

УДК 532.59

## ТРЕХМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ ВО ВНЕШНЕМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин

Институт электрофизики УрО РАН, 620016 Екатеринбург  
E-mail: nick@iep.uran.ru

Исследована нелинейная динамика поверхности раздела жидких диэлектриков в сильном горизонтальном электрическом поле. Показано, что трехмерные волны малой, но конечной амплитуды могут распространяться без искажений формы либо в направлении, совпадающем с направлением вектора напряженности внешнего поля, либо в направлении, противоположном ему, по поверхности раздела жидкостей, отношение плотностей которых прямо пропорционально отношению их диэлектрических проницаемостей. Для этого частного случая приведено аналитическое описание взаимодействия встречных слабонелинейных волн произвольной формы.

**Ключевые слова:** нелинейные волны, поверхность раздела, диэлектрические жидкости, электрогидродинамика, горизонтальное электрическое поле.

**Введение.** Внешнее горизонтальное электрическое поле оказывает стабилизирующее воздействие на свободную поверхность жидкого диэлектрика, а также на поверхность раздела диэлектрических жидкостей [1–5]. Особенности поведения нелинейных волн на границе раздела жидкостей при наличии горизонтального поля анализировались, например, в работах [6–9]. Уравнения, описывающие эволюцию границы, как правило, не имеют аналитического решения, поэтому при их решении требуется использовать численные методы. Тем не менее исследования показали, что в отдельных случаях возможен существенный прогресс в аналитическом исследовании динамики границы [10, 11]. В частности, установлено, что плоские нелинейные волны могут распространяться без искажений по свободной поверхности непроводящей жидкости со значительной диэлектрической проницаемостью вдоль направления, совпадающего с направлением вектора напряженности сильного внешнего поля. Этот результат был обобщен на случай трехмерных волн произвольной формы [12, 13].

В настоящей работе показано, что аналогичными свойствами обладают слабонелинейные волны на поверхности раздела двух идеальных непроводящих жидкостей, отношение диэлектрических проницаемостей которых прямо пропорционально отношению их плотностей. В случае сильного внешнего поля (когда электростатические силы преобладают

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-08-96010-р-урал), УрО РАН в рамках программы Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” (код проекта 12-П-2-1023) и программы поддержки молодых ученых и аспирантов (код проекта 13-2-НП-380), а также фонда некоммерческих программ “Династия”.

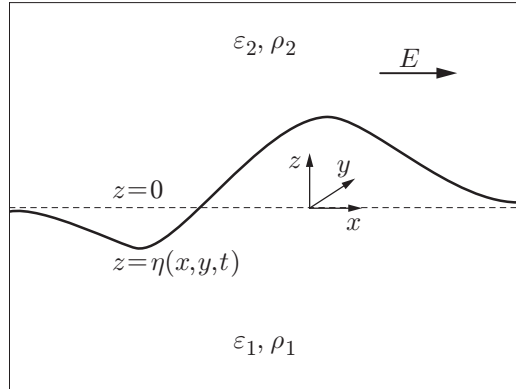


Рис. 1. Схема задачи

над капиллярными и гравитационными) трехмерные нелинейные волны могут распространяться без дисперсии вдоль направления внешнего горизонтального поля. В рамках гамильтонова формализма описывается взаимодействие встречных волн относительно малой амплитуды.

**1. Исходные уравнения.** Рассмотрим динамику границы раздела двух несмешивающихся непроводящих жидкостей во внешнем горизонтальном электрическом поле. В невозмущенном состоянии поверхность раздела представляет собой плоскость  $z = 0$  (оси  $x$ ,  $y$  прямоугольной системы координат лежат в этой плоскости, а ось  $z$  направлена по нормали к ней (рис. 1)). Напряженность внешнего электрического поля направлена по оси  $x$ ; по абсолютному значению она равна  $E$ . Положим, что отклонение поверхности раздела от плоскости  $z = 0$  задается функцией  $\eta(x, y, t)$ , т. е. уравнение  $z = \eta$  определяет профиль границы. Будем считать обе жидкости невязкими и несжимаемыми, а их течение безвихревым (потенциальным). Потенциалы скорости  $\Phi_{1,2}$  и электрического поля  $\varphi_{1,2}$  в жидкостях удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2 \Phi_{1,2} = 0, \quad \nabla^2 \varphi_{1,2} = 0.$$

Здесь индексы 1, 2 соответствуют жидкостям, находящимся в полупространствах  $z < 0$  и  $z > 0$ . На границе раздела должно выполняться условие равенства нормальных компонент скоростей верхней и нижней жидкостей

$$\partial_n \Phi_1 = \partial_n \Phi_2, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (1)$$

где  $\partial_n$  — производная в направлении нормали к поверхности  $z = \eta$ . Для потенциалов электрического поля справедливы граничные условия

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \partial_n \varphi_1 = \varepsilon_2 \partial_n \varphi_2, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{1,2}$  — диэлектрические проницаемости жидкостей. Эти требования соответствуют условиям непрерывности тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля и нормальной компоненты вектора электрической индукции на поверхности раздела (считаем, что свободные поверхностные заряды на границе отсутствуют). На бесконечном расстоянии от границы выполняется условие

$$\Phi_{1,2} \rightarrow 0, \quad \varphi_{1,2} \rightarrow -Ex, \quad z \rightarrow \mp \infty,$$

т. е. скорости жидкостей стремятся к нулю, а электрическое поле становится однородным.

Введем вспомогательную функцию

$$\psi(x, y, t) = \rho_1 \Phi_1|_{z=\eta} - \rho_2 \Phi_2|_{z=\eta}$$

( $\rho_{1,2}$  — плотности жидкостей). Уравнения движения границы  $z = \eta$  можно представить в форме уравнений Гамильтона, причем функции  $\eta$  и  $\psi$  являются канонически сопряженными величинами [14, 15]:

$$\psi_t = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \quad \eta_t = \frac{\delta H}{\delta \psi}. \quad (3)$$

Выражение для гамильтониана  $H$ , совпадающего с полной энергией системы, имеет вид

$$H = \rho_1 \int_{z \leq \eta} \frac{(\nabla \Phi_1)^2}{2} d^3r + \rho_2 \int_{z \geq \eta} \frac{(\nabla \Phi_2)^2}{2} d^3r - \\ - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \int_{z \leq \eta} \frac{(\nabla \varphi_1)^2 - E^2}{2} d^3r - \varepsilon_0 \varepsilon_2 \int_{z \geq \eta} \frac{(\nabla \varphi_2)^2 - E^2}{2} d^3r, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная.

Приведенные соотношения представляют собой замкнутую систему уравнений, описывающих движение диэлектрических жидкостей с поверхностью раздела под действием электростатических сил, обусловленных наличием внешнего горизонтального электрического поля. Влияние капиллярных и гравитационных сил не учитывается, что соответствует пределу сильного поля:  $\varepsilon_0 E^2 \gg \sqrt{g\sigma|\rho_1 - \rho_2|}$  ( $\sigma$  — поверхностное натяжение;  $g$  — ускорение свободного падения).

**2. Уравнение движения границы.** Перейдем к безразмерным обозначениям (со штрихами):

$$\Phi'_{1,2} = \frac{\Phi_{1,2}}{E\lambda} \sqrt{\frac{\rho_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}}, \quad \varphi'_{1,2} = \frac{\varphi_{1,2}}{E\lambda}, \quad \psi' = \frac{\psi}{E\lambda\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \rho_1}}, \quad \eta' = \frac{\eta}{\lambda}, \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, \quad t' = t \frac{E}{\lambda} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\rho_1}}$$

( $\lambda$  — характерная длина волны). Введем возмущения безразмерных потенциалов электрического поля  $\phi'_{1,2} = \varphi'_{1,2} + x'$ , для которых  $\phi'_{1,2} \rightarrow 0$  при  $z' \rightarrow \mp\infty$ . Применяя первую теорему Грина и используя граничные условия (1), (2), гамильтониан (4) можно представить в виде интеграла по поверхности раздела (далее штрихи опущены)

$$H = \frac{1}{2} \int_S \left[ \left( \Phi_1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \Phi_2 \right) \partial_n \Phi_1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \frac{\phi_1 \eta_x}{\sqrt{1 + (\nabla_\perp \eta)^2}} \right] dS, \quad (5)$$

где  $dS$  — дифференциал поверхности;  $\nabla_\perp$  — градиент в плоскости  $\{x, y\}$ .

Рассмотрим поведение системы в приближении малости углов наклона границы  $|\nabla_\perp \eta| \sim \alpha \ll 1$ . Подынтегральное выражение в гамильтониане (5) разложим в ряд по степеням канонических переменных  $\eta$ ,  $\psi$ . Для гармонических функций, затухающих при  $z \rightarrow \mp\infty$ , справедливы соотношения

$$f_{1,2}|_{z=\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm\eta)^n \hat{k}^n}{n!} f_{1,2}|_{z=0}, \quad \partial_z f_{1,2}|_{z=0} = \pm \hat{k} f_{1,2}|_{z=0},$$

где  $\hat{k}$  — двумерный интегральный оператор с ядром, фурье-образ которого равен модулю волнового вектора:  $\hat{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = |\mathbf{k}| e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ . Используя эти соотношения для потенциалов  $\phi_{1,2}$ ,  $\Phi_{1,2}$  и их производных, с точностью до кубических слагаемых находим

$$H = \frac{1+A}{4} \iint [\psi \hat{k} \psi - A \eta ((\hat{k} \psi)^2 - (\nabla_\perp \psi)^2)] dx dy + \\ + \frac{A_E^2}{1+A_E} \iint [\eta_x \hat{k}^{-1} \eta_x + A_E (\eta \eta_x^2 - \eta_x \hat{k}^{-1} \eta \hat{k} \eta_x + \eta_x \hat{k}^{-1} (\nabla_\perp \eta \cdot \nabla_\perp \hat{k}^{-1} \eta_x))] dx dy,$$

где  $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$  — число Атвуда ( $0 < A < 1$  при  $\rho_1 > \rho_2$ );  $A_E = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  — аналог числа Атвуда для диэлектрических проницаемостей. Уравнения движения

границы раздела, соответствующие этому гамильтониану, получим, варьируя (3):

$$\begin{aligned} \psi_t - \frac{2A_E^2}{1+A_E} \hat{k}^{-1} \eta_{xx} &= \frac{A(1+A)}{4} [(\hat{k}\psi)^2 - (\nabla_{\perp}\psi)^2] + \\ &+ \frac{A_E^3}{1+A_E} [\eta_x^2 + 2\eta\eta_{xx} + (\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_x)^2 - 2\hat{k}^{-1}\partial_x(\eta\hat{k}\eta_x - \nabla_{\perp}\eta \cdot \nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_x)]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\eta_t - \frac{1+A}{2} \hat{k}\psi = -\frac{A(1+A)}{2} [\hat{k}(\eta\hat{k}\psi) + \nabla_{\perp}(\eta\nabla_{\perp}\psi)]. \quad (7)$$

Исключая из уравнений (6), (7) функцию  $\psi$ , получаем  $(2+1)$ -мерное уравнение эволюции поверхности раздела, в котором учтены квадратичные нелинейности:

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - v_0^2 \eta_{xx} &= (\hat{k}/2)(v_0^2 A_E \eta_x^2 - A \eta_t^2) + \hat{k}(v_0^2 A_E \eta \eta_{xx} - A \eta \eta_{tt}) + \\ &+ (\hat{k}/2)[v_0^2 A_E (\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_x)^2 - A (\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_t)^2] + \\ &+ \nabla_{\perp}[v_0^2 A_E \partial_x(\eta\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_x) - A \partial_t(\eta\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $v_0 = A_E \sqrt{(1+A)/(1+A_E)}$  — постоянная, имеющая смысл скорости распространения линейных волн.

**3. Взаимодействие встречных волн.** В линейном приближении уравнение (8) представляет собой  $(1+1)$ -мерное волновое уравнение

$$\eta_{tt} = v_0^2 \eta_{xx},$$

общее решение которого можно представить в виде суперпозиции волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  в противоположных направлениях:

$$\eta(x, y, t) = f(x - v_0 t, y) + g(x + v_0 t, y)$$

( $f, g$  — произвольные функции двух переменных). Заметим, что в этом выражении переменная  $y$  является параметром. Это обусловлено тем, что она не входит в волновое уравнение в явном виде.

В общем случае нелинейное уравнение (8) не может быть решено аналитически. Тем не менее, как несложно заметить, существенный прогресс в его решении возможен при

$$\rho_1/\rho_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2, \quad (9)$$

т. е. если отношение плотностей жидкостей прямо пропорционально отношению их диэлектрических проницаемостей (как следствие  $A = A_E = v_0$ ). Действительно, в этом случае уравнение (8) примет более простой вид

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - A^2 \eta_{xx} &= (\hat{k}/2)(A^3 \eta_x^2 - A \eta_t^2) + (\hat{k}/2)[A^3 (\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_x)^2 - A (\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_t)^2] + \\ &+ \nabla_{\perp}[A^3 \partial_x(\eta\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_x) - A \partial_t(\eta\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_t)] + O(\alpha^3). \end{aligned} \quad (10)$$

Несложно показать, что уравнение (10) допускает пару следующих точных решений:

$$\eta(x, y, t) = f(x - At, y), \quad \eta(x, y, t) = g(x + At, y). \quad (11)$$

В соответствии с этими решениями трехмерные нелинейные волны произвольной формы распространяются без искажений либо в направлении, совпадающем с направлением вектора напряженности внешнего электрического поля, либо в противоположном ему направлении, т. е. аналогично тому, как распространяются волны, описываемые простейшими линейными уравнениями

$$\eta_t = \mp A \eta_x.$$

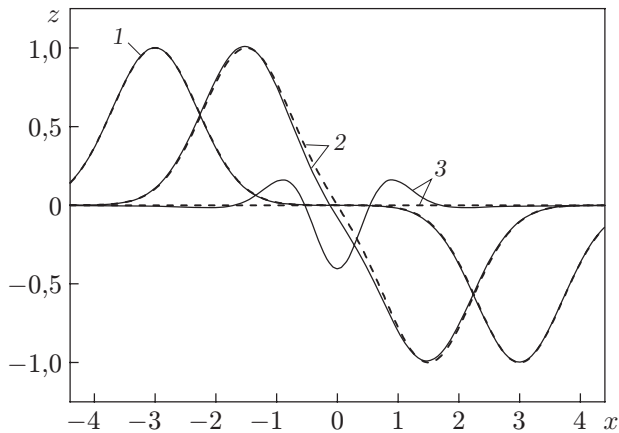


Рис. 2

Рис. 2. Эволюция встречных трехмерных волн, описываемых уравнениями (12), (13), при  $A = A_E = 0,5$ ,  $y = 0$ :

1 —  $t = -6$ , 2 —  $t = -3$ , 3 —  $t = 0$ ; штриховые линии — результаты линейного анализа, сплошные — результаты нелинейного анализа

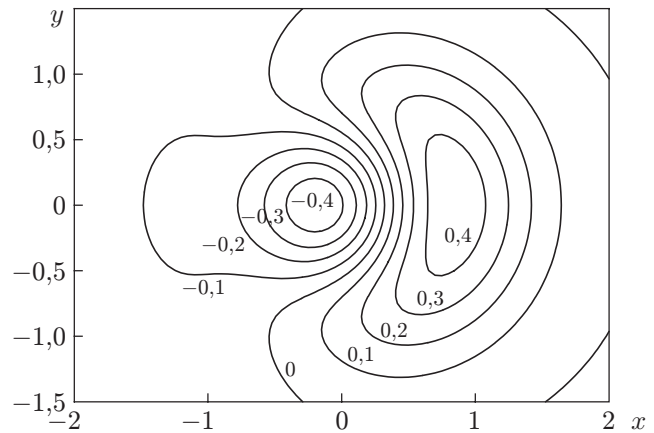


Рис. 3

Рис. 3. Изолинии функции  $\eta(x, y, t)$  для встречных волн, описываемых уравнениями (12), (13), в момент времени  $t = 0,4$  при  $A = A_E = 0,5$

Таким образом, нелинейность рассматриваемой задачи не влияет на скорость распространения волны и не приводит к ее опрокидыванию. Влияние нелинейности следует учитывать только при анализе взаимодействия противоположно направленных волн.

Рассмотрим взаимодействие встречных волн в случае, когда условие (9) выполняется. Уравнение (10) с точностью до масштабного преобразования совпадает с уравнением, выведенным в работе [12] для описания эволюции свободной поверхности жидкости с высокой диэлектрической проницаемостью в горизонтальном электрическом поле. В обозначениях, используемых в настоящей работе, рассматриваемый в [12] случай соответствует пределам  $\rho_2/\rho_1 \rightarrow 0$  и  $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \rightarrow 0$  (т. е.  $A = A_E = 1$ ). По аналогии с [12] получаем общее решение уравнения (10) следующего вида:

$$\eta(x, y, t) = f(x - At, y) + g(x + At, y) - (A/2)\hat{k}(fg + \nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}f \cdot \nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}g) - (A/2)\nabla_{\perp}(f\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}g + g\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}f) + O(\alpha^3). \quad (12)$$

Это выражение описывает нелинейную суперпозицию встречных трехмерных волн (11). Из (12) следует, что при взаимодействии волны остаются структурно-устойчивыми. На рис. 2, 3 показана форма границы раздела при встрече трехмерных пространственно локализованных волн, описываемых уравнениями

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2), \quad g(x, y) = -\exp(-x^2 - y^2). \quad (13)$$

Из рис. 2 следует, что при сближении уединенных волн влияние нелинейности возрастает, а в момент их встречи ( $t = 0$ ) она определяет форму границы (в линейном приближении в этот момент граница является плоской). Влияние нелинейности обуславливает также отсутствие симметрии относительно прямой  $x = 0$  на рис. 3.

**Заключение.** В настоящей работе в рамках модели трехмерной электрогидродинамики показано, что волны малой, но конечной амплитуды могут распространяться без искажений формы вдоль направления, совпадающего с направлением вектора напряженности внешнего горизонтального электрического поля по поверхности раздела двух идеальных

непроводящих жидкостей. Данная ситуация имеет место для жидкостей, отношение плотностей которых прямо пропорционально отношению их диэлектрических проницаемостей, в случае сильного внешнего поля, когда влияние электростатических сил является преобладающим. Получено решение уравнений движения, описывающее взаимодействие нелинейных волн, распространяющихся в противоположных направлениях. В соответствии с этим решением в результате взаимодействия встречных уединенных волн произвольной геометрии их форма и фаза сохраняются.

Следует отметить, что условию (9) с приемлемой точностью удовлетворяют такие пары несмешивающихся жидкостей, как кремнийорганический полимер полиметилфенилсилоксан ( $\rho \approx 1100 \text{ кг/м}^3$ ,  $\varepsilon \approx 2,7$ ) и минеральное масло ( $\rho \approx 880 \text{ кг/м}^3$ ,  $\varepsilon \approx 2,2$ ), а также льняное масло ( $\rho \approx 930 \text{ кг/м}^3$ ,  $\varepsilon \approx 3,2$ ) и фреон ( $\rho \approx 570 \text{ кг/м}^3$ ,  $\varepsilon \approx 2,0$ ). Для первой указанной пары  $A \approx 0,10$ ,  $A_E \approx 0,11$ , для второй пары  $A \approx 0,24$ ,  $A_E \approx 0,23$ , т. е. в обоих случаях  $A \approx A_E$ .

Следует отметить, что полученные выше результаты с точностью до замены электрического поля  $E$  на магнитное поле  $H$  и диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_{1,2}$  на магнитные проницаемости  $\mu_{1,2}$  применимы при описании распространения волн по границе раздела ферромагнитных жидкостей в горизонтальном магнитном поле. При этом условие (9) принимает вид

$$\rho_1/\rho_2 = \mu_1/\mu_2. \quad (14)$$

Как известно, ферромагнитные жидкости представляют собой коллоидные системы, состоящие из магнитных наночастиц, находящихся во взвешенном состоянии в несущих жидкостях. Как правило, относительная концентрация частиц составляет несколько процентов. При добавлении необходимого количества частиц условие (14) можно реализовать для наночастиц практически любых материалов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Melcher J. R.** Field-coupled surface waves. Cambridge: MIT Press, 1963.
2. **Melcher J. R.** Electrohydrodynamic and magnetohydrodynamic surface waves and instabilities // *Phys. Fluids*. 1961. V. 4. P. 1348–1354.
3. **Melcher J. R., Schwarz W. J.** Interfacial relaxation overstability in a tangential electric field // *Phys. Fluids*. 1968. V. 11. P. 2604–2616.
4. **El-Sayed M. F.** Electro-aerodynamic instability of a thin dielectric liquid sheet sprayed with an air stream // *Phys. Rev. E*. 1999. V. 60. P. 7588–7591.
5. **Barannyk L. L., Papageorgiou D. T., Petropoulos P. G.** Suppression of Rayleigh — Taylor instability using electric fields // *Math. Comput. Simulat.* 2012. V. 82. P. 1008–1016.
6. **Tilley B. S., Petropoulos P. G., Papageorgiou D. T.** Dynamics and rupture of planar electrified liquid sheets // *Phys. Fluids*. 2001. V. 13. P. 3547–3563.
7. **Papageorgiou D. T., Vanden-Broeck J.-M.** Large-amplitude capillary waves in electrified fluid sheets // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 508. P. 71–88.
8. **Ozen O., Papageorgiou D. T., Petropoulos P. G.** Nonlinear stability of a charged electrified viscous liquid sheet under the action of a horizontal electric field // *Phys. Fluids*. 2006. V. 18. 042102.
9. **Grandison S., Papageorgiou D. T., Vanden-Broeck J.-M.** Interfacial capillary waves in the presence of electric fields // *Eur. J. Mech. B Fluids*. 2007. V. 26. P. 404–421.
10. **Zubarev N. M.** Nonlinear waves on the surface of a dielectric liquid in a strong tangential electric field // *Phys. Lett. A*. 2004. V. 333. P. 284–288.

11. **Зубарев Н. М., Зубарева О. В.** Бездисперсионное распространение волн конечной амплитуды по поверхности диэлектрической жидкости в тангенциальном электрическом поле // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 20. С. 40–44.
12. **Зубарев Н. М.** Нелинейные волны на поверхности диэлектрической жидкости в горизонтальном электрическом поле в 3D геометрии; точные решения // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 89, вып. 6. С. 317–321.
13. **Zubarev N. M., Zubareva O. V.** Propagation of large-amplitude waves on dielectric liquid sheets in a tangential electric field: Exact solutions in three-dimensional geometry // Phys. Rev. E. 2010. V. 82. 046301.
14. **Захаров В. Е.** Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
15. **Kuznetsov E. A., Spector M. D., Zakharov V. E.** Surface singularities of ideal fluid // Phys. Lett. A. 1993. V. 182. P. 387–393.

*Поступила в редакцию 2/X 2012 г.*

---