УДК 539.375

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД И ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТРИЦ

С. Лангер, С. А. Назаров*, М. Шпековиус-Нойгебауер

Университет г. Кассель, 34132 Кассель, Германия
* Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург
E-mail: serna@snark.ipme.ru

Вводится понятие классов алгебраически эквивалентных анизотропных трехмерных сред — упругие поля в таких средах связаны простыми алгебраическими соотношениями. Получена явная формула для фундаментальной матрицы при десяти свободных константах в тензоре упругих модулей (а не при пяти, как в известном случае трансверсальной изотропии). Сформулирована гипотеза и поставлено несколько вопросов, связанных с обсуждаемым понятием алгебраической эквивалентности.

Ключевые слова: аффинное преобразование, трехмерная система уравнений теории упругости, фундаментальная матрица.

1. Аффинные преобразования в теории упругости. В работе [1] построена фундаментальная матрица F (тензор Кельвина) в случае однородной трансверсально-изотропной среды, которая характеризуется пятью свободными константами в тензоре упругих модулей (или семью при учете вращений декартовой системы координат). На протяжении пятидесяти лет количество свободных констант в явной формуле для F не было увеличено, несмотря на попытки развить предложенный в [1] метод или применить другие подходы (см. [2, 3] и др.). Разумеется, доступно представление матрицы F посредством прямого и обратного преобразований Фурье, однако явной полученную таким способом формулу назвать нельзя и, более того, ее применение в вычислительных схемах (например, для создания и решения граничных интегральных уравнений) весьма проблематично, так как добиться приемлемой точности численного обращения преобразования Фурье очень трудно. В данной работе, в частности, получена формула для фундаментальной матрицы, допускающая

$$10 = 5 + (9 - 1 - 3) \tag{1.1}$$

свободных констант в тензоре упругих модулей. Здесь 5 — число таких констант в случае трансверсально-изотропного материала; 9 — количество элементов невырожденной 3×3-матрицы

$$m = (m_{jk})_{j,k=1,2,3}; \tag{1.2}$$

вычитаемое 1 учитывает условие нормировки

$$\det m = 1; \tag{1.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00567) и гранта DFG.

вычитаемое 3 обусловлено возможными поворотами декартовой системы координат. Иными словами, имея в распоряжении фундаментальную матрицу $F(x)$, посредством аффинного преобразования координат

$$x \mapsto \boldsymbol{x} = mx \tag{1.4}$$

строим новую матрицу-функцию

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (m^{\text{т}})^{-1} F(m^{-1}\boldsymbol{x}) m^{-1} \tag{1.5}$$

и убеждаемся в том, что она является фундаментальной для некоторой новой упругой анизотропной среды. При этом тензор упругих модулей для последней находится при помощи простых алгебраических операций над исходным тензором (см. п. **2**). В формулах (1.4), (1.5) и далее полужирным шрифтом выделены величины в преобразованных координатах.

Применение аффинных преобразований в теории упругости основано на двух наблюдениях. Во-первых, любой учебник по теории дифференциальных уравнений в частных производных начинается с описания процедуры приведения уравнений второго порядка к канонической форме. В частности, замена координат (1.4) переводит скалярный дифференциальный оператор $\nabla_x^{\text{т}} a \nabla_x$ в лапласиан $\Delta_x = \nabla_x^{\text{т}} \nabla_x$, где ∇_x — столбец $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)^{\text{т}}$; m — корень из симметрической положительно определенной числовой матрицы a^{-1} размером 3×3. Во-вторых, вопрос о приведении к канонической форме матричного оператора системы уравнений теории упругости становится логичным после перехода в фиксированной системе декартовых координат к столбцам смещений $u = (u_1, u_2, u_3)^{\text{т}}$, а также к столбцам деформаций и напряжений высотой 6:

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \alpha^{-1}\varepsilon_{23}, \alpha^{-1}\varepsilon_{31}, \alpha^{-1}\varepsilon_{12})^{\text{т}}; \tag{1.6}$$

$$\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \alpha^{-1}\sigma_{23}, \alpha^{-1}\sigma_{31}, \alpha^{-1}\sigma_{12})^{\text{т}}. \tag{1.7}$$

Подобная форма записи была предложена в 30-х гг. прошлого столетия С. Г. Лехницким (см., например, [4]) и доработана в [5]. Так, множители $\alpha^{-1} = \sqrt{2}$, добавленные в формулу (1.6), уравнивают естественные нормы столбца и тензора деформаций (сказанное относится и к напряжениям (1.7)). Следовательно, замене координат (1.4) с ортогональной матрицей (1.2) отвечают ортогональные преобразования столбцов (1.6), (1.7) (см. [5, § 2.1] и п. **3**). Связь

$$\varepsilon = D(\nabla_x) u$$

столбцов смещений и деформаций теперь реализуется при помощи 6×3-матрицы $D(\nabla_x)$ дифференциальных операторов первого порядка,

$$D(\nabla_x)^{\text{т}} = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha\partial_3 & \alpha\partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \alpha\partial_3 & 0 & \alpha\partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \alpha\partial_2 & \alpha\partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{1.8}$$

а закон Гука принимает вид

$$\sigma = A\varepsilon, \tag{1.9}$$

где A — симметрическая положительно определенная матрица размером 6×6, элементы которой пропорциональны компонентам тензора упругих модулей (подробнее см. в [5, § 2.1]). Именно манипуляции с матрицами A и $D(\nabla_x)$ при аффинном преобразовании (1.4) позволяют получить формулу (1.5) для фундаментальной матрицы (см. далее п. **4**). Кроме того, в п. **3** вводится и обсуждается понятие алгебраически эквивалентных сред, для которых пересчет напряженно-деформированных состояний производится путем умножения на подходящие матрицы.

Для плоской задачи теории упругости указанные преобразования использовались в [6–8] для различных целей. Вопрос о фундаментальных матрицах в этих работах, конечно же, не ставился, поскольку такие матрицы известны при любой анизотропии плоской среды (см. [9] и др.). Вместе с тем классификация систем уравнений двумерной теории упругости была произведена полностью: в [7] окончательно установлено, что любая анизотропная двумерная среда алгебраически эквивалентна ортотропной среде с осью симметрии четвертого порядка и дополнительным соотношением $A_{11} \geqslant A_{12} + A_{33}$. В пространственном случае подобного заключения сделать не удалось, и в п. **4** авторы только выдвигают гипотезу о простейших представителях всех анизотропных трехмерных сред.

2. Матричная запись задачи теории упругости и преобразования. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — тело с кусочно-гладкой границей ∂G, на которое действуют массовые силы f. На части T поверхности ∂G зададим усилия g, а на части $S = \partial G \setminus \overline{T}$ — внешние смещения h. Одно из множеств S или T может быть пустым, а в случае $G = \mathbb{R}^3$ — оба. Прямые вычисления (см. [5, § 2.1]) показывают, что соответствующая задача теории упругости записывается при помощи обозначений (1.6)–(1.9) следующим образом:

$$D(-\nabla_x)^{\mathrm{T}} A D(\nabla_x) u(x) = f(x), \qquad x \in G; \tag{2.1}$$

$$D(n(x))^{\mathrm{T}} A D(\nabla_x) u(x) = g(x), \quad x \in T, \qquad u(x) = h(x), \quad x \in S. \tag{2.2}$$

Здесь $n(x)$ — единичный вектор внешней нормали в точке $x \in \partial G$.

После замены координат (1.4) множества G, T и S переходят в множества $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$ соответственно; например, $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{x}\colon m^{-1}\boldsymbol{x} \in G\}$. Единичный вектор (столбец) $\boldsymbol{n}$ нормали к поверхности $\partial\boldsymbol{G}$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = |(m^{\mathrm{T}})^{-1} n(m^{-1}\boldsymbol{x})|^{-1} (m^{\mathrm{T}})^{-1} n(m^{-1}\boldsymbol{x}), \tag{2.3}$$

где $|v| = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}$ — длина столбца $v \in \mathbb{R}^3$.

На области $\boldsymbol{G}$ введем четыре столбца и симметрическую положительно определенную матрицу

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (m^{\mathrm{T}})^{-1} u(m^{-1}\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = m f(m^{-1}\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = (m^{\mathrm{T}})^{-1} h(m^{-1}\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = |(m^{\mathrm{T}})^{-1} n(m^{-1}\boldsymbol{x})|^{-1} m g(m^{-1}\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{A} = M A M^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где вспомогательная матрица M размером 6×6 конструируется из элементов матрицы (1.2) и имеет вид

$$\begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 & m_{13}^2 & \sqrt{2}\, m_{12}m_{13} & \sqrt{2}\, m_{11}m_{13} & \sqrt{2}\, m_{11}m_{12} \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 & m_{23}^2 & \sqrt{2}\, m_{22}m_{23} & \sqrt{2}\, m_{21}m_{23} & \sqrt{2}\, m_{21}m_{22} \\ m_{31}^2 & m_{32}^2 & m_{33}^2 & \sqrt{2}\, m_{32}m_{33} & \sqrt{2}\, m_{31}m_{33} & \sqrt{2}\, m_{31}m_{32} \\ \sqrt{2}\, m_{21}m_{31} & \sqrt{2}\, m_{22}m_{32} & \sqrt{2}\, m_{23}m_{33} & m_{23}m_{32} + m_{22}m_{33} & m_{23}m_{31} + m_{21}m_{33} & m_{22}m_{31} + m_{21}m_{32} \\ \sqrt{2}\, m_{11}m_{31} & \sqrt{2}\, m_{12}m_{32} & \sqrt{2}\, m_{13}m_{33} & m_{13}m_{32} + m_{12}m_{33} & m_{13}m_{31} + m_{11}m_{33} & m_{12}m_{31} + m_{11}m_{32} \\ \sqrt{2}\, m_{11}m_{21} & \sqrt{2}\, m_{12}m_{22} & \sqrt{2}\, m_{13}m_{23} & m_{13}m_{22} + m_{12}m_{23} & m_{13}m_{21} + m_{11}m_{23} & m_{12}m_{21} + m_{11}m_{22} \end{pmatrix}.$$

Этот объект появляется в результате замены переменных в дифференциальном операторе (1.8), а именно:

$$D(\nabla_x) = M^{\mathrm{T}} D(\nabla_{\boldsymbol{x}}) (m^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{2.5}$$

Аналогичная матрица (без множителей $\sqrt{2}$) указана в [4, § 1.5] в связи с пересчетом компонент тензоров деформаций и напряжений при поворотах осей декартовых координат, однако произвольные аффинные преобразования в [4] не анализировались.

Согласно соотношениям (2.3)–(2.5) в новых координатах $\boldsymbol{x}$ смешанная краевая задача (2.1), (2.2) выглядит следующим образом:

$$D(-\nabla_{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} D(\nabla_{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G}; \tag{2.6}$$

$$D(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}D(\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{T}, \qquad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}. \tag{2.7}$$

Ключевым моментом данной работы является сохранение структуры матричных дифференциальных операторов в задаче (2.6), (2.7).

Если известно решение задачи (2.6), (2.7) для материала с матрицей упругих модулей $\boldsymbol{A}$, то упругие поля в задаче (2.1), (2.2) для материала с матрицей A восстанавливаются по формулам

$$\begin{gathered} u(x) = m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(mx), \\ \varepsilon(x) = M^{\mathrm{T}}D(\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=mx}, \qquad \sigma(x) = M^{-1}\boldsymbol{A}D(\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=mx}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Подчеркнем особо, что система уравнений (2.6) и краевые условия (2.7) не являются результатом перезаписи задачи теории упругости (2.1), (2.2) с использованием физических компонент вектора смещений и тензоров деформаций и напряжений в новой неортогональной системе координат $\boldsymbol{x}$. При таком преобразовании структура дифференциальных операторов изменяется и они не выражаются через матрицу $D(\nabla_{\boldsymbol{x}})$ (исключение составляет рассмотренный в [4] случай ортогональной матрицы m, описывающей вращение декартовой системы координат x). Иными словами, столбцы $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ и $D(\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{A}D(\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ нельзя интерпретировать как физические поля, относящиеся к вектору смещений и тензорам деформаций и напряжений, — их следует рассматривать как вспомогательные объекты, позволяющие вычислить реальные упругие поля.

Краевая задача (2.6), (2.7) по-прежнему представляет собой задачу теории упругости, однако упругому материалу отвечает матрица $\boldsymbol{A}$ из формулы (2.3). Связь (2.8) решений задач (2.1), (2.2) и (2.6), (2.7) позволяет говорить об алгебраической эквивалентности упругих сред, задаваемых матрицами A и $\boldsymbol{A}$. Выводы, следующие из этого наблюдения, обсуждаются ниже.

Примечателен тот факт, что вместе с системой уравнений "правильно" преобразуются и краевые условия (2.2) в напряжениях и смещениях. Третье краевое условие (на поверхности заданы нормальное смещение и касательные напряжения) искажается при указанных заменах, поскольку в общем случае аффинное преобразование изменяет углы. Условия сопряжения в задаче о деформации кусочно-однородного тела $G = G^+ \cup G^-$ наследуются при переходе к телу $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}^+ \cup \boldsymbol{G}^-$ лишь в том случае, если замена координат (1.4) является общей для обоих частей составного тела. Предложенный подход не годится для спектральных, а значит, и для динамических задач, так как после замен (1.4) и (2.8) система

$$D(\nabla_x)^{\mathrm{T}}AD(\nabla_x)u(x) = \lambda\rho u(x), \qquad x \in G,$$

принимает вид

$$D(\nabla_{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}D(\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = mm^{\mathrm{T}}\lambda\rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G},$$

однако содержит матрицу mm^{T}, которая превращается в единичную только при ортогональной матрице m.

3. Классы алгебраически эквивалентных упругих сред. Вычисляя определитель матрицы M, обнаруживаем, что ввиду условия (1.3)

$$\det M = (\det m)^4 = 1. \tag{3.1}$$

Перемножение матриц M^1 и M^2, отвечающих двум аффинным преобразованиям m^1 и m^2, устанавливает свойство

$$m = m^1m^2 \qquad \Rightarrow \qquad M = M^1M^2. \tag{3.2}$$

Поскольку $M = \mathbb{I}_6$ при $m = \mathbb{I}_3$ ($\mathbb{I}_n$ — единичная матрица размером $n \times n$), высказывание (3.2) гарантирует, что

$$m \mapsto M \qquad \Rightarrow \qquad m^{-1} \mapsto M^{-1}. \tag{3.3}$$

Укажем еще один очевидный факт:

$$m \mapsto M \qquad \Rightarrow \qquad m^{\mathrm{T}} \mapsto M^{\mathrm{T}}.$$

Отсюда и из соотношения (3.2) следует, что ортогональной 3×3-матрице m отвечает ортогональная 6×6-матрица M. Без введения в определения (1.6), (1.7) и (1.8) множителей α и α^{-1} последнее утверждение неверно.

Согласно предположению (1.3) и свойствам (3.1)–(3.3) отображение $m \mapsto M$ реализует группу $\mathfrak{N}_3$ как подгруппу $\mathfrak{M}$ группы $\mathfrak{N}_6$; при этом $\mathfrak{N}_n$ — группа (относительно произведения) $n \times n$-матриц с единичным определителем. Симметрические матрицы размером 6×6 формируют линеал $\mathfrak{S}$ (относительно сложения и умножения на скаляры), а положительно определенные — выпуклый открытый конус $\mathfrak{S}_+$ в нем. При фиксированной матрице $M \in \mathfrak{N}_6$ отображение $A \mapsto M^{\mathrm{T}}AM$ оказывается изоморфизмом в $\mathfrak{S}$, сохраняющем положительную определенность. Таким образом, благодаря свойствам (3.1)–(3.3) подгруппа $\mathfrak{M}$ для каждого элемента $A \in \mathfrak{S}_+$ определяет класс $\mathfrak{m}(A) \subset \mathfrak{S}_+$ эквивалентных ему элементов, т. е. для всякого $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{m}(A)$ найдется такой элемент $M \in \mathfrak{M}$, что $\boldsymbol{A} = M^{\mathrm{T}}AM$. Среды с матрицами упругих модулей A^1 и A^2 называются алгебраически эквивалентными, если $A^1 \in \mathfrak{m}(A^2)$ или, что равнозначно в силу (3.3), $A^2 \in \mathfrak{m}(A^1)$.

4. Примеры и гипотеза. Введенное отношение эквивалентности естественным образом переносится на совокупности матриц из $\mathfrak{S}_+$. Пусть $\mathfrak{L}_+$ и $\mathfrak{K}_+$ — семейства матриц, описывающих соответственно трансверсально-изотропные и ортотропные среды. Вместо матриц жесткости, входящих в эти классы, удобно оперировать с матрицами податливости L и K (обратными матрицами жесткости), которые согласно [4] имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & 0 & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{11} & l_{13} & 0 & 0 & 0 \\ l_{13} & l_{13} & l_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{66} \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{66} \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

причем

$$l_{66} = 2(l_{11} - l_{12}), \tag{4.2}$$

а элементы k_{pq} выражаются через технические постоянные следующим образом:

$$\begin{gathered} k_{pp} = E_p^{-1}, \qquad k_{3+p,3+p} = G_p^{-1}, \qquad p = 1,2,3, \\ k_{pq} = -\nu_{pq}E_p^{-1}, \qquad p,q = 1,2,3,\ p \neq q. \end{gathered} \tag{4.3}$$

В (4.3) G_p — модули сдвига; E_p и ν_{pq} — модули Юнга и коэффициенты Пуассона, подчиненные трем условиям

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2, \qquad \nu_{13}E_3 = \nu_{31}E_1, \qquad \nu_{32}E_2 = \nu_{23}E_3.$$

Найдем семейство ортотропных сред, которые связаны с трансверсально-изотропными средами при помощи аффинного преобразования (1.4) с диагональной матрицей

$$m^\mu = \operatorname{diag}\{\mu, \mu^{-1}, 1\}. \tag{4.4}$$

В силу последней формулы (2.4) матрица податливости $L \in \mathfrak{L}_+$ из (4.1) после аффинного преобразования принимает вид $M^{-1}LM^{-1}$, где M — диагональная матрица

$$M = \operatorname{diag}\{\mu^2, \mu^{-2}, 1, \mu^{-1}, \mu, 1\}.$$

Следовательно, равенство $K = M^{-1}LM^{-1}$ выполняется в том случае, если

$$k_{11} = \mu^{-4}l_{11},\ k_{22} = \mu^4 l_{11}, \quad k_{13} = \mu^{-2}l_{13},\ k_{23} = \mu^2 l_{13}, \quad k_{44} = \mu^2 l_{44},\ k_{55} = \mu^{-2}l_{44}; \qquad (4.5)$$

$$k_{12} = l_{12}, \quad k_{33} = l_{33}, \quad k_{66} = l_{66} = 2(l_{11} - l_{12}). \qquad (4.6)$$

Ввиду соотношений (4.3) уравнения (4.5) разрешимы относительно l_{11}, l_{13}, l_{44} тогда и только тогда, когда величина μ^4 совпадает со следующими равными между собой соотношениями

$$\frac{\nu_{13}}{\nu_{23}} = \frac{G_2}{G_1} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}.$$

При решении уравнений (4.6) возникает еще одно ограничение

$$2\sqrt{E_1E_2} = E_1E_2G_3^{-1} - \nu_{12}E_2 - \nu_{21}E_1.$$

Полученная ортотропная среда обладает шестью $(9 - 3 = 5 + 1)$ свободными константами, но для нее фундаментальная матрица определяется по формуле из [1], измененной в соответствии с определениями (1.5) и (4.4). Увеличить еще на единицу количество свободных констант посредством диагональной матрицы m не удается потому, что при $n^\rho = \operatorname{diag}\{\rho, \rho, \rho^{-2}\}$ аффинное преобразование (1.4) превращает матрицу податливости L из формулы (4.1) в матрицу

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_{11}\rho^{-4} & l_{12}\rho^{-4} & l_{13}\rho^2 & 0 & 0 & 0 \\ l_{12}\rho^{-4} & l_{11}\rho^{-4} & l_{13}\rho^2 & 0 & 0 & 0 \\ l_{13}\rho^2 & l_{13}\rho^2 & l_{33}\rho^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{44}\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{44}\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{66}\rho^{-4} \end{pmatrix}. \qquad (4.7)$$

Любая диагональная 3×3-матрица с единичным определителем представима в виде $m^\mu n^\rho$, а для элементов в (4.7) по-прежнему сохраняется связь (4.2). За счет выбора параметра ρ можно добиться, чтобы у полученной трансверсально-изотропной среды с матрицей (4.7) оказались одинаковыми все три модуля Юнга или все три модуля сдвига.

Вернемся к рассмотрению сред без свойств симметрии. Равенство

$$21 - 3 = 13 + (9 - 1 - 3) \qquad (4.8)$$

позволяет высказать следующую гипотезу:

$$\mathfrak{S}_+ = \mathfrak{m}(\mathfrak{P}_+), \qquad (4.9)$$

где $\mathfrak{P}_+$ — класс матриц упругих модулей для моноклинных сред. Иными словами, для всякой матрицы A найдутся матрица m и аффинное преобразование (1.4), наделяющие среду с матрицей $\boldsymbol{A}$ плоскостью П упругой симметрии. Таким образом, вместо решения задачи (2.1), (2.2) для произвольно-анизотропного тела G достаточно решить задачу (2.6), (2.7) для материала, обладающего названной дополнительной симметрией. Положение плоскости П определяется матрицей A, но не геометрией тела G, однако если по счастливому стечению обстоятельств оказалось, что $\boldsymbol{G}$ — цилиндр с осью, перпендикулярной плоскости П, то упрощающие алгебраические преобразования можно продолжить и свести независимо антиплоскую задачу к изотропной, а плоскую — к ортотропной с осью симметрии четвертого порядка (см. [6, 7]).

В формуле (4.8) 21 — число элементов симметрической 6×6-матрицы, расположенных выше главной диагонали, 9, 3 и 1 имеют тот же смысл, что и в равенстве (1.1), а 13 — число свободных констант в матрице A для среды с какой-либо плоскостью упругой симметрии.

Кроме простого подсчета (4.8) свободных констант, авторы не знают аргументов, подтверждающих справедливость гипотезы (4.9). Заметим, что в двумерной ситуации $6-1=3+(4-1-1)$, где 6 — общее число свободных констант; слагаемое 3 учитывает модуль Юнга $E_1=E_2$, коэффициент Пуассона $\nu_{12}=\nu_{21}$ и модуль сдвига G для специфической ортотропной среды; вычитаемое 1 соответствует повороту в плоскости, а в самом конце формулы — условие нормировки (1.3) (см. [6, 7]).

5. Некоторые инварианты аффинных преобразований упругих сред. Поскольку элементы объема и площади поверхности до и после аффинного преобразования находятся в отношениях

$$dx=|\det m|^{-1}d\boldsymbol{x}=d\boldsymbol{x},\qquad ds_x=|(m^{\mathrm{T}})^{-1}n(m^{-1}\boldsymbol{x})|\,ds_{\boldsymbol{x}},$$

формулы перехода (2.4) устанавливают совпадение функционалов потенциальной энергии деформации (упругая энергия минус работа внешних сил) в задачах (2.1), (2.2) и (2.6), (2.7):

$$(1/2)(AD(\nabla_x)u,D(\nabla_x)u)_G-(u,f)_G-(u,g)_S+(AD(\nabla_x)u,h)_T=$$
$$=(1/2)(\boldsymbol{A}D(\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u},D(\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{G}}-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{G}}-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{g})_{\boldsymbol{S}}+(\boldsymbol{A}D(\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})_{\boldsymbol{T}}\,.$$

Здесь $(\ ,\ )_\Xi$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(\Xi)$. Итак, потенциальная и упругая энергии, а значит, и работа внешних сил инвариантны относительно аффинных преобразований. В работе [8] обнаружены и другие инварианты аффинных преобразований плоских упругих сред, востребованные в механике разрушения.

Если $G=\mathbb{R}^3$ и $f^j(x)=\delta(x)e^j$, где δ — функция Дирака и e^j — орт оси x_j, то решение $F^j(x)$ системы уравнений (2.1) становится столбцом фундаментальной матрицы $F(x)$. При любой гладкой правой части f с компактным носителем решение u, исчезающее на бесконечности, находится по формуле

$$u(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}F(x-y)^{\mathrm{T}}f(x)\,dx.$$

Аналогичная формула верна и для соответствующего решения $\boldsymbol{u}$ системы уравнений (2.6). Полагая в этих формулах $y=0$ и $\boldsymbol{y}=0$ и учитывая соотношения (2.4), приходим к тождеству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}F(x)^{\mathrm{T}}f(x)\,dx=u(0)=(m^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{u}(0)=(m^{\mathrm{T}})^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}mf(m^{-1}\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(m^{-1}x)m^{-1})^{\mathrm{T}}f(x)\,dx.$$

В последнем переходе сделаны простые алгебраические преобразования и обратная замена координат (1.4). Теперь, варьируя вектор-функцию f, подтверждаем связь (1.5) фундаментальных матриц $F(x)$ и $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$. Точно такое соотношение связывает матрицы Грина для задач (2.1), (2.2) и (2.6), (2.7).

Итак, для анизотропных сред с матрицей $\boldsymbol{A}$ упругих модулей из класса эквивалентности $\mathfrak{m}(\mathfrak{L})$ результаты [4] и простые алгебраические выкладки, учитывающие соотношение (1.5), дают явную формулу для фундаментальной матрицы $\boldsymbol{F}$. К сожалению, остался открытым вопрос об описании класса матриц $\mathfrak{m}(\mathfrak{L})$, которые порождают среды, алгебраически эквивалентные трансверсально-изотропным. Как уже пояснялось в п. **1**, этому классу отвечают десять свободных констант.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kröner E.** Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen // Zeitschrift für Physik. 1953. Bd. 136. S. 402–410.
2. **Шеремет В. Д.** Фундаментальные решения некоторых задач теории упругости // Изв. вузов. 1988. № 11. С. 141–146.
3. **Nakamura G., Tanuma K.** A formula for the fundamental solution of anisotropic elasticity // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1997. V. 50, N 2. P. 179–194.
4. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
5. **Назаров С. А.** Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
6. **Алфутова Н. Б., Мовчан А. Б., Назаров С. А.** Алгебраическая эквивалентность плоских задач для ортотропных и анизотропных сред // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1991. Вып. 3, № 15. С. 64–68.
7. **Куликов А. А., Назаров С. А., Нарбут М. А.** Аффинные преобразования в плоской задаче теории упругости // Вестн. С.-Петерб. гос. ун-та. Сер. 1. 2000. Вып. 2, № 8. С. 91–95.
8. **Куликов А. А., Назаров С. А.** Принцип соответствия в плоских задачах о прямолинейном развитии трещин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 1. С. 77–87.
9. **Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.** Трехмерные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 29/XII 2004 г.