуру с энергетически устойчивыми трехгранными узлами Плато (рис. 2,*а*$'$). Далее с увеличением τ до значений, соответствующих отметкам *2* и *3* на рис. 3,*а*, происходит упругая сдвиговая деформация ячеек, как это показано на рис. 2,*б* и 3 (на рис. 3 ε — деформация сдвига). Наконец, когда τ достигает некоторого порогового значения ($\tau = \tau^*$), происходит коалесценция ячеек с образованием энергетически неустойчивых ячеек (рис. 2,*г*) с четырехгранными узлами Плато

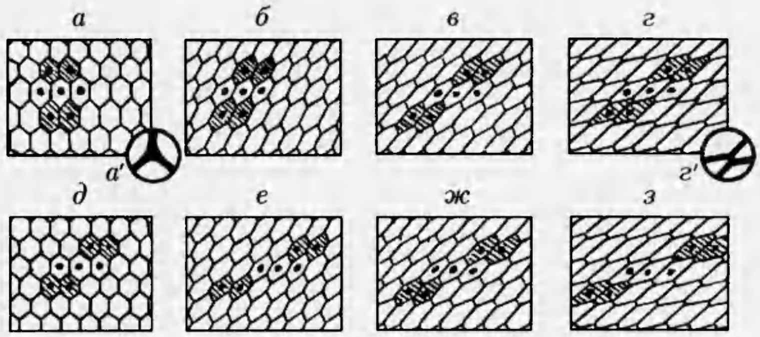

Рис. 2

(рис. 2,г′). Если при этом капиллярное число $\mathrm{Ca} = \sqrt{3}\,(1-\alpha_0)\,\mu_0 a\dot{\varepsilon}/4\sigma$ (a — характерный размер ячеек) меньше порогового значения $\mathrm{Ca}^* \approx 2{,}7 \cdot 10^{-7}$, то, как приведено на рис. 2 и 3,*а*, где $\mathrm{Ca} = 10^{-7}$, $\alpha_0 = 0{,}98$, система самопроизвольно переходит в состояние с более низким уровнем свободной энергии. Это состояние достигается перестройкой морфологии системы так, что снова формируются гексагональные ячейки (рис. 2,*д*) с трехгранными узлами Плато. Процесс сопровождается разгрузкой: напряжение падает до значения несколько ниже нулевого (рис. 3,*а*, точка *5*). Вследствие этого происходит относительный сдвиг отмеченных штриховкой ячеек (рис. 2,*а* → рис. 2,*д*). При дальнейшем растяжении ячеек процесс повторяется (рис. 3,*а*), т. е. график $\tau\,(\varepsilon)$ имеет периодический характер.

Но если $\mathrm{Ca} > \mathrm{Ca}^*$, то, согласно данным [9], пульсации графика $\tau\,(\varepsilon)$ сглаживаются (рис. 3,*б* и *в*). Это объясняется тем, что при $\mathrm{Ca} > \mathrm{Ca}^*$ в процессе сдвиговой деформации ячеек не происходит коалесценции их границ и восстановления гексагональной формы с трехгранными узлами Плато, в отличие от случаев $\mathrm{Ca} < \mathrm{Ca}^*$ (рис. 2,*г*,*д*). Другими словами, при $\mathrm{Ca} > \mathrm{Ca}^*$ идет непрерывное относительное смещение ячеек, напоминающее пластическую деформацию в металлах, когда касательное напряжение превышает статический предел текучести и в среде происходит надбарьерное скольжение дислокаций.

Таким образом, детальный анализ результатов [9] позволяет сделать следующий вывод. Если в жидкой растягиваемой среде концентрация кавитационных пузырьков $\alpha_0 > 0{,}9$, то при сдвиговых напряжениях, меньших критической величины τ^*, среда теряет свойство текучести: происходит своего рода консолидация пузырьков в жидкой матрице, и среда ведет себя как твердый каркас. Если же $\tau > \tau^*$, то вследствие относительного сдвига ячеек (рис. 3) среда переходит в пластически-текучее состояние аналогично телу Бенгама.

С учетом вышеизложенного анализа механическая модель ДЖС (эмульсии или суспензии) (рис. 1,*б*), в которой вследствие ее растяжения кавитационные пузырьки монотонно растут до состояния пенной структуры ($\alpha_0 > 0{,}9$), должна быть дополнена параллельно соединенным с вязким элементом μ_0 пластически-текучим элементом Сен-Венана [7] (рис. 1,*в*). Такая среда при напряжениях сдвига меньше τ^* обладает свойством твердого тела: элемент схемы SV блокирует текучесть вязкого элемента μ_0, и механическая модель сводится к схеме, приведенной на рис. 1,*г*. Если сдвиговое напряжение превысит τ^*, то структура среды, т. е. ее «жесткий каркас» из пены, разрушается (элемент схемы μ_0 разблокируется), и среда ведет себя как вязкоупругое текучее жидкостное тело (рис. 1,*б*). При этом упругость жидкости матрицы при реальных скоростях сдвиговых деформаций не учитывается.

В окончательном виде (рис. 1,*в*) механическая модель работает следующим образом. В исходном состоянии в силу малости размеров кавитационных зародышей ($10^{-3} \div 10^{-4}$ см)

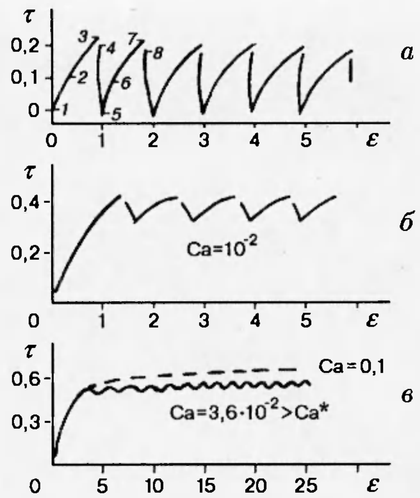

Рис. 3

их можно считать недеформирующимися (в смысле сдвиговых деформаций), т. е. при $\alpha_0 \to 0$ $G_2 \to \infty$, и в общей модели среды (рис. 1,*в*) узел $\mu_2|G_2$ можно не учитывать. При этом, естественно, среда обладает текучестью при любом τ, т. е. ввиду отсутствия пузырьков для нее сен-венаново предельное напряжение τ^* равно нулю, и механическая модель рис. 1,*в* вырождается в модель тела Олдройда (рис. 1,*а*), реологические характеристики которого зависят от концентрации и вязкоупругих свойств дисперсных элементов.

С увеличением α_0 G_2 убывает, вследствие чего в механической модели появляется узел $\mu_2|G_2$ (рис. 1,*б*). После того как α_0 достигнет значения предельной упаковки пузырьков α_{0*}, при $\alpha_0 > \alpha_{0*}$ пузырьки начинают вступать во взаимный контакт, т. е. формировать пенообразный ячеистый каркас [1], блокируя текучесть среды при малых сдвиговых напряжениях. Но если τ превышает пороговое напряжение τ^*, которое, как это можно заключить из рис. 3, зависит от α_0, то в среде восстанавливается пластически-текучее свойство за счет смещения ячеек. Соответственно в механической модели среды при $\alpha_0 > \alpha_{0*}$ появляется элемент Сен-Венана SV (рис. 1,*в*), управляющий предельным напряжением сдвига (блокирующая текучесть среды) по закону

$$\tau^*(\alpha_0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha_0 < \alpha_{0*}, \\ f(\alpha_0) & \text{при} \quad \alpha_0 \geqslant \alpha_{0*}. \end{cases} \tag{1.1}$$

2. Используя механическую модель кавитирующей ДЖС, можно (согласно методам теоретической реологии [7, 10]) вывести реологическое уравнение, связывающее в дифференциальной форме напряжения с деформациями через основные реологические константы среды, т. е. при $\mu_i = \text{const}$, $G_i = \text{const}$ для любой, но фиксированной объемной концентрации пузырьков α_0.

Пусть P_{ij} и d_{ij} — тензоры напряжений и деформаций среды соответственно, а σ_{ij} и e_{ij} — девиаторы тензора напряжений и деформаций. Тогда, поскольку механическая модель среды (рис. 1,*в*) представляет собой последовательное соединение трех двухэлементных узлов ($\mu_0|\mathrm{SV}$, $\mu_1|G_1$ и $\mu_2|G_2$), результирующий девиатор тензора деформаций среды e_{ij} равен сумме девиаторов тензоров деформаций: e^0_{ij} узла $\mu_0|\mathrm{SV}$, e'_{ij} узла $\mu_1|G_1$, e''_{ij} узла $\mu_2|G_2$. При этом девиатор тензора напряжений σ_{ij} будет одинаковым для всех трех узлов. В случае механической модели тела Бенгама по определению [7, 10], если обобщенное напряжение сдвига (интенсивность касательных напряжений) $\tau_i = [(1/2)\,\sigma_{ij}\sigma_{ij}]^{1/2}$

меньше Θ, то тело будет абсолютно твердым , т. е. $\dot{e}_{ij} = 0$. Если же $\tau_i = \Theta$, то в среде начинается пластическое вязкое течение. Поскольку в узле $\mu_0|$SV девиаторы тензоров напряжений в параллельных ветвях пластически-текучего элемента Сен-Венана и вязкой ньютоновской жидкости суммируются, то результирующий девиатор тензора напряжений этого узла запишем в виде

$$\sigma_{ij} = 2\eta_* \dot{e}^0_{ij} + 2\mu_0 \dot{e}^0_{ij}, \tag{2.1}$$

где η_* (эффективный коэффициент вязкости вязкопластического элемента SV) является скалярной переменной величиной [7].

Аналогично для узлов $\mu_1|G_1$ и $\mu_2|G_2$, содержащих параллельно соединенные упругие (гуковы) и вязкие (ньютоновские) элементы, соответственно можно записать

$$\sigma_{ij} = 2G_1 e'_{ij} + 2\mu_1 \dot{e}'_{ij} \tag{2.2}$$

и

$$\sigma_{ij} = 2G_2 e''_{ij} + 2\mu_2 \dot{e}''_{ij}. \tag{2.3}$$

Поскольку, согласно механической модели среды (рис. 1,*в*),

$$e_{ij} = e^0_{ij} + e'_{ij} + e''_{ij}, \tag{2.4}$$

то, переписав (2.1)–(2.3) в операторной форме и подставив из них значения e^0_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij} в (2.4), получим

$$e_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\{2(\eta_* + \mu_0)\frac{\partial}{\partial t}\}} + \frac{\sigma_{ij}}{\{2(G_1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t})\}} + \frac{\sigma_{ij}}{\{2(G_2 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t})\}} \tag{2.5}$$

или после преобразования

$$\begin{aligned} &G_1G_2\sigma_{ij} + [G_1\mu_2 + G_2\mu_1 + G_2\mu_0 + G_1\mu_0 + (G_1+G_2)\eta_*]\,\dot{\sigma}_{ij} + \\ &\quad + [\mu_1\mu_2 + \mu_0\mu_2 + \mu_0\mu_1 + (\mu_1+\mu_2)\eta_*]\,\ddot{\sigma}_{ij} = 2G_1G_2(\mu_0+\eta_*)\,\dot{e}_{ij} + \\ &\quad + 2\,[\mu_0\mu_2G_1 + \mu_0\mu_1G_2 + (\mu_1G_2 + \mu_2G_1)\eta_*]\ddot{e}_{ij} + 2\mu_1\mu_2(\mu_0+\eta_*)\,\dddot{e}_{ij}\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

С учетом того, что по принципу перехода пластического элемента SV через предельное напряжение сдвига Θ параллельно соединенный с ним вязкий элемент не оказывает влияния на достижение пластическим элементом значения Θ [10], полагая в (2.6) $\mu_0 = 0$, имеем

$$\begin{aligned} &\{2\,[G_1G_2\dot{e}_{ij} + (\mu_1G_1 + \mu_2G_2)\,\ddot{e}_{ij} + \mu_1\mu_2\,\dddot{e}_{ij}] - (G_1+G_2)\,\dot{\sigma}_{ij} - (\mu_1+\mu_2)\,\ddot{\sigma}_{ij}\}\eta_* = \\ &= G_1G_2\sigma_{ij} + (G_1\mu_2 + G_2\mu_1)\,\dot{\sigma}_{ij} + \mu_1\mu_2\ddot{\sigma}_{ij}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Согласно уравнению Мизеса [11], пластические деформации у пластически деформируемого тела появляются тогда, когда обобщенное касательное напряжение сдвига станет равным предельному значению

$$\tau_i = \left(\frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\sigma_{ij}\right)^{1/2} = \Theta. \tag{2.8}$$

Если (2.7) умножить на σ_{ij} и подставить $\sigma_{ij}\sigma_{ij} = 2\Theta^2$ из (2.8) в (2.7), то с учетом того, что $\Theta\,(\alpha_0 = \mathrm{const}) = \mathrm{const}$, и, следовательно, согласно (2.8), $\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{ij} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} &\{2\,[G_1G_2\dot{e}_{ij} + (\mu_1G_2 + \mu_2G_1)\,\ddot{e}_{ij} + \mu_1\mu_2\,\dddot{e}_{ij}]\,\sigma_{ij} - (\mu_1+\mu_2)\,\ddot{\sigma}_{ij}\sigma_{ij}\}\eta_* = \\ &\qquad = 2\Theta^2G_1G_2 + \mu_1\mu_2\ddot{\sigma}_{ij}\sigma_{ij}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Далее, поскольку $\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{ij} = 0$, то $\sigma_{ij}\ddot{\sigma}_{ij} = d(\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{ij})/dt - \dot{\sigma}_{ij}\dot{\sigma}_{ij} = -\dot{\sigma}_{ij}\dot{\sigma}_{ij}$, поэтому $\sigma_{ij}\sigma_{ij}\ddot{\sigma}_{ij} = -(\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{ij})\,\dot{\sigma}_{ij} = 0$, с учетом чего, умножая (2.9) на σ_{ij}, получим

$$\eta_* = \frac{\Theta^2}{[\dot{e}_{ij} + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)\,\ddot{e}_{ij} + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\,\dddot{e}_{ij}]\,\sigma_{ij}}, \qquad (2.10)$$

где $\bar{\lambda}_1 = \mu_1/G_1$, $\bar{\lambda}_2 = \mu_2/G_2$ — характерные временные параметры среды. Разделив (2.6) на G_1G_2, разрешив это уравнение относительно η_* и подставив в него вместо η_* выражение (2.10), после перегруппировки членов имеем реологическое уравнение ДЖС, содержащей кавитационные пузырьки в диапазоне фиксированных концентраций от кавитационных зародышей до ячеистой твердообразной структуры:

$$\sigma_{ij} + \Big[\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \mu_0\Big(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\Big)\Big]\,\dot{\sigma}_{ij} + \Big[\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 + \mu_0\Big(\frac{\bar{\lambda}_2}{G_1} + \frac{\bar{\lambda}_1}{G_2}\Big)\Big]\,\ddot{\sigma}_{ij} +$$
$$+ \Big[\frac{(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2})\,\dot{\sigma}_{ij} + (\frac{\bar{\lambda}_1}{G_2} + \frac{\bar{\lambda}_2}{G_1})\,\ddot{\sigma}_{ij}}{\dot{e}_{ij} + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)\,\ddot{e}_{ij} + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\,\dddot{e}_{ij}} - 2\Big]\,\frac{\Theta^2}{\sigma_{ij}} = 2\mu_0\,[\dot{e}_{ij} + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)\,\ddot{e}_{ij} + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\,\dddot{e}_{ij}]. \qquad (2.11)$$

Как уже отмечалось, это уравнение справедливо при условии, что все его коэффициенты (μ_0, μ_1, μ_2, G_1, G_2, Θ) не зависят от времени. Это может иметь место лишь в случае, когда в процессе деформаций α_0 остается постоянной величиной. (Значения объемной концентрации капель α_1 и твердых частиц α_2 при сохранении массы среды будут всегда постоянными.) Но поскольку девиатор тензора деформаций e_{ij} заключает в себе только изменение формы среды при постоянном объеме, то уравнение (2.11) описывает процесс деформаций среды без изменения α_0, а следовательно, при деформациях, описывающихся уравнением (2.11), реологические коэффициенты остаются константами.

Уравнение (2.11) можно свести к уравнению для чисто сдвиговых деформаций:

$$\tau + \Big[\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \mu_0\Big(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\Big)\Big]\,\dot{\tau} + \Big[\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 + \mu_0\Big(\frac{\bar{\lambda}_2}{G_1} + \frac{\bar{\lambda}_1}{G_2}\Big)\Big]\,\ddot{\tau} +$$
$$+ \Big[\frac{(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2})\,\dot{\tau} + (\frac{\bar{\lambda}_1}{G_2} + \frac{\bar{\lambda}_2}{G_1})\,\ddot{\tau}}{\dot{\varepsilon} + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)\,\ddot{\varepsilon} + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\,\dddot{\varepsilon}} - 1\Big]\,\frac{{\tau^*}^2}{\tau} = \mu_0\,[\dot{\varepsilon} + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)\,\varepsilon + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\,\dddot{\varepsilon}]. \qquad (2.12)$$

Здесь τ^* удовлетворяет условию (1.1); τ, ε — напряжение и деформация чистого сдвига соответственно; зависимость $\tau^* = f\,(\alpha_0 > \alpha_{0*})$ можно определить экспериментально.

Следует отметить, что, для того чтобы в случае суспензий G_1, μ_0 не зависели от скорости деформирования среды, значение α_2, согласно [12], не должно превышать 0,35. В случае эмульсий зависимости μ_0, G_1 от скорости деформирования среды не наблюдается при любом значении α_1 [13]. Вопрос о зависимости μ_2 и G_2 от скорости деформирования требует специальных исследований экспериментальными методами. Поэтому ниже будем предполагать, что скорость сдвиговых деформаций в средах с $\alpha_0 > 0$ достаточно мала.

3. Рассмотрим некоторые частные решения уравнения (2.12), позволяющие анализировать реакцию ДЖС на различные возмущения ее состояния.

3.1. Объемная концентрация пузырьков $\alpha_0 > \alpha_{0*}$, и они образуют в среде ячеистый каркас, т. е. $\tau^* > 0$ (рис. 1,*в*). Для удобства анализа поведения исследуемой среды здесь и далее будем на нее воздействовать, как это принято в реологии, ступенчатым импульсным возмущением:

напряжением сдвига

$$\tau(t) = \tau_0\,[U(t)], \quad [U(t)] = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

или деформацией сдвига

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0\,[U(t)], \quad [U(t)] = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

А. $\tau = \tau_0\,[U(t)] > \tau^*$, т. е. структурированная ДЖС обладает пластично-вязкоупругими свойствами, а уравнение (2.12) сводится к виду

$$\dddot{\varepsilon} + \frac{\lambda_2}{æ_2}\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{æ_2}\dot{\varepsilon} = \left(1 - \frac{\tau^{*2}}{\tau_0^2}\right)\frac{\tau_0}{\mu_0 æ_2}, \tag{3.3}$$

где $æ_2 = \bar\lambda_1\bar\lambda_2$; $\lambda_2 = \bar\lambda_1 + \bar\lambda_2$.

При начальных условиях $\varepsilon(t = 0) = \varepsilon_0$, $\varepsilon(t = 0) = \varepsilon_0$, $\dot\varepsilon(t = 0) = \ddot\varepsilon_0$ уравнение (3.3) имеет общее решение

$$\varepsilon(t) = \left[\varepsilon_0 + (\bar\lambda_1 + \bar\lambda_2)\dot\varepsilon_0 + \bar\lambda_1\bar\lambda_2\ddot\varepsilon_0 - (\bar\lambda_1 + \bar\lambda_2)\left(1 - \frac{\tau^{*2}}{\tau_0^2}\right)\frac{\tau_0}{\mu_0}\right] + \left(1 - \frac{\tau^{*2}}{\tau_0^2}\right)\frac{\tau_0}{\mu_0}t +$$

$$+ \frac{\ddot\varepsilon_0\bar\lambda_1\bar\lambda_2\,(\bar\lambda_2\,e^{-t/\bar\lambda_2} - \bar\lambda_1\,e^{-t/\bar\lambda_1})}{\bar\lambda_1 - \bar\lambda_2} + \frac{[\dot\varepsilon_0 - (1 - \tau^{*2}/\tau_0^2)\,\tau_0/\mu_0]}{\bar\lambda_1 - \bar\lambda_2}(\bar\lambda_2^2\,e^{-t/\bar\lambda_2} - \bar\lambda_1^2\,e^{-t/\bar\lambda_1}). \tag{3.4}$$

Здесь второе слагаемое в правой части (т. е. $(1 - \tau^{*2}/\tau_0^2)\,\tau_0 t/\mu_0$) обусловлено текучестью среды (взаимным «проскальзыванием» ячеек, рис. 2, 3), которая тем интенсивнее, чем больше отношение τ_0/τ^* и меньше эффективная вязкость μ_0; третье и четвертое слагаемые в правой части описывают процесс запаздывания упругой деформации ДЖС с временами релаксации $\bar\lambda_1$ и $\bar\lambda_2$. Запаздывания деформации обусловлены присутствием в среде упругих твердодисперсных элементов или капель ($\bar\lambda_1$) и пузырьков или ячеек ($\bar\lambda_2$). Следовательно, согласно (3.4), при $\tau_0 - \tau^* \to +0$ интенсивность пластично-вязкого течения полностью затухает, и среда вырождается в обобщенное вязко-упругое тело Фойгта (рис. 1,*г*).

Б. $\tau < \tau^*$. В этом случае элемент SV узла SV$|\mu_0$ по определению является абсолютно твердым, блокируя элемент μ_0, соответствующий вязкому течению, и среда, теряя свойство текучести, превращается в вязкоупругое «твердообразное» обобщенное тело Фойгта (рис. 1,*г*), т. е. жесткий ячеистый каркас. Если же к такой среде приложить напряжение чистого сдвига $\tau_0 < \tau^*$, то в силу однотипности узлов $\mu_1|G_1$ и $\mu_2|G_2$ деформации сдвига в них будут суммироваться и при $\varepsilon_0 = 0$, $\dot\varepsilon_0 = 0$ полная деформация сдвига, согласно [14], имеет вид

$$\varepsilon(t) = \tau_0\,[J_1\,(1 - e^{-t/\bar\lambda_1}) + J_2\,(1 - e^{-t/\bar\lambda_2})], \tag{3.5}$$

где $J_i = 1/G_i$ ($i = 1, 2$) — податливость сдвигу. Таким образом, в среде сдвиговая деформация будет нарастать с запаздыванием, характеризующимся постоянными временами $\bar\lambda_1$ и $\bar\lambda_2$, зависящими от вязкоупругих свойств твердых частиц или капель ($\bar\lambda_1$) и пузырьков или ячеек ($\bar\lambda_2$). Согласно (3.5), при $t \to \infty$ $\varepsilon(t) \to \tau_0\,(J_1 + J_2)$.

В. $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\,[U(t)]$, где $\varepsilon_0 < \tau^*\,(J_1 + J_2)$ — мгновенная деформация ДЖС в режиме (3.2). Поскольку при этом элемент SV остается абсолютно твердым по определению, то, полагая в (2.5) $\eta_* \to \infty$, получим

$$e_{ij} = \sigma_{ij}/\left\{2\left(G_1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\right\} + \sigma_{ij}/\left\{2\left(G_2 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t}\right)\right\}$$

и (2.12) сводится к виду

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{G_1 G_2}\dot{\tau} + \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right)\tau = æ_2\ddot{\varepsilon} + \lambda_2\dot{\varepsilon} + \varepsilon,$$

или поскольку $\varepsilon(t) = \varepsilon_0[U(t)]$, то

$$\dot{\tau} + \frac{G_1 + G_2}{\mu_1 + \mu_2}\tau = \frac{G_1 G_2}{\mu_1 + \mu_2}\varepsilon_0.$$

Решение этого уравнения имеет экспоненциальный характер:

$$\tau = \tau_0 \mathrm{e}^{-t/\tilde{\lambda}} + \frac{\varepsilon_0}{J_1 + J_2}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tilde{\lambda}}). \tag{3.6}$$

Здесь $\tilde{\lambda} = (\mu_1 + \mu_2)/(G_1 + G_2)$ — время релаксации сдвигового напряжения в ДЖС, зависящее от реологических параметров как дисперсных элементов, так и пузырьков. Но если дисперсные элементы абсолютно твердые, т. е. $G_1 \to \infty$, то из (3.6) имеем $\tau = G_2\varepsilon_0$: в этом случае ДЖС ведет себя как упругое тело Гука.

3.2. Объемная концентрация пузырьков $\alpha_0 < \alpha_{0*}$, т. е., согласно (1.1), $\tau^* = 0$: ДЖС является текучей средой при любом сдвиговом напряжении, и (2.12) сводится к виду

$$\tau + \lambda_1\dot{\tau} + æ_1\ddot{\tau} = \mu_0(\dot{\varepsilon} + \lambda_2\ddot{\varepsilon} + æ_2\dddot{\varepsilon}), \tag{3.7}$$

где $\lambda_1 = (\mu_0 + \mu_1)/G_1 + (\mu_0 + \mu_2)/G_2$; $æ_1 = (\mu_0\mu_1 + \mu_0\mu_2 + \mu_1\mu_2)/G_1G_2$.

Рассмотрим два режима возмущения такой среды.

А. $\tau = \tau_0[U(t)]$. В этом случае (3.7) сводится к виду

$$\dddot{\varepsilon} + \frac{\lambda_2}{æ_2}\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{æ_2}\dot{\varepsilon} = \frac{\tau_0}{\mu_0 æ_2}$$

и при начальных условиях $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$, $\dot{\varepsilon}(t=0) = \dot{\varepsilon}_0$, $\ddot{\varepsilon}(t=0) = \ddot{\varepsilon}_0$ имеет решение

$$\varepsilon(t) = (\varepsilon_0 + \lambda_2\dot{\varepsilon}_0 + æ_2\ddot{\varepsilon}_0 - \lambda_2\frac{\tau_0}{\mu_0}) + \frac{\tau_0}{\mu_0}t -$$
$$-\frac{\bar{\lambda}_1^2(\bar{\lambda}_2\ddot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_0 - \frac{\tau_0}{\mu_0})}{\lambda_1 - \lambda_2}\mathrm{e}^{-t/\bar{\lambda}_1} + \frac{\bar{\lambda}_2^2(\bar{\lambda}_1\ddot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_0 - \frac{\tau_0}{\mu_0})}{\lambda_1 - \lambda_2}\mathrm{e}^{-t/\bar{\lambda}_2}. \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что при нагружении возмущением (3.1) ДЖС с фиксированной концентрацией неконсолидированных пузырьков ($\alpha_0 < \alpha_{0*}$) сдвиговая деформация среды будет определяться текучестью среды (слагаемое $\tau_0 t/\mu_0$), более интенсивной, чем в случае п. 3.1. А, а также запаздыванием упругой деформации, обусловленным присутствием в среде дисперсных элементов и пузырьков (третье и четвертое слагаемые в правой части (3.8)). Времена запаздывания $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$ определяются реологическими константами дисперсной фазы (μ_1, G_1) и пузырьков (μ_2, G_2).

Б. $\varepsilon = \varepsilon_0[U(t)]$. Подставляя эту функцию в (3.7), получим уравнение

$$\ddot{\tau} + \frac{\lambda_1}{æ_1}\dot{\tau} + \frac{1}{æ_1}\tau = 0,$$

решение которого при $\tau(t=0)=\tau_0$, $\dot\tau(t=0)=\dot\tau_0$ имеет вид

$$\tau(t)=\left[\frac{\tau_0}{2}\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)+\frac{\xi_2}{2\xi_1}\dot\tau_0\right]e^{-t/\tilde\lambda_1}-\left[\frac{\tau_0}{2}\left(\frac{1}{\xi_1}-1\right)+\frac{\xi_2}{2\xi_1}\dot\tau_0\right]e^{-t/\approx\lambda_1}, \qquad (3.9)$$

где

$$\xi_1=\sqrt{|1-4æ_1/\lambda_1^2|},\quad \xi_2=2æ_1/\lambda_1,\quad \tilde\lambda_1=\xi_2/(1-\xi_1),\quad \approx\lambda_1=\xi_2/(1+\xi_1). \qquad (3.10)$$

Используя (3.10), можно показать, что

$$\tilde\lambda_1=\lambda_1'\left[1+\frac{\lambda_1''}{\lambda_1'}\left(1-\frac{æ_1}{\lambda_1\lambda_1''}\right)+\frac{æ_1^2}{\lambda_1^3\lambda_1'}\left(1-\frac{2æ_1}{\lambda_1^2}\right)+\ldots\right]. \qquad (3.11)$$

Здесь

$$\lambda_1'=\frac{\mu_0+\mu_1}{G_1},\quad \lambda_1''=\frac{\mu_0+\mu_2}{G_2},\quad \frac{æ_1}{\lambda_1\lambda_1''}<1,\quad \frac{2æ_1}{\lambda_1^2}<1. \qquad (3.12)$$

Из (3.9) следует, что в ДЖС, содержащей неконсолидированные пузырьки, при возмущении типа (3.2) сдвиговые напряжения релаксируют по экспоненциальному закону с постоянными временами релаксации $\tilde\lambda_1$ и $\approx\lambda_1$, зависящими от реологических констант жидкой матрицы, дисперсной фазы и пузырьков.

Если $\alpha_0\to 0$ при сохранении счетной концентрации пузырьков, то, как уже отмечалось, $G_2\to\infty$, а поэтому $æ_1\to 0$, $æ_2\to 0$, $\lambda_2\to\lambda_1$, $\lambda_1\to\lambda_1'$ и (3.7) сводится к уравнению Олдройда [14]

$$\tau+\lambda_1'\dot\tau=\mu_0(\dot\varepsilon+\lambda_1\ddot\varepsilon), \qquad (3.13)$$

описывающему реологические свойства эмульсий и суспензий. Легко проверить, что при $\alpha_0\to 0$ $G_2\to\infty$, и решения (3.8), (3.9) уравнения (3.7) для ДЖС с пузырьками вырождаются в соответствующие решения уравнения (3.13):

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0+\frac{\tau_0}{\mu_0}t-\bar\lambda_1\left(\frac{\tau_0}{\mu_0}-\dot\varepsilon_0\right)(1-e^{-t/\bar\lambda_1}),\qquad \tau(t)=\tau_0 e^{-t/\lambda_1'}.$$

Поскольку в решении (3.9) $\tilde\lambda_1>\approx\lambda_1$, то второе слагаемое в его правой части убывает со временем быстрее, чем первое, и, таким образом, характер релаксации τ будет определяться постоянной времени $\tilde\lambda_1$. А согласно (3.11), $\tilde\lambda_1>\lambda_1'$, следовательно, если в ДЖС (суспензию или эмульсию) ввести пузырьки с объемной концентрацией α_0, то время релаксации сдвиговых напряжений в среде превышает соответствующее время релаксации в чистой эмульсии или суспензии. Согласно [6], чем больше α_0, тем больше μ_2 и меньше G_2, а значит, увеличивается λ_1'' и, согласно (3.11), $\tilde\lambda_1/\lambda_1'$, т. е. становится длиннее память среды и сильнее в ней должны проявляться упругие свойства.

Таким образом, в настоящей работе решена часть проблемы построения реологической модели кавитирующей ДЖС. Построена механическая модель растягиваемой ДЖС с неограниченным ростом кавитационных пузырьков от размеров зародышей до формирования гексагональной ячеистой структуры. Получено реологическое уравнение в дифференциальной форме, описывающее связь между сдвиговыми напряжениями и деформациями в ДЖС с фиксированной объемной концентрацией кавитационных пузырьков во всем реализуемом ее диапазоне.

Реологическое уравнение, соответствующее объемному растяжению ДЖС, т. е. случаю монотонно возрастающей объемной концентрации кавитационных пузырьков α_0, должно содержать зависящие от $\alpha_0(t)$ и от скорости деформации реологические коэффициенты. Но для определения этих коэффициентов необходимы специально разработанные экспериментальные методики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16383).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стебновский С. В.** О поведении дисперсных жидких сред при динамических нагрузках // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 68–77.
2. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102–110.
3. **Biesheuvel A., Wijngaarden L.** Two-phase flow equation for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid // J. Fluid Mech. 1984. V. 148. P. 301–318.
4. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1, 2.
5. **Стебновский С. В.** О механизме импульсного разрушения жидкого объема // ПМТФ. 1989. № 2. С. 126–132.
6. **Стебновский С. В.** Сдвиговая упругость жидких сред, содержащих пузырьки // Физика горения и взрыва. 1990. Т. 26, № 3. С. 127–128.
7. **Рейнер М.** Реология. М.: Наука, 1965.
8. **Путятин Б. В.** Уравнения гидродинамики пен // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 91–95.
9. **Kraynik A. M., Hansen M. L.** Foam rheology: a model of viscous phenomena // J. Rheol. 1987. V. 31, N 2. P. 175–205.
10. **Тябин Н. В.** Реологическая кибернетика. Волгоград, 1977. Ч. 1.
11. **Мизес Р.** Механика твердых тел в пластическом деформированном состоянии // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
12. **Нильсен Л.** Механические свойства полимеров и полимерных композиций. М.: Химия, 1978.
13. **Pal R., Rhodes E.** Viscosity/concentration relationship for emulsions // J. Rheol. 1989. V. 33, N 7. P. 1021–1047.
14. **Уилкинсон У. Л.** Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964.

Поступила в редакцию 7/II 1995 г.