УДК 164.01, 165.3, 168.51
DOI:
10.15372/PS20170104

Л.Д. Ламберов

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ: ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ VS. ТЕОРИИ ТИПОВ[*]

В статье рассматривается краткая история развития теории множеств как оснований математики и краткая история становления теории типов. Приводится подробное сравнение теории множеств и теории типов, демонстрируются проблемы теории множества, а также преимущества теории типов как оснований математики. Кроме того, в статье обсуждаются прагматический аспект теории типов как оснований математики и кратко рассматривается современный вариант теории типов, а именно гомотопическая теория типов.
Ключевые слова: теория множеств, теория типов, гомотопии, основания математики

L.D. Lamberov

FOUNDATIONS OF MATHEMATICS: SET THEORY VS. TYPE THEORY

The paper deals with a brief history of the development of set theory as the foundations of mathematics, and a brief history of the formation process of the type theory. The paper contains a detailed comparison of set theory and type theory, discussion of the problems of the set theory, and the advantages of the type theory as the foundations of mathematics. In addition, the article discusses the pragmatic aspect of the type theory as the foundations of mathematics and contains a brief overview of a modern version of the type theory, namely homotopy type theory.
Keywords: set theory, type theory, homotopies, foundations of mathematics

I. Краткая история теории множеств как оснований математики

Зачатки[1] теории множеств (например, близкие идеи, связанные с понятием бесконечности) можно обнаружить еще у Б. Больцано и Б. Ри-

[*] Исследование выполнено при поддержке Совета по грантам Президента РФ, проект МК-6552.2016.6. Статья публикуется в авторской редакции.

[1] Подробнее о ранней истории теории множества см. [1].

мана. Большое влияние на формирование теории множеств оказал Ю.В. Р. Дедекинд в его переписке с Г. Кантором. Об истории же теории множеств *в собственном смысле* этого термина можно говорить, начиная с работ Г. Кантора. Если не считать первых лет после публикации его исследований, когда предложенные идеи не принимались, а самого Г. Кантора считали шаролотаном[2], то теория множеств довольно быстро начала восприниматься исследователями в качестве оснований математики. К примеру, Ю.В.Р. Дедекинд применил теорию множеств для построения действительных чисел, А. Борель и А.Л. Лебег использовали ее в работах по теории меры, Ж. Адамар и А. Гурвиц для разработки анализа и т.д. Некоторые математики изначально отнеслись к теории множеств с определенным воодушевлением, но после обнаружения в ней парадоксов отошли от такой точки зрения. Такое отношение к теории множеств можно обнаружить у А. Пуанкаре, который по началу утверждал, что последняя необходима для топологии, но в дальнейшем отказался от этой точки зрения. В деле укоренения теории множеств в качестве оснований математики, безусловно, огромную роль сыграли такие в некотором смысле «иконические» фигуры как Д. Гильберт и Н. Бурбаки.

Можно смело утверждать, что теория множеств настолько укоренилась в основаниях математики, что большинством она считается чем-то естественным. На каком-то этапе исследователи, входящие в мейнстрим, перестали подвергать критическому осмыслению сами основания, они оказались готовы мириться с теорией множеств и в определенном смысле молча приняли идею о том, что за пределами теории множеств нет ничего обнадеживающего для оснований математики. Более того, даже некоторые исследователи, обратившиеся к теории категорий в попытке преодоления теории множеств как оснований для математики, стремились интерпретировать категории как множества или классы, имеющие определенную структуру. Какого бы рода попытки отказа от теории множеств не предпринимались, все равно (и эта ситуация устраивает большинство математиков) «святая вера» в то, что математика представляет собой собрание вечных истины, скрепленных аксиомами теории множеств, выраженными на некотором формальном языке (например, языке логики предикатов первого порядка), сохраняет свою силу, а «святой дух» аксиоматической теории множеств окутывает некритически настроенных исследователей.

[2] К примеру, Кронекер называл Кантора «шарлатаном» и «развратителем молодежи».

Фактически, когда речь идет об основаниях математики, то зачастую имеют в виду особый вариант теории множеств, аксиоматическую теорию множеств Цермело - Френкеля. В дальнейшем под теорией множеств по умолчанию будет пониматься именно этот вариант (без различения между ZF, системой аксиом Цермело - Френкеля, и ZFC, системой аксиом Цермело-Френкеля с аксиомой выбора, поскольку для настоящего обсуждения оно не является критичным). В том же случае, если речь будет идти о каком-то другом варианте теории множеств, это будет оговариваться специально[3].

II. Возникновение и развитие теории типов

Изначально теория типов возникает в качестве скорее вспомогательного инструмента, призванного решить проблемы теории множеств, а в дальнейшем некоторое время развивается как вспомогательный инструмент для разрешения схожих проблем в других областях. Так, Б. Рассел в своих работах «Принципы математики» и «Математическая логика как основанная на теории типов» предлагает теоретико-типовой подход в качестве возможного способа преодоления парадоксов в теории множеств, а А. Чёрч в работе 1940 г. «Формулировка простой теории типов» использует теорию типов для устранения парадоксов в своем лямбда-исчислении. При рассмотрении ранней истории теории типов особую роль следует отвести исследованиям комбинаторной логики М. Шейнфинкеля и Х. Карри. Комбинаторная логика тесно связана с теорией типов. Здесь представляется интересным прежде всего то, что изначально исследования в рамках комбинаторной логики были направлены на выработку нового подхода к основаниям математики. Тем не менее, следует заметить, что комбинаторная логика не является теорией типов в чистом виде. Типы «присутствуют» в комбинаторной логике своего рода в некотором «скрытом» виде.

Далее, между работами Б. Рассела по теории типов и работами А. Чёрча можно выделить работы таких исследователей как Ф.П. Рамсей и К. Гёдель, идеи которых скорее продолжают расселовскую линию, хотя и придают ей определенную обоснованность и в каком-то смысле даже завершенность. Однако следует помнить, что теория типов в этот

[3] В дальнейшем будет введено различие между «материальными» и «структурными» теориями множеств, ZF/ZFC относится к числу «материальных» теорий.

период своего развития еще остается далекой от ее реального применения в качестве *общепризнанных* оснований математики.

В дальнейшем теория типов развивается скорее маргинально и не в рамках собственно математики или оснований математики, а в рамках компьютерных наук, а также скорее в практическом ключе. Теоретические конструкции, заложенные в конце XIX и начале XX вв. реализовались на практике не сразу, развитие систем компьютерных доказательств началось в 1950-х гг. Одним из первых практических результатов стала реализация на вычислительной машине доказательства того, что сумма двух четных чисел является четным числом. Оно было выполнено на компьютере JOHNNIAC в Институте продвинутых исследований. На том же компьютере были получены первые компьютерные доказательства 38 теорем из *Principia Mathematica* Б. Рассела и А. Уайтхеда.

Важно отметить влияние[4] категорной логики (и теории категорий вообще) на развитие теории типов. Взаимовлияние и взаимопроникновение эти двух областей исследований принесло интересные плоды, которые в конечном счете можно назвать одним из важнейших факторов в создании современной теории типов, о которой речь пойдет ниже.

Работы по использованию вычислительной техники для доказательств велась в нескольких направлениях. Одним из таких направлений было использование метода резолюций. Приблизительно до конца 1970-х гг. он выступал в качестве основного метода, используемого в компьютерных доказательствах. Хотя исследования как самого метода резолюций (например, в 1972 г. метод резолюций был обобщен до логик высоких порядков), так и использования этого метода в автоматизированном доказательстве и принесли важные плоды, сам он по себе ставил для компьютерных доказательств ряд серьезных ограничений. При использовании этого метода компьютер работает по принципу «черного ящика», исследователь не может вмешиваться в процесс доказательства и вынужден просто ждать завершения работы программы. Причем ресурсы компьютера вполне могут закончиться раньше того, как доказательство будет найдено.

Одновременно велась работа по созданию такой семантики языков программирования, которая бы позволила использовать математические методы для доказательства корректности исходного кода программ. Эти

[4] О совместном развитии категорной логики и теории типов см. [2].

исследования привели к созданию около 1980 г. системы компьютерных доказательств LCF, основной особенностью которой стала возможность программирования тактик доказательств на специальном языке ML (Meta Language). Опустим в дальнейшем такие важные результаты как реализация в программе KB алгоритма построения полной системы переписывания термов, а также серьезный прогресс в доказательствах по индукции, выразившийся в создании системы NQTHM/ACL. Эти результаты заслуживают отдельного разговора, но наибольшее влияние на современное состояние систем компьютерных доказательств оказали другие исследования.

В 1968 г. Н. де Брёйн создал систему *Automath*, способную проверять корректность математических доказательств потенциально любой формы. Добиться этого удалось благодаря использованию лямбда-исчисления. Изначально лямбда-исчисление, созданное в 1920–1930-х гг. А. Чёрчем, представляло собой систему для исследования понятия вычислимости. Типизированное лямбда-исчисление (лямбда-исчисление, в котором термам приписаны типы) помимо прочего представляет собой вариант исчисления высших порядков, то есть выступает в качестве более простой альтернативы метаматематике в духе Б. Рассела и А. Уайтхеда. Более того, вычисление лямбда-терма может быть представлено в схожем с натуральным выводом виде, что позволило исследователям обнаружить взаимосвязь между (конструктивными) доказательствами с одной стороны и функциями с другой. Указанная взаимосвязь носит название изоморфизма Карри-Говарда и известна также как «доказательства-как-программы» или «формулы-как-типы».

В 1970-х гг. на основе лямбда-исчисления П. Мартин-Лёф сформулировал интуиционистскую теорию типов, мощную систему для конструктивной аксиоматизации математических структур. В конечном счете развитие этой системы привело к созданию программы NuPRL Б. Констебля. Ключевой особенностью интуиционистской теории типов было использование зависимых типов, позволяющих выражать кванторы. Дальнейшее развитие типизированного лямбда-исчисления и интуиционистской теории типов позволило создать такие системы интерактивного построения доказательств как *Coq*, *Agda*, *Idris* и др., а в конечном счете привело к возникновению нового проекта оснований математики, гомотопической теории типов (далее – ГТТ).

III. Различия между теорией множеств и теорией типов

Структура теории

По своей структуре теория множеств представляет собой набор своего рода «содержательных» аксиом, сформулированных на некотором формальном языке (напр., на языке логики предикатов первого порядка), и дедуктивную систему, которая из аксиом позволяет получать теоремы. Логика в данном случае представляет собой каркас и является неустранимой.

Если же обратиться к теории типов, то последняя не нуждается в какой-либо «внешней» логике. Теория типов не является «содержательной» теорией подобно теории множеств, которой требуется формализация. Теория типов в ее традиционном понимании не содержит каких-либо аксиом, все ее содержание выражено в виде правил вывода. Логика уже «внутренне» содержится в теории типов.

Объекты

Объекты, рассматриваемые в рамках теории типов, демонстрируют строго определенное поведение, что существенным образом отличает их от объектов *наивной* теории множеств, поскольку правила построения объектов в *наивной* теории множеств не предполагают, что элементами множеств являются однородные объекты. Множество (в *наивной* теории множеств) может содержат разнородные объекты, что делает разговор о поведении объектов теории множеств скорее бессмысленным. Когда же речь идет об аксиоматических теориях множеств, например обсуждаемых ZF/ZFC, то следует указать, что в таких теориях любой объект является множеством (то есть, множества и элементы не различаются как объекты разных типов). В рамках же теории типов любой данный терм принадлежит только одному типу, а структура «сложных» объектов (например, списков) точно определена (то есть, можно ввести, например, тип списка натуральных чисел, тип списка пар и т. д.). Такой подход позволяет иметь ясное описание рассуждений в рамках этой системы, что очень важно с вычислительной точки зрения.

При обсуждении объектов полезно провести различие между двумя вариантами или интерпретациями теории множеств, тем, что называют «материальной» и «структурной» теориями множеств. Это различие связано со сложностями и затруднениями, возникающими при формулировке теории категорий с помощью теории множеств. Эти сложности не будут специально обсуждаться в настоящей статье, необходимо лишь отметить, что они оказываются важными и позволяют отдельно выделить теорию категорий в связи с тем, что именно в ней исследователь довольно часто сталкивается с вопросами, обсуждаемыми в рамках оснований математики, то есть исследователь часто вынужден тем или иным способом указанные сложности разрешать. Эти затруднения оказались настолько «неудобными», что инициировали серьезные споры и даже послужили одной из причин для критики теории множеств как оснований математики. Тем не менее, оказалось, что теорию множеств можно построить с помощью теории категорий. Сделано это было У. Лавером [3]. Построенная им теория была названа по названию его статьи элементарной теорией категории множеств (ETCS). В отличии от «материальной» теории множеств ZFC предлагаемая интерпретация ETCS является «структурной» (универсальные конструкции в категориях позволяют работать с изоморфными объектами как с «равными»).

Коротко говоря, под «материальными» теориями множеств имеют в виду такие теории, базовым понятием которых является экстенсиональное отношение принадлежности элемента множеству. Зачастую (а в случае с ZF/ZFC – всегда) все объекты «материальных» теорий множеств сами являются множествами[5]. С другой стороны, «структурные» теории множеств основываются на внешних отношениях между множествами, элементы которых оказываются «анонимными» (по сути, множества в рамках «структурных» теорий множеств содержат не сами элементы, а коды элементов). Кроме того, при «структурном» подходе отдельно выделяется синглетон (множеств с только одним элементом) 1, а функции $1 \rightarrow A$ используются для указания на элементы множества A. Таким образом, элементами множеств, например, в ETCS являются не такие же множества, а объекты некоторого другого вида. Более того, при обсуждении элемента в ETCS имеют в виду не какой-то изолированный объект, а объект относительно конкретного множества, элементом которого он является. Зачастую элементы в ETCS называют «обобщенными элементами», подразумевая под ними нечто подобное функции.

---

[5] Это так в случае ZFC, но некоторые другие «материальные» теории в качестве объектов принимают еще и атомы.

Суждения и высказывания

Различие между суждениями и высказываниями оказывается весьма важным в рамках интенсиональной теории типов[6], поэтому это различие требует особого внимания. Кроме того, оно также позволяет провести различие между подходом теории множеств и подходом теории типов.

Понятие высказывания должно быть вполне известно всем, кто знаком с логикой. Под высказыванием понимается некая (сформированная по соответствующим правилам) последовательность символов, которая подвергается семантической интерпретации и имеет истинностное значение. В теории типов всякий тип[7] представляет собой (то есть, интерпретируется, поскольку речь идет о семантике) высказывание (*Satz*) утверждающее, что этот тип заселен (то есть, имеется хотя бы один объект этого типа). Под суждением (*Urteil*) же понимается, своего рода, метавысказывание, то есть высказывание метаязыка. К примеру, некоторая последовательность символов, сформированная по соответствующим правилам, является высказыванием, тогда само высказывание о том, что эта конкретная последовательность символов является высказыванием, является суждением (на метауровне). Также в качестве примера суждения можно указать суждение о том, что некоторое высказывание истинно или что оно выводимо.

Символ принадлежности элемента множеству в теории множеств является нелогическим символом объектного языка, поэтому запись вида $a \in A$, говорящая, что a является элементом множества A, является высказыванием, которое может быть оценено и, соответственно, имеет истинностное значение. С другой стороны, в теории типов принадлежность типу, $a{:}A$ (терм a имеет тип A), является суждением и не является утверждением чего бы то ни было в теории типов, но является утверждением *о* теории типов.

Зачастую в теории типов выделяют несколько разновидностей суждений (иногда в разных вариантах этот набор может отличаться):

1. суждения типизации, $a{:}A$;

---

[6] То есть, в такой теории типов, в которой типы равенств не обязательно являются высказываниям. Когда некоторую теорию типов называют экстенсиональной, то обычно под этим подразумевают, что типы равенств в ней всегда являются высказываниями, то есть определяются их объемами (набором пар равных элементов).

[7] В гомотопической теории типов (далее ГТТ) это обстоит несколько иначе, см. ниже.

2. суждения типовости, *A type* или *A:Type*;
3. суждения равенства термов некоторого типа, $t_1 =_A t2$;
4. суждения равенства типов, $A = B$.

Суждения в теории типов определяются индуктивным образом с помощью указания правил типизации, введения/удаления термов соответствующего типа, и правил вычисления. Доказательства суждений в теории типов обычно представляется в виде дерева, а доказательства высказываний отождествляются в конкретными элементами [4, 3-6].

Если вновь вернуться к вопросу об объектах, то необходимо отметить, что запись $a \in A$ является высказыванием в «материальных» теориях множеств типа ZFC, если же речь идет о «структурных» теориях множеств (например, ETCS), то эта запись не может быть названа высказыванием в полном смысле этого термина. По своей природе объекты «структурных» теорий множеств обладают элементами (в данном случае это функции с областью определения 1 и областью значений A), а $a \in A$ не является чем-то, что требует доказательства или может быть принято в качестве гипотезы.

Вообще само по себе отношение принадлежности и трактовка объектов теории множеств демонстрируют своего рода «симптомы» глубинных проблем теории множеств. В контексте различия между «матеральными» и «структурными» теориями множеств представляется интересным пример, предлагаемый к рассмотрению М. Шульманом [5]. Для начала рассмотрим следующую запись: $\forall x \in \mathrm{R}$, $x^2 \geq 0$. В рамках «материальных» теорий множеств эта запись интепретируется как условное высказывание «Для всякого объекта *x*, если *x* является действительным числом, то больше, либо равен 0». В рамках же «структурных» теорий множеств кванторная часть, $\forall x \in \mathrm{R}$ представляет собой атомарную логическую операцию, а $x \in \mathrm{R}$ не является высказыванием. Таким образом, в рамках «структурных» теорий множеств рассматриваемая запись интерпретируется как утверждение «Для всякого действительного числа, его квадрат больше, либо равен 0», что интуитивно кажется более близким обычной математической практике.

Тем не менее, как указывает М. Шульман, иногда в математической практике возникают своего рода коллизии при употреблении термина принадлежности множеству. Допустим, L — множество комплексных чисел с действительной частью 1/2, тогда можно попытаться доказать следующее утверждение: $\forall z \in \mathrm{C}$, $\zeta(z)=0$ и z не является отрицательным четным целым числом, то $z \in L$. В этом утверждении $\in$ употребляется двусмысленно. С одной стороны, кванторная часть, $\forall z \in C$, интуитивно не считается высказыванием, то есть $\in$ здесь понимается как в «структурных» теориях множеств. Смысл этой записи в том, что z дано как комплексное число, а не в том, что это антецедент условного высказывания о том, что если z является комплексным числом, то… С другой стороны, $z \in L$ уже понимается как высказывание, которое является либо истинным, либо ложным, что соответствует «материальным» теориям множеств.

Закономерно возникает вопрос о причинах такой двусмысленности. Представляется, что эта причина заключается в редукционистском характере теории множеств, о чем подробнее речь пойдет в параграфе «Разделы математики и редукционизм».

Подмножества и подтипы

Как уже было указано, в теории типов терм принадлежит только одному типу. Как же в таком случае можно выразить идею, например, о том, что некоторое число является (1) натуральным и (2) нечетным? В теории множеств сделать это можно, используя аксиомную схему выделения [6, 116-118]:

$$\forall x \exists y \forall z[z \in y \equiv (z \in x \wedge P(z))].$$

Множество определяется некоторым свойством и представляет его объем. Тем не менее, указанная выше аксиома является одной из наиболее важных аксиом теории множеств, поскольку ее целью является предотвращение возникновения парадоксов. Аксиома выделения призвана ограничивать размер множества путем указания на некоторое уже данное множество. То есть, благодаря аксиоме выделения можно создавать только такие множества, которые в определенном смысле уже описываются другими аксиомами теории множеств. Другими словами, благодаря аксиоме выделения возможно создание только таких множеств, которые уже содержатся в некотором другом множестве. Этот важный нюанс позволяет запрещать создание, например, множеств всех кардинальных чисел, исходя только из свойства «быть кардинальным числом». Кроме того, эта аксиома блокирует создание слишком больших множеств (например, исходя из свойства «быть множеством»). Фактически, аксиома выделения является ослаблением (наивной) аксиомы свертывания в следующем смысле: (1) множество не может задаваться независимо, а всегда должно быть выделено как подмножество уже заданного множества; (2) свойство, по которому множество выделяется, должно быть определенным.

Таким образом, в рамках теории множеств некоторый объект может являться элементом не просто одного, а весьма большого (бесконечного) количества различных множеств. В теории типов мы не можем поступить таким же образом, не нарушив основного принципа, согласно которому терм имеет строго один тип. Однако в теории типов у нас имеется близкая аксиоме выделения конструкция: вместо подмножеств некоторого данного множества мы можем определять подтипы некоторого данного типа (либо же использовать полиморфные определения). Допустим, мы имеем терм n:N и мы хотели бы указать, что это число является нечетным. В этом случае нам необходимо определить подтип типа N, допустим термом этого типа будет пара, содержащая наш изначальный терм n и свидетельство того, что это число n является нечетным. Таким образом, термом нашего нового (под-)типа нечетных натуральных чисел будет нечто вида (n, odd^{n}):odd^{N}, где odd^{n} является указанным свидетельством того, что число n является нечетным. Благодаря этому принцип, согласно которому терм имеет строго один тип, не нарушается, поскольку терм не является тем же самым термом, что n:N.

Помимо прочего, если вернуться к аксиоме выделения, можно обнаружить, что теоретико-типовой подход выполняет ряд важных требований конструктивизма как методологической позиции. Дело в том, что если формула, используемая для выделения подмножества, содержит неограниченные кванторы (связывающие переменные, пробегающие все множества), то определение нового множества может указывать на все то множество, из которого происходит выделение. В этом случае аксиома выделения оказывается импредикативной, что не совсем желательно. При конструктивистском же подходе переменные могут пробегать только ранее построенные множества, поэтому импредикативности не возникает.

Понятие функции, экстенсиональность и интенсиональность

При обычном подходе функции в рамках теории множеств (в этом, например, *наивная* теория множеств совпадает с ZF/ZFC) представляют собой множества упорядоченных пар. К примеру функция $y = \sqrt{x}$ представляет собой множество вида {(4,2), (16,4), ...}. То есть, функция из множества *A* в множество *B* представляет собой множество упорядоченных пар, каждая из которых в качестве первого элемента имеет элемент множества A, а в качестве второго элемента – элемент множества B, причем это множество упорядоченных пар выполняет условие, что если $(x, y) \in f$ и $(x, z) \in f$, то $y = z$. Таким образом, понятие равенства для функций в рамках теории множеств представляет собой равенство функций как множеств. Последнее означает, что две функции равны в том случае, если они содержат одни и те же элементы, что соответствует экстенсиональному характеру теории множеств. Такой подход в определенном смысле естественен, но в ряде случаев крайне не желателен. Проблема такого подхода к определению функций заключается в том, что в нем нет каких-либо особых ограничений на определение функций. С помощью этого подхода легко можно определить невычислимые функции, то есть такие функции, для которых не существует конечного процесса, позволяющего для произвольного значения на входе получить значение не выходе. Однако в ZF/ZFC имеется также аксиомная схема преобразования (или замещения), смысл которой состоит в том, что любое множество можно преобразовать в то же самое или другое множество *d*, высказав функциональное суждение *Ф* обо всех элементах *b* данного множества *a*. В данном случае речь идет о функции на универсуме рассуждения, которая определяется формулой (функциональным суждением *Ф*). То есть, если имеется такая формула $\Phi(x, y)$, что в ZF/ZFC доказуемо, что

1. $\forall x \exists y[\Phi(x, y)]$
2. $\forall x \forall y \forall y'[\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, y') \rightarrow y=y']$,

то имеется подстановочный случай схемы преобразования, утверждающий, что $\forall X \exists Y[\forall x \forall y(\Phi(x, y) \wedge x \in X \rightarrow y \in Y)]$.

С другой стороны, для определения функций в теории типов используется аппарат лямбда-исчисления, в котором функции определяются через манипуляции с символами. Функция как лямбда-выражение, λx.M, в этом случае может пониматься как описание операции того, как при получении аргумента, *x*, можно произвести M, где M само по себе является описанием операции, которую следует произвести над *x*. Понятие равенства функций перестает быть «простым» понятием. Например, некоторые две функции могут демонстрировать одинаковое поведение (то есть, в рамках теории множеств мы вынужденны были бы признать, что эти две функции равны), однако в то же время они могут быть описаниями *различных* операций и требовать совершенно *разных* вычислительных ресурсов. При таком подходе вычисление становится тривиальным процессом перезаписи набора символов в соответствии с определенными правилами. А при условии того, что у нас имеется «хорошая» система типов, хорошо типизированными будут только такие термы, вычисление которых будет гарантировано завершаться. Описанная ситуация не означает, что в рамках теории типов не может быть какого-то аналога экстенсиональности. Кратко экстенсиональность в современных вариантах теории типов будет описана ниже, в разделе V.

Разделы математики и редукционизм

Здание математики, по мнению ряда исследователей, может быть разделено на начальную («школьную») математику и продвинутую (настоящую, исследовательскую) математику лишь условно и скорее противоестественным образом [7]. По их мнению, математика в «вертикальном» отношении представляет собой единство. Обычно единство математики описывается как междисциплинарное единство, при котором идеи из одной «предметной» области математики оказываются полезными в других областях. Когда же речь идет о вертикальном единстве математики, то имеется в виду, что обнаруживаемые на разных «уровнях» идеи, методы и трюки либо одинаковы, либо аналогичны и структурно схожи. Возможное объяснение этого сходства с точки зрения теории множеств и с точки зрения теории типов будет различным. В теории множеств для подобного объяснения используется редукционистский подход: требуется свести все многообразие математических сущностей (интуитивных математических «типов», то есть чисел, фигур и проч.) к чему-то одному, чему-то общему и фундаментальному (а именно к понятию множества), требуется абстрагироваться от особенностей, а затем сравнить получившееся после такой редукции.

Теория типов подходит к указанному вопросу с совершенно другой стороны. Как уже было указано, в теории типов мы имеем суждение принадлежности некоторого терма некоторому типу, а также суждение о равенстве двух термов одного типа. Кроме того, при интенсиональном подходе к теории типов равенство является не только высказыванием, но также и типом, да и высказывания вообще понимаются как типы. В ГТТ же понимание равенства расширяется, равенство перестает с необходимостью быть высказыванием, оно может выражаться типом высокого порядка. В некотором смысле «структура» теории типов (в частности, ГТТ) позволяет по новому проявить идею «вертикального» единства математики. Тем не менее, эта идея проявляется не благодаря редукционизму или какой-либо сходной идее, а благодаря тому, что математические понятия, методы и способы получения математических результатов на разных «вертикальных» уровнях математики получаю сходное (аналогичное) структурное описание [8].

Обратимся вновь к отмеченному в разделе «Суждения и высказывания» разделению «материалных» и «структурных» теорий множеств и двусмысленности употребления термина принадлежности элемента множеству. Представляется, что эта двусмысленность возникает из-за редукционистского характера теории множеств. В зависимости от того, каким образом мы определяем понятие множества, «материально» или «структурно», различную интерпретацию получает и запись $a \in A$: при одном подходе эта запись представляет собой высказывание, при другом она высказыванием не является. Каждая отдельно взятая разновидность теории множеств предполагает, что все многообразие математических сущностей может быть сведено к понятию множества, что все является множеством. Предполагается, что подобный подход должен упростить работу математика, позволить ему построить все здание математического знания, исходя из базовых постулатов, определяющих понятие множества. Так, «матеральные» теории множеств (типа ZFC) предполагают, что существуют «материальные» множества, в то время как в рамках «структурных» теорий множеств (типа ETCS) речь идет о существовании «структурных» множеств и функций между ними. Эти два вида сущностей, несмотря на то, что они представляют собой множества, ведут себя по-разному. Однако гораздо хуже то, что они предполагают несовместимые интерпретации формализмов, причем эти две различных интерпретации вполне сосуществуют на интуитивном уровне математической практики. Выбор «материального» подхода в теории множеств вынуждает исследователя изворачиваться и интерпретировать «структурное» отношение принадлежности «материальным» образом и наоборот в случае выбора «структурного» подхода.

Редукционизм теоретико-множественного подхода играет с исследователем злую шутку: стремление к простоте и единству математических сущностей по их глубинной природе приводит к фактическому обеднению последней. Математические объекты, прошедшие через «прокрустово ложе» теории множеств теряют свои особенные черты, интерпретация оказывается либо двусмысленной, либо технически перегруженной. Порой редукционизм работает, интуитивным и естественным оказывается то «материальный», то «структурный» подход, а порой ни тот, ни другой. К примеру, упомянутый М. Шульман указывает, что для кодирования булеана (множества всех подмножеств данного множества) более естественным представляется «материальный» подход (в ZTC элементы булеана натуральных чисел являются подмножествами множества натуральных чисел, а в ETCS элементы булеана натуральных чисел являются не подмножествами, а кодами подмножеств множества натуральных чисел), а для кодирования натуральных чисел — «структурный» (в ETCS множество натуральных чисел содержит 0 и функцию N→N, в ZFC же натуральные числа задаются как множества, что приводит к вопросам в духе П. Бенасеррафа [9] и соответствующим эпистемическим затруднениям). Понятие же функции как множества оказывается проблематичным (читай: неестественным) как при том, так и при другом подходе.

IV. Прагматическая мотивация для теории типов как оснований математики

Современная математика стала очень сложной научной дисциплиной. Связано это прежде всего с нарастанием специализации внутри самой математики и возникновением большого количества малых специальных «поддисциплин». Кроме того, в математике сами результаты становятся все более сложными. Правда, сложность эта скорее не теоретическая, а «практическая», связанная с отсутствием математической красоты в смысле простоты и элегантности в этих результатах (доказательства просто напросто становятся чересчур огромными, а их обозримость для человека – проблематичной). В качестве примеров можно указать следующие результаты:

- теорема Н. Робертсона и П. Сеймура из теории графов, доказательство которой занимает около 500 страниц, и которое было опубликовано в виде серии статей по 20 страниц каждая;
- теорема Ф. Олмгрена из геометрической теории измерений, доказательство которой занимает чуть более 900 страниц, и проверка которого велась около 20 лет;

• доказательство Т. Хэйлсом упрощенного варианта гипотезы И. Кеплера об оптимальной упаковке сфер, для которого потребовалось решить около 100000 задач линейного программирования, само доказательство занимает около 300 страниц, а его «компьютерная» часть представляет собой 50000 строк исходного кода (в 2006 г. это число было уменьшено до 15000 строк кода).

После нескольких месяцев «полузакрытого» обсуждения в 1994 г., одним из ключевых инициаторов которого выступил Р. Бойер, был опубликован «Манифест QED» [10], а также проведено две конференции по проекту QED. Этот манифест представляет собой краткое описание современного состояния математики и ключевых проблем, как математического знания в целом, так и отношений последнего с культурой и обществом. В первую очередь в манифесте указывается возрастание сложности математики. Кроме того, согласно этому манифесту, требуется реформировать обучение математике (оно должно стать интерактивным), разработать инструменты для значительного снижения «белого шума» в математических публикациях, сделать доступным широкой публике «эзотерический фольклор» исследовательских групп (знание не отраженное в учебниках, а передаваемое непосредственно от учителя ученикам). Основной же культурной целью проекта QED было названо сохранение математического знания в новые «темные времена». Указанные в манифесте проблемы предлагается решить путем формализации математики с помощью вычислительной техники, математика должна стать формальной, неформальная же математика (то есть, математика не записанная с помощью специального формального языка, позволяющего выполнить проверку доказательства на вычислительной машине), как следует из манифеста, исчезнет. Для этого требуется разработать «корневую логику», которая, с одной стороны, была бы сравнительно небольшой (ядро должно описываться с помощью 2 страниц математического текста), а с другой стороны, достаточно гибкой, чтобы ее можно было легко расширить до обычной классической логики, конструктивистской логики или добавить к ней какие-то новые методы доказательства. По сути эта «корневая логика» должна быть скорее похожа на геделеву логику высокого порядка, примитивную рекурсивную арифметику Т. Сколема или лямбда-исчисление в духе Н. де Брёйна. Однако несмотря на столь яркое начало проект QED практически прекратил свой развитие.

Широкое распространение идей QED оказалось невозможным. В своей статье 2007 г. Ф. Вийдик [11] предлагает резюме трудностей, с которыми столкнулся проект QED. Во-первых, следует согласиться с тем, что формализация дает уверенность в корректности математического результата. Однако два других свойства математического знания, а именно простота и красота, уже содержатся в математическом результате до его формализации, поэтому формализация помимо дополнительной уверенности вроде бы особой ценности не несет. Кроме того, формализация не добавляет какого-либо нового понимания математического результата, и она не приводит к упрощению коммуникации между математиками, поскольку от работающих математиков требуется заново «научиться читать» математические результаты, которые при подходе в духе QED записываются в виде исходного кода. Кроме того, Ф. Вийдик полагает, что идеи QED не получили распространения из-за недостаточного развития вспомогательных инструментов, используемых для построения формализованных доказательств на компьютерах. Также, по его мнению, для работающих математиков требуется скорее классическая логика и возможность построения доказательств в декларативном стиле программирования, в большинстве же существующих интерактивных средств для доказательства теорем используется конструктивная логика (конечно, она может быть расширена до классической, но это создает некоторые неудобства), а доказательства записываются в процедурном стиле. Тем не менее, говорить о крахе проекта QED неправомерно. Проект QED в той или иной форме продолжает развиваться в рамках академических сообществ, а будущее формальной математики оценивается весьма оптимистично.

Идеи, стоящие за проектом QED в свете настоящего обсуждения можно подытожить следующим образом. «Святая вера» в теорию множеств как основания математики должна быть реформирована, для оснований математики требуется новый «символ веры», который замечательным образом описывается термином Р. Харпера «вычислительное триединство» (что по сути является соответствием Карри – Говарда – Ламбека и наилучшим образом проявляется в современной теории типов). Согласно этой доктрине вычисление едино, но оно манифестирует себя в трех формах:

1. Логика, где мы имеем дело с высказываниями и доказательствами.
2. Программирование, где высказываниям соответствуют типы, и доказательствам – функции.

3. Категории, где мы имеем операцию (-1)-обрезания для «превращения» высших типов в типы-высказывания, а также обобщенные элементы, которые соответствуют доказательствам как функциям.

V. Современное состояние теории типов как оснований математики

Для того, чтобы иметь возможность говорить о теории типов как теории, предоставляющей нам основания математики, важным оказывается вопрос о том, можно ли выразить теорию множеств с помощью теории типов. Отношения между теорией множеств и теорией типов не являются в каком-либо смысле тривиальными. Следует, правда, отметить, что перевести теорию типов в теорию множеств не так уж и сложно, такой перевод вполне интуитивен. Для этого следует к типам относиться как к множествам, а понятие функции, как оно используется в теории типов, заменить на определение функции в рамках теории множеств (то есть, определения функций через лямбда-выражения следует заменить на функциональные отношения или, другими словами, множества пар, троек и т. д.). При такой интерпретации тип предикатов будет соответствовать булеану. В случае же перевода теории множеств в теорию типов мы имеем дело с несколько более сложной ситуацией. В этом случае множества следует понимать как корневой граф, где стрелка представляет собой отношение принадлежности.

Если возвращаться в вопросу о высказываниях, то, как было указано выше, в теории типов всякий тип представляет собой высказывание утверждающее, что этот тип заселен. Однако в рамках ГТТ [12] методологический принцип, который обычно носит название доктрины «высказывания-как-типы», больше не «работает». Сама по себе доктрина «высказывания как типы» представляет собой нечто вроде неформальной семантики. В ГТТ же ее место занимает доктрина «высказывания-как-некоторые-типы», которая является геометрической идеей. При гомотопическом подходе в теории типов высказывания отождествляются с особыми типами. Точнее типы рассматриваются как гомотопические типы (∞-группоиды или как геометрические гомотопические типы), но не все типы рассматриваются как высказывания. Высказывания в ГТТ представляют собой (-1)-типы. То есть, под высказываниями понимаются типы, чьи термы не различаются (такой тип либо пуст, либо содержит не более одного терма). Причем, любой тип при помощи (-1)-обрезания можно «свести» к типу-высказыванию.

В отличие от других вариантов теории типов в ГТТ имеется аксиома унивалентности (согласно которой равенство двух типов гомотопически эквивалентно их гомотопической эквиваленции), а также высшие индуктивные типы (благодаря чему конструкторы могут порождать не только термы определенного типа, но и термы соответствующего типа равенств). Благодаря выразительной мощи с помощью ГТТ оказывается возможным построение унивалентных оснований (УО) математики.

В ГТТ уже намного проще можно выразить математические понятия, для которых требуется экстенсиональность (соответственно, можно проще представить теорию множеств). Благодаря аксимое унивалентности в ГТТ имеется экстенсиональность для функций. С одной стороны это является важным преимуществом, поскольку существенным образом увеличивает выразительность. Тем не менее, в настоящее время аксиома унивалетности пока не имеет вычислительной интерпретации. В остальном же ГТТ наследует вычислительные свойства интенсиональной теории типов Мартина-Лёфа (соотвтственно, ГТТ по сути является конструктивной, но ее можно расширить до уровня классической математики путем добавления новых аксиом).

С помощью ГТТ уже представлены действительные числа по Коши и по Дедекинду[8], а также (по меньшей мере, фрагменты) теория гомотопий, теория категорий и теория множеств. ГТТ и УО представляют собой бурно развивающиеся проекты, имеющие интересные перспективы. Более того, фрагменты ГТТ реализованы с помощью таких интерактивных средств доказательств как *Coq* и *Agda,* что позволяет использовать ГТТ в качестве «практических» («вычислительных») оснований математики, можно выстраивать систему математического знания с самих основ при помощи вычислительной техники. Тем не менее, гораздо более важным и интересным представляется то, что по сути ГТТ является интерпретацией интуиционистской теории типов П. Мартина-Лёфа с помощью топологической алгебры, что вновь привносит в понимание математики геометрические идеи, отражаемые в программе универсальной характеристики Г.В. Лейбница.

Литература

1. *Ferreiros J.* Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics. – Berlin: Birkhäuser, 2007.

[8] См. также [13].

2. *Jacobs B.* Categorical Logic and Type Theory. – Amsterdam: Elsevier, 1999.

3. *Lawvere W.* An Elementary Theory of the Category of Sets // Proceedings of the National Academy of Science of the USA. - 1956. - pp.1506-1511.

4. *Martin-Löf P.* Intuitionistic Type Theory. – Napoli: Bibliopolis, 1984.

5. *Shulman M.* From Set Theory to Type Theory // The n-Category Cafe. URL: https://golem.ph.utexas.edu/category/2013/01/from_set_theory_to_type_theory.html [Дата обращения 10.10.2016].

6. *Целищев В.В*. Философия математики. Ч.1. – Новосибирск: Наука, 2002 .

7. *Borovik A.* What Is It That Makes a Mathematician? // URL: http://www.maths.manchester.ac.uk/~avb/pdf/WhatIsIt.pdf [Дата обращения: 10.10.2016].

8. *Corfield D*. Homotopy Type Theory and the Vertical Unity of Mathematics // forthcoming. URL: http://philsci-archive.pitt.edu/12100/1/vertical.pdf [Дата обращения: 10.10.2016].

9. *Benacerraf P.* What Numbers Could Not Be // The Philosophical Review. – 1965. – Vol. 74, No. 1. – P. 47–73.

10. *The QED Manifesto* // Automated Deduction – CADE 12. – Springer-Verlag, 1994 – P. 238–251.

11. *Wiedijk F.* The QED Manifesto Revisited // Studies in Logic, Grammar and Rhetoric. – Vol. 10, No. 23. – 2007. – P. 121–133.

12. *Homotopy* Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. – 2013. – URL: https://homotopytypetheory.org/book/ [Дата обращения: 10.10.2016].

13. *Lubarsky R., Rathjen M.* On the Constructive Dedekind Reals // Proceedings of LFCS 2007 / ed. by S. N. Artemov and A. Nerode. – Dordrecht: Springer, 2007. – P. 349–362.

Информация об авторе

Ламберов Лев Дмитриевич – доцент кафедры онтологии и теории познания Института социальных и политических наук, Уральский федеральный университет (620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51, ком. 332, e-mail: lev.lamberov@urfu.ru)

Information about the author

Lamberov Lev Dmitrievich – Ural Federal University (620000, 51, av. Lenin, Ekaterinburg, Russia, e-mail: lev.lamberov@urfu.ru)

Дата поступления 13.10.2016