ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 5

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА ЖЕСТКОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

Н. И. Александрова

Институт горного дела СО РАН,
630091 Новосибирск

Задачам дифракции упругих и акустических волн на включениях, имеющих круговое сечение, посвящена обширная литература (см. обзоры [1–3]). Менее исследованы задачи взаимодействия упругих волн с протяженными включениями, имеющими эллиптическое поперечное сечение. Одним из подходов для решения данных задач является классический подход, основанный на методе разложения по собственным функциям. С использованием разложения по функциям Матье в [4–6] изучено рассеяние скалярных SH-волн на эллиптическом цилиндре. В случае дифракции P- и SV-волн, как отмечено в [3, 7, 8], векторное волновое уравнение не разделяется в эллиптических координатах с использованием функций Матье вследствие существования двух различных скоростей упругих волн. Поэтому в большинстве работ [7–16] применяются другие методы для решения задач с P- и SV-волнами. В [7, 8] решение строится на основе метода матриц рассеяния, в [9] — метода конечно-разностной аппроксимации контурных интегралов, в [10] решение ищется в виде потенциалов Папковича — Нейбера, в [11] используются методы теории функций комплексных переменных, а в [12, 13, 15] — метод ближних характеристик. В [14] задача решается с применением функций Матье. Получена бесконечная система уравнений для определения бесконечного числа неизвестных коэффициентов, которая решается численно.

Анализ литературы показывает, что большая часть работ посвящена исследованию дифракции гармонических и стационарных волн на эллиптических препятствиях [7–14]. Нестационарное взаимодействие продольных волн с эллиптической полостью изучается с помощью лучевых рядов Дебая в [16], где представлены численные результаты, полученные по упрощенной вычислительной схеме. Детальное исследование нестационарной дифракции плоских P- и SV-волн на эллиптических препятствиях отсутствует. Также отсутствуют простые аналитические оценки решения данных задач.

В настоящей работе предложен приближенный подход к разделению переменных в уравнениях линейной теории упругости в задаче с эллиптической границей при действии плоских упругих волн. Такой подход продемонстрирован при решении нестационарных задач дифракции упругих волн на жестком включении. Приближенно найдены асимптотические значения ($t \to \infty$, t — время) напряжений на поверхности цилиндра. Показано, что в частном случае кругового цилиндра этот подход приводит к точному решению задачи.

Постановка задачи. Исследуется задача о воздействии плоских P- и SV-волн на бесконечно длинный жесткий цилиндр, окруженный упругой средой. Цилиндр имеет эллиптическое поперечное сечение. Рассматривается плоская постановка — фронт падающей волны параллелен оси цилиндра. Направление движения падающей волны составляет угол θ с большой осью эллипса (рис. 1).

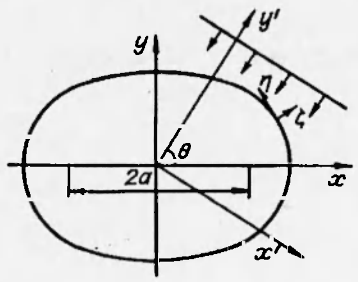

Рис. 1

В системе координат (x', y'), повернутой на угол $\theta - \pi/2$ относительно координат (x, y), напряжения в падающей волне задаются следующим образом:

$$\sigma^0_{y'y'} = -\sigma_1 H_0(z_1), \quad \sigma^0_{x'x'} = \sigma_1 \varepsilon H_0(z_1), \quad \sigma^0_{x'y'} = -\sigma_2 H_0(z_2),$$
$$z_i = c_i t - a_1 + y', \quad \varepsilon = -\nu/(1-\nu), \tag{1}$$

где H_0 — единичная ступенчатая функция Хевисайда; σ_1, σ_2 — напряжения на фронте падающих продольной и сдвиговой волн соответственно; падающая волна распространяется в направлении y'; ν — коэффициент Пуассона; c_1 — скорость волн расширения; c_2 — скорость волн сдвига; a_1 — большая полуось эллипса. Введем эллиптическую систему координат, связанную с цилиндром:

$$x = a \operatorname{ch} \zeta \cos \eta, \quad y = a \operatorname{sh} \zeta \sin \eta \quad (0 \leqslant \zeta < \infty, \ 0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi)$$

($2a$ — расстояние между двумя фокусами эллипса). Поверхности цилиндра соответствует значение $\zeta = \zeta_0$. Движение упругой среды описывается двумерными волновыми уравнениями относительно скалярного φ и векторного ψ потенциалов смещений:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_1^2 \Delta \varphi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta \psi, \quad c_2^2 = \text{æ} c_1^2, \quad \text{æ} = (1+\varepsilon)/2 \tag{2}$$

(Δ — лапласиан). Потенциалы φ и ψ должны быть отличны от нуля в расширяющейся области, ограниченной фронтом возмущений, и равны нулю вне этой области.

В линейных задачах дифракции обычно используется разделение задачи на прямую и дополнительную: $Y^\Sigma = Y^0 + Y^1$ (Y^0 — компоненты напряжений и перемещений в падающей волне, а Y^1 соответствует отраженным и дифракционным волнам).

На поверхности жесткого цилиндра ставятся условия отсутствия перемещений

$$u^0_\zeta + u^1_\zeta = 0, \quad u^0_\eta + u^1_\eta = 0 \quad (\zeta = \zeta_0) \tag{3}$$

(u_ζ, u_η — нормальное и касательное перемещения). При $t = 0$ имеем нулевые начальные условия.

Для решения задачи применим преобразование Лапласа по времени с параметром p к уравнениям (2) и граничным условиям (3):

$$p^2 \varphi^{1L} = c_1^2 \Delta \varphi^{1L}, \quad p^2 \psi^{1L} = c_2^2 \Delta \psi^{1L}; \tag{4}$$

$$u^{0L}_\zeta + u^{1L}_\zeta = 0, \quad u^{0L}_\eta + u^{1L}_\eta = 0 \quad (\zeta = \zeta_0). \tag{5}$$

Поскольку уравнения (4) с условиями (5) в эллиптической системе координат не разделяются из-за существования двух скоростей распространения возмущений [3], то от эллиптической системы координат (ζ,η) перейдем к цилиндрической системе координат (r,α), которые связаны следующими соотношениями:

$$r^2 = a^2(\mathrm{sh}^2\zeta + \cos^2\eta),$$
$$\omega = \mathrm{ch}\,\zeta\cos\eta\cos\theta + \mathrm{sh}\,\zeta\sin\eta\sin\theta = ra^{-1}\cos(\theta-\alpha). \tag{6}$$

Связь напряжений и перемещений в различных системах координат имеет вид

$$\sigma_{\zeta\zeta} = \sigma_{rr}\alpha_1^2 + \sigma_{\alpha\alpha}\beta_1^2 + 2\sigma_{r\alpha}\alpha_1\beta_1,$$
$$\sigma_{\eta\eta} = \sigma_{rr}\alpha_2^2 + \sigma_{\alpha\alpha}\beta_2^2 + 2\sigma_{r\alpha}\alpha_2\beta_2, \tag{7}$$
$$\sigma_{\zeta\eta} = \sigma_{rr}\alpha_1\alpha_2 + \sigma_{\alpha\alpha}\beta_1\beta_2 + \sigma_{r\alpha}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1),$$
$$u_\zeta = u_r\alpha_1 + u_\alpha\beta_1, \quad u_\eta = u_r\alpha_2 + u_\alpha\beta_2,$$

где

$$\alpha_1 = \beta_2 = J_{,\zeta}/\sqrt{J_0}; \quad \beta_1 = -\alpha_2 = J_{,\eta}/\sqrt{J_0};$$
$$J = a^2(\mathrm{sh}^2\zeta + \sin^2\eta); \quad J_0 = J_{,\zeta}^2 + J_{,\eta}^2.$$

Здесь и далее запятая в индексе означает дифференцирование по соответствующему аргументу. Выражение напряжений и перемещений через потенциалы φ и ψ в цилиндрической системе координат запишем как

$$\sigma_{rr} = 2c_2^2\rho[D_1(\varphi) + D_2(\psi)],$$
$$\sigma_{r\alpha} = 2c_2^2\rho[D_2(\varphi) - D_1(\psi)],$$
$$\sigma_{\alpha\alpha} = 2c_2^2\rho[D_3(\varphi) - D_2(\psi)], \tag{8}$$
$$u_r = \varphi_{,r} + \psi_{,\alpha}/r, \quad u_\alpha = \varphi_{,\alpha}/r - \psi_{,r},$$

где ρ — плотность упругой среды; D_1, D_2, D_3 — операторы:

$$D_1(f_i) = \frac{d_i}{2}\Delta f_i - \frac{1}{r}f_{i,r} - \frac{1}{r^2}f_{i,\alpha\alpha}, \quad D_2(f_i) = \frac{1}{r}f_{i,r\alpha} - \frac{1}{r^2}f_{i,\alpha} \quad (i = 1,2),$$
$$D_3(\varphi) = -D_1(\varphi) + (1-\varepsilon)\Delta\varphi/2æ,$$
$$d_1 = 1/æ, \quad d_2 = 1, \quad f_1 = \varphi, \quad f_2 = \psi.$$

Подставляя (8) в (7), для напряжений и перемещений в эллиптической системе координат получим

$$\sigma_{\zeta\zeta} = 2c_2^2\rho[B_1(\varphi) + B_2(\psi)]/J_0, \qquad \sigma_{\zeta\eta} = 2c_2^2\rho[B_2(\varphi) - B_1(\psi)]/J_0,$$
$$\sigma_{\eta\eta} = 2c_2^2\rho[B_3(\varphi) - B_2(\psi)]/J_0, \tag{9}$$
$$u_\zeta = [J_{,\zeta}(\varphi_{,r} + \psi_{,\alpha}/r) + J_{,\eta}(\varphi_{,\alpha}/r - \psi_{,r})]/\sqrt{J_0},$$
$$u_\eta = [J_{,\zeta}(\varphi_{,\alpha}/r - \psi_{,r}) - J_{,\eta}(\varphi_{,r} + \psi_{,\alpha}/r)]/\sqrt{J_0}.$$

Здесь

$$B_1(f_i) = bB_{11}(f_i) + dB_{12}(f_i); \qquad B_2(f_i) = dB_{21}(f_i) - bB_{22}(f_i);$$
$$B_3(\varphi) = -B_1(\varphi) + (1-\varepsilon)J_0\Delta\varphi/2æ;$$
$$B_{11}(f_i) = -\frac{b_i}{2b}\Delta f_i + \frac{1}{r}f_{i,r} + \frac{1}{r^2}f_{i,\alpha\alpha};$$

$$B_{21}(f_i) = -\frac{1}{2}\Delta f_i + \frac{1}{r} f_{i,r} + \frac{1}{r^2} f_{i,\alpha\alpha};$$

$$B_{22}(f_i) = B_{12}(f_i) = \frac{1}{r} f_{i,r\alpha} - \frac{1}{r^2} f_{i,\alpha};$$

$$b = J_{,\eta}^2 - J_{,\zeta}^2; \quad d = 2J_{,\eta}J_{,\zeta}; \quad b_1 = (\varepsilon J_{,\eta}^2 - J_{,\zeta}^2)/æ; \quad b_2 = b.$$

Изображение потенциалов φ и ψ в падающей волне имеет вид

$$\begin{gathered} \varphi^{0L} = -A_1\sigma_1 W_1/\rho p^3, \quad \psi^{0L} = -A_2\sigma_2 W_2/\rho p^3, \\ W_i = \exp(pa\omega/c_i), \quad A_i = \exp(-pa_1/c_i). \end{gathered} \tag{10}$$

Разложим функции W_i в ряд по модифицированным функциям Бесселя [17]:

$$\begin{gathered} W_i = \sum_{n=0}^{\infty} e_n I_n(\delta_i) \cos n(\theta - \alpha), \\ e_n = 2 \quad (n > 0), \quad e_0 = 1, \quad \delta_i = rp/c_i. \end{gathered} \tag{11}$$

Решение волновых уравнений (4) в цилиндрической системе координат с учетом отсутствия излучений на бесконечности представим как

$$\begin{gathered} \varphi^{1L} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\delta_1)[C_{1n} \cos n(\theta - \alpha) + S_{1n} \sin n(\theta - \alpha)], \\ \psi^{1L} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\delta_2)[C_{2n} \cos n(\theta - \alpha) + S_{2n} \sin n(\theta - \alpha)], \end{gathered} \tag{12}$$

где K_n — функции Макдональда n-го порядка; C_{1n}, C_{2n}, S_{1n}, S_{2n} — неизвестные коэффициенты.

Чтобы удовлетворить граничным условиям (5), подставим (9)–(12) в (5), получим систему двух линейных уравнений относительно коэффициентов C_{1n}, C_{2n}, S_{1n}, S_{2n} ($n = 0, \ldots, \infty$). Поскольку эта система справедлива для произвольного угла θ и функции sin, cos ортогональны на интервале $[0, 2\pi]$, то, следовательно, каждый множитель, стоящий при $\sin n\theta$ и $\cos n\theta$, должен быть равен нулю. В результате для каждого n имеем систему четырех уравнений относительно коэффициентов C_{1n}, C_{2n}, S_{1n}, S_{2n}:

$$\begin{gathered} \left\{ \begin{aligned} K_{n,1} n C_{1n} - K'_{n,2}\delta_2 S_{2n} &= \gamma_{1n} I_{n,1} n, \\ K'_{n,1}\delta_1 C_{1n} - K_{n,2} n S_{2n} &= \gamma_{1n} I'_{n,1}\delta_1, \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} K'_{n,1}\delta_1 S_{1n} + K_{n,2} n C_{2n} &= \gamma_{2n} I_{n,2} n, \\ K_{n,1} n S_{1n} + K'_{n,2}\delta_2 C_{2n} &= \gamma_{2n} I'_{n,2}\delta_2, \end{aligned} \right. \\ K_{n,i} = K_n(\delta_i), \quad I_{n,i} = I_n(\delta_i), \quad \gamma_{in} = A_i\sigma_i e_n/\rho p^3, \\ \delta_i = rp/c_i, \quad r = a\sqrt{\operatorname{sh}^2\zeta_0 + \cos^2\eta}. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу. Из (13) видно, что коэффициенты C_{1n}, C_{2n}, S_{1n}, S_{2n} есть функции от α. Строго говоря, при этом формулы (12) не дают точного решения задачи (4)–(5). Однако, пренебрегая производными функций C_{1n}, C_{2n}, S_{1n}, S_{2n} по α, можем считать, что формулы (12) с коэффициентами C_{1n}, C_{2n}, S_{1n}, S_{2n}, определенными из формул (13), задают приближенное решение краевой задачи (4), (5).

Решая систему уравнений (13) и подставляя ее решение в (12) и затем в (9), в результате ряда последовательных упрощений получим приближенное решение в изображениях для суммарных напряжений на поверхности жесткого эллиптического цилиндра:

$$\sigma_{\zeta\zeta}^{\Sigma L} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\zeta\zeta,n}^{\Sigma L}, \quad \sigma_{\zeta\eta}^{\Sigma L} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\zeta\eta,n}^{\Sigma L}, \quad \sigma_{\eta\eta}^{\Sigma L} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\eta\eta,n}^{\Sigma L},$$

$$\sigma_{\zeta\zeta,n}^{\Sigma L} = \frac{e_n}{J_0 \Omega_n p}\big[\cos n(\theta-\alpha)(-\sigma_1 A_1 æ b_1 \delta_2 K'_{n,2} - \sigma_2 A_2 d \delta_1 K'_{n,1}) +$$

$$+ \sin n(\theta-\alpha)(-\sigma_1 A_1 d n K_{n,2} + \sigma_2 A_2 æ b_1 n K_{n,1})\big],$$

$$\sigma_{\zeta\eta,n}^{\Sigma L} = \frac{e_n}{J_0 \Omega_n p}\big[\cos n(\theta-\alpha)(-\sigma_1 A_1 æ d \delta_2 K'_{n,2} + \sigma_2 A_2 b \delta_1 K'_{n,1}) + \tag{14}$$

$$+ \sin n(\theta-\alpha)(\sigma_1 A_1 b n K_{n,2} + \sigma_2 A_2 æ d n K_{n,1})\big],$$

$$\sigma_{\eta\eta,n}^{\Sigma L} = \frac{e_n(1-\varepsilon)}{\Omega_n p}\big[\cos n(\theta-\alpha)\sigma_1 A_1 \delta_2 K'_{n,2} - \sin n(\theta-\alpha)\sigma_2 A_2 n K_{n,1}\big] - \sigma_{\zeta\zeta,n}^{\Sigma L},$$

$$\Omega_n = -K_{n,1} K_{n,2} n^2 + K'_{n,1} K'_{n,2} \delta_1 \delta_2.$$

Обратить выражения (14) в явном виде не представляется возможным. Будем искать асимптотику напряжений на поверхности цилиндра при больших временах с начала процесса ($t \to \infty$), что соответствует $p \to 0$ в пространстве изображений. В [18] показано, что если асимптотика изображений при $p \to 0$ имеет особую точку алгебраически-логарифмического типа

$$f^L(p) \sim -p^k/\ln p \qquad (k \neq 0, 1, 2, \ldots),$$

то асимптотика оригинала при $t \to \infty$ имеет вид

$$f(t) \sim \frac{t^{-k-1}}{(-k-1)!\ln t}.$$

График функции $f(t)$ при $k = -2$ приведен на рис. 2.

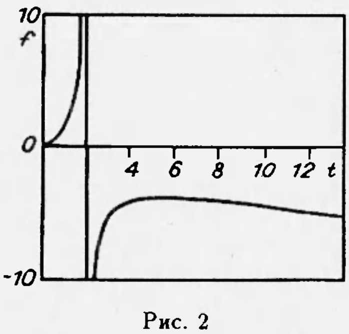

Рис. 2

Полагая p малым, оставим в разложениях функций Бесселя первые члены ряда. Используем при $n = 1$ асимптотику функции $f(t)$ при $k = -2$. В результате получим приближенное асимптотическое представление для суммарных напряжений на поверхности жесткого включения:

$$\sigma_{\zeta\zeta,0}^{\Sigma} = (\sigma_1 b_1 æ + \sigma_2 d)/J_0, \quad \sigma_{\zeta\eta,0}^{\Sigma} = (\sigma_1 d æ - \sigma_2 b)/J_0,$$

$$\sigma_{\eta\eta,0}^{\Sigma} = (\sigma_1 b_3 æ - \sigma_2 d)/J_0,$$

$$\sigma^{\Sigma}_{\zeta\zeta,1} = \frac{t}{\ln(t/\beta)}\frac{2c_2^2\delta}{J_0 r}[\cos(\theta-\alpha)(\sigma_1 b_1 æ/c_1+\sigma_2 d/c_2)+$$
$$+\sin(\theta-\alpha)(-\sigma_1 d/c_1+\sigma_2 b_1 æ/c_2)],$$
$$\sigma^{\Sigma}_{\zeta\eta,1} = \frac{t}{\ln(t/\beta)}\frac{2c_2^2\delta}{J_0 r}[\cos(\theta-\alpha)(\sigma_1 dæ/c_1-\sigma_2 b/c_2)+$$
$$+\sin(\theta-\alpha)(\sigma_1 b/c_1+\sigma_2 dæ/c_2)],$$
$$\sigma^{\Sigma}_{\eta\eta,1} = \frac{t}{\ln(t/\beta)}\frac{2c_2^2\delta}{J_0 r}[\cos(\theta-\alpha)(\sigma_1 b_3 æ/c_1-\sigma_2 d/c_2)+$$
$$+\sin(\theta-\alpha)(\sigma_1 d/c_1+\sigma_2 b_3 æ/c_2)], \quad (15)$$
$$\sigma^{\Sigma}_{\zeta\zeta,2} = 2\delta[\cos 2(\theta-\alpha)(\sigma_1 b_1 æ^2+\sigma_2 d)+\sin 2(\theta-\alpha)(-\sigma_1 d+\sigma_2 b_1)æ]/J_0,$$
$$\sigma^{\Sigma}_{\zeta\eta,2} = 2\delta[\cos 2(\theta-\alpha)(\sigma_1 dæ^2-\sigma_2 b)+\sin 2(\theta-\alpha)(\sigma_1 b+\sigma_2 d)æ]/J_0,$$
$$\sigma^{\Sigma}_{\eta\eta,2} = 2\delta[\cos 2(\theta-\alpha)(\sigma_1 b_3 æ^2-\sigma_2 d)+\sin 2(\theta-\alpha)(\sigma_1 d+\sigma_2 b_3)æ)]/J_0,$$
$$\sigma^{\Sigma}_{\zeta\zeta,n}=0,\quad \sigma^{\Sigma}_{\zeta\eta,n}=0,\quad \sigma^{\Sigma}_{\eta\eta,n}=0\quad (n\geqslant 3),$$
$$\beta=\frac{a_1\mathbf{C}}{2c_1 æ^{\delta/2}},\quad \delta=\frac{1}{(1+æ)},\quad b_3=\frac{\varepsilon J^2_{,\zeta}-J^2_{,\eta}}{æ}$$

($\mathbf{C} = 1{,}781072418\ldots$ — константа Эйлера [17]). Асимптотика напряжений в отраженных и дифракционных волнах имеет вид

$$\sigma^1_{\zeta\zeta,0}=-\sigma^1_{\eta\eta,0}=(\sigma_1 bæ+\sigma_2 d)/J_0,\quad \sigma^1_{\zeta\eta,0}=(\sigma_1 dæ-\sigma_2 b)/J_0,$$
$$\sigma^1_{\zeta\zeta,1}=\sigma^{\Sigma}_{\zeta\zeta,1},\quad \sigma^1_{\zeta\eta,1}=\sigma^{\Sigma}_{\zeta\eta,1},\quad \sigma^1_{\eta\eta,1}=\sigma^{\Sigma}_{\eta\eta,1},$$
$$\sigma^1_{\zeta\zeta,2}=(æ-1)\delta[\cos 2(\theta-\alpha)(\sigma_1 b_4 æ+\sigma_2 d)+$$
$$+\sin 2(\theta-\alpha)(\sigma_1 dæ-\sigma_2 b_4)]/J_0,$$
$$\sigma^1_{\zeta\eta,2}=(æ-1)\delta[\cos 2(\theta-\alpha)(\sigma_1 dæ+\sigma_2 b)+$$
$$+\sin 2(\theta-\alpha)(-\sigma_1 bæ+\sigma_2 d)]/J_0, \quad (16)$$
$$\sigma^1_{\eta\eta,2}=(æ-1)\delta[\cos 2(\theta-\alpha)(\sigma_1 b_5 æ+\sigma_2 d)+$$
$$+\sin 2(\theta-\alpha)(-\sigma_1 dæ+\sigma_2 b_5)]/J_0,$$
$$b_4=J^2_{,\zeta}+3J^2_{,\eta},\quad b_5=3J^2_{,\zeta}+J^2_{,\eta}.$$

Рассмотрим частный случай. Пусть эллипс стремится к окружности ($a\to 0$, $\zeta_0\to\infty$, $a\,\mathrm{sh}\,\zeta_0\to R$, $a\,\mathrm{ch}\,\zeta_0\to R$, R — радиус окружности). Тогда из (15) находим асимптотическое решение задачи дифракции упругих волн на жестком круговом цилиндре, совпадающее с [16]:

$$\sigma^{\Sigma}_{rr,0}=-\sigma_1,\quad \sigma^{\Sigma}_{r\alpha,0}=\sigma_2,\quad \sigma^{\Sigma}_{\alpha\alpha,0}=-\varepsilon\sigma^{\Sigma}_{rr,0},$$
$$\sigma^{\Sigma}_{rr,1}=-\frac{t}{\ln(t/\beta)}\frac{2c_2^2\delta}{R}\left[\frac{\sigma_1}{c_1}\cos(\theta-\alpha)+\frac{\sigma_2}{c_2}\sin(\theta-\alpha)\right],$$
$$\sigma^{\Sigma}_{r\alpha,1}=\frac{t}{\ln(t/\beta)}\frac{2c_2^2\delta}{R}\left[\frac{\sigma_2}{c_2}\cos(\theta-\alpha)-\frac{\sigma_1}{c_1}\sin(\theta-\alpha)\right],$$

$$\sigma^{\Sigma}_{\alpha\alpha,1} = -\varepsilon\sigma^{\Sigma}_{rr,1},$$
$$\sigma^{\Sigma}_{rr,2} = -2\delta[\sigma_1 æ\cos 2(\theta-\alpha) + \sigma_2\sin 2(\theta-\alpha)],$$
$$\sigma^{\Sigma}_{r\alpha,2} = 2\delta[\sigma_2\cos 2(\theta-\alpha) - \sigma_1 æ\sin 2(\theta-\alpha)],$$
$$\sigma^{\Sigma}_{\alpha\alpha,2} = -\varepsilon\sigma^{\Sigma}_{rr,2}.$$

Перейдем к конечно-разностному решению. По аналогии с (12) разложим потенциалы в ряд Фурье по углу $(\theta-\alpha)$:

$$\varphi^1 = \sum_{n=0}^{\infty}[\varphi^c_n\cos n(\theta-\alpha) + \varphi^s_n\sin n(\theta-\alpha)],$$
$$\psi^1 = \sum_{n=0}^{\infty}[\psi^c_n\cos n(\theta-\alpha) + \psi^s_n\sin n(\theta-\alpha)]. \qquad (17)$$

Тогда для каждого коэффициента ряда Фурье (17) имеем волновые уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi^{c,s}_n}{\partial t^2} = c_1^2\left(\frac{\partial^2\varphi^{c,s}_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^{c,s}_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}\varphi^{c,s}_n\right),$$
$$\frac{\partial^2\psi^{c,s}_n}{\partial t^2} = c_2^2\left(\frac{\partial^2\psi^{c,s}_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi^{c,s}_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}\psi^{c,s}_n\right). \qquad (18)$$

Граничные условия (3) после разложения в ряд Фурье будут следующими:

$$\varphi^c_{n,r} = J_0^{-1/2}(J_{,\eta}u^{0c}_{\eta,n} - J_{,\zeta}u^{0c}_{\zeta,n}) + n\psi^s_n/r,$$
$$\varphi^s_{n,r} = J_0^{-1/2}(J_{,\eta}u^{0s}_{\eta,n} - J_{,\zeta}u^{0s}_{\zeta,n}) - n\psi^c_n/r,$$
$$\psi^c_{n,r} = J_0^{-1/2}(J_{,\eta}u^{0c}_{\zeta,n} + J_{,\zeta}u^{0c}_{\eta,n}) - n\varphi^s_n/r, \qquad (19)$$
$$\psi^s_{n,r} = J_0^{-1/2}(J_{,\eta}u^{0s}_{\zeta,n} + J_{,\zeta}u^{0s}_{\eta,n}) + n\varphi^c_n/r$$
$$\left(r = a\sqrt{\operatorname{sh}^2\zeta_0 + \cos^2\eta}\right).$$

Здесь $u^{0s}_{\zeta,n}$, $u^{0s}_{\eta,n}$, $u^{0c}_{\zeta,n}$, $u^{0c}_{\eta,n}$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье перемещений в падающей волне.

Систему уравнений (18) с граничными условиями (19) решаем методом конечных разностей по явной схеме типа «крест». Шаги разностной сетки выбираем из условия устойчивости Куранта. Для того чтобы минимизировать численную дисперсию, полагаем $c_1\tau = h_\varphi$, $c_2\tau = h_\psi$, где τ — шаг по времени, h_φ, h_ψ — шаги по пространству соответственно для уравнений относительно скалярного и векторного потенциалов перемещений.

За единицы измерения расстояния, скорости и плотности приняты большая полуось эллипса ($a_1 = a\operatorname{ch}\zeta_0$), скорость распространения продольных волн c_1 и плотность упругой среды ρ.

На рис. 3–19 приведены графики распределения напряжений по углу η в момент времени $t = 10$, а также осциллограммы напряжений. Напряжения рассчитывались в отраженных и дифракционных волнах при $\theta = 0$, $\nu = 0{,}3$. Рассматривались различные соотношения осей эллипса: $a_2 = 0{,}1$;

0,5; 0,9 ($a_2 = a\operatorname{sh}\zeta_0$ — малая полуось эллипса). Сплошные кривые отвечают конечно-разностному решению, штриховые — асимптотическому решению (16).

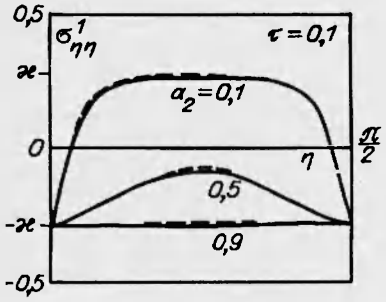

Рис. 3

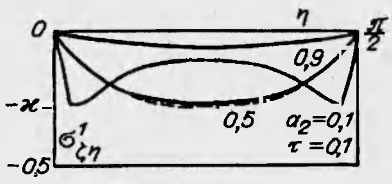

Рис. 4

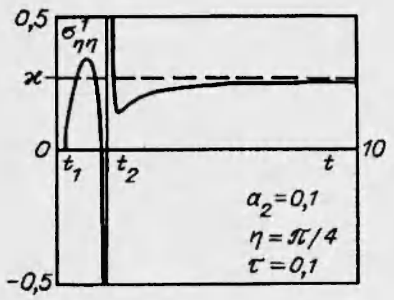

Рис. 5

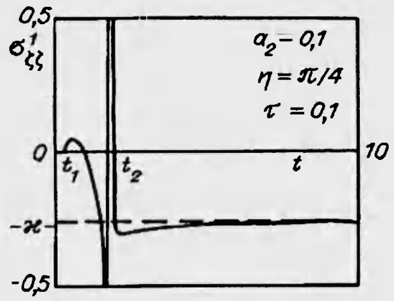

Рис. 6

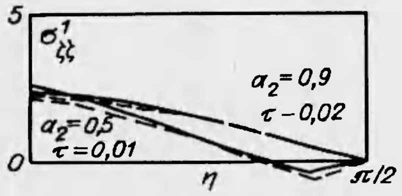

Рис. 7

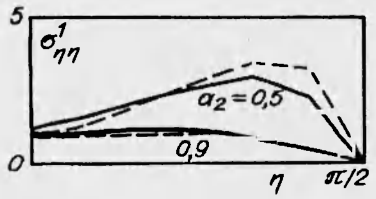

Рис. 8

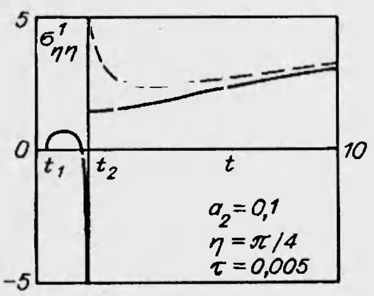

Рис. 9

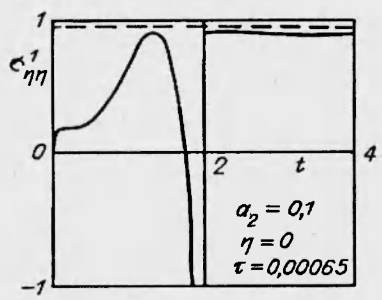

Рис. 10

На рис. 3–11 представлены графики напряжений, возникающих при действии продольной волны ($\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = 0$). Результаты расчетов при $n = 0$ приведены на рис. 3–6. Расчеты проводились при $\tau = 0,1$. Видно, что при $n = 0$, начиная с $t \geqslant 10$, напряжения с точностью до погрешностей построения графиков совпадают с асимптотическим решением (16). Анализ формул (16) и рис. 3-6 показывают, что для падающей продольной волны выполняются следующие неравенства:

$$-æ \leqslant \sigma^1_{\zeta\zeta}/\sigma_1 \leqslant æ, \quad -æ \leqslant \sigma^1_{\eta\eta}/\sigma_1 \leqslant æ, \quad 0 \leqslant \sigma^1_{\zeta\eta}/\sigma_1 \leqslant æ.$$

Рис. 7–9 иллюстрируют поведение напряжений при $n = 1$. Как показали расчеты, при $a_2 = 0{,}9$, начиная с $t \simeq 5$, конечно-разностное решение и асимптотика совпадают. При уменьшении малой полуоси эллипса соответствие асимптотики и численного счета достигается позже. Так, при $a_2 = 0{,}1$ оно достигается уже для $t \simeq 10$ (рис. 9). Чтобы достичь требуемой точности при конечно-разностном решении задачи, приходится значительно измельчать шаги разностной сетки при уменьшении a_2. Если для $a_2 = 0{,}9$ достаточно полагать $\tau = 0{,}02$, то для $a_2 = 0{,}1$ шаг $\tau = 0{,}005$ уже не во всех точках по углу позволяет считать с приемлемой точностью.

Результаты расчетов при $n = 2$ представлены на рис. 10, 11. Из сопоставления асимптотического и численного решений видно, что при $t > 2$ значения напряжений остаются постоянными во времени и стремятся к асимптотическим значениям (16) при уменьшении шагов разностной сетки. Расчеты, проведенные при $n = 3$; 4; 5, показывают, что амплитуды возмущений близки к нулю при $t \simeq 4$.

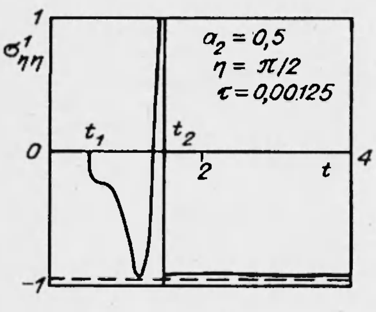

Рис. 11

На осциллограммах напряжений (рис. 5, 6, 9–11) время появления возмущений соответствует времени прихода в данную точку r осесимметричной продольной волны, начинающей двигаться при $t = 0$ от радиуса $r = a_1$ к центру эллипса. Это время определяется по формуле $t_1 = (a_1 - r)/c_1$. Время, где заканчиваются острые всплески возмущений, отвечает приходу «отраженной от центра» осесимметричной волны и определяется по формуле $t_2 = (a_1 + r)/c_1$.

На рис. 12–19 приведены напряжения, рассчитанные при действии сдвиговой волны ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1$), на рис. 12–14 представлена нулевая форма, на рис. 15–17 — первая форма, а на рис. 18, 19 — вторая форма. Так же как и при действии продольной волны, осциллограммы напряжений при $t \simeq 10/c_1$ практически совпадают с асимптотическим решением для $n = 0$; 1; 2. Время появления на осциллограммах возмущений и время, когда заканчиваются острые всплески возмущений, определяется по аналогичным случаю продольной волны формулам, в которых вместо c_1 стоит c_2:

$$t_1 = (a_1 - r)/c_2, \quad t_2 = (a_1 + r)/c_2.$$

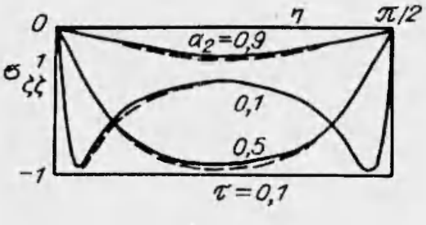

Рис. 12

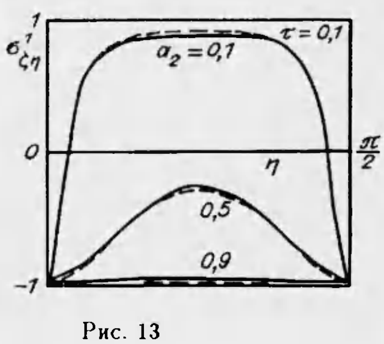

Рис. 13

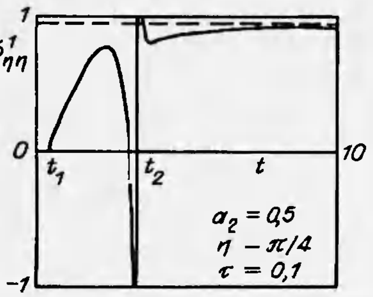

Рис. 14

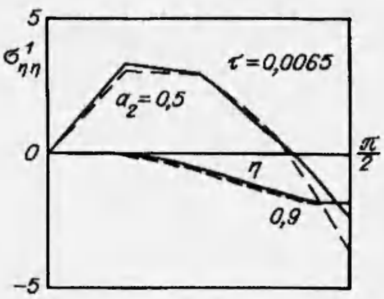

Рис. 15

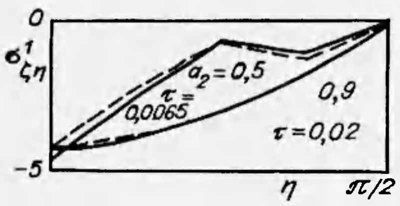

Рис. 16

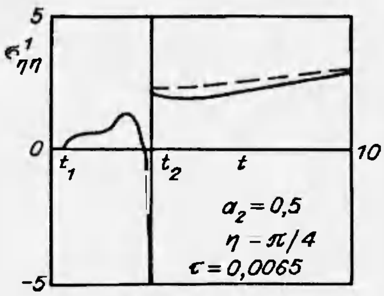

Рис. 17

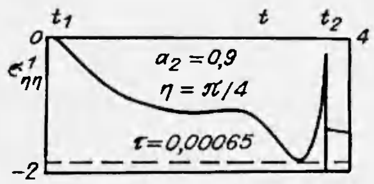

Рис. 18

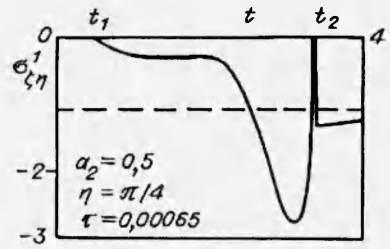

Рис. 19

Таким образом, сравнение численного и аналитического решений показывает, что при $t \simeq 10/c_1$ параметры возмущений с большой точностью совпадают с асимптотическим решением (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.** Дифракция упругих волн // Прикл. механика. 1978. Т. 14, № 8. С. 3–15.
2. **Горшков А. Г.** Дифракция слабых ударных волн на деформируемых телах, погруженных в жидкость // Прикл. механика. 1980. Т. 16, № 5. С. 3–11.
3. **Pao Y. H., Mow C. C.** The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. N. Y., 1973.
4. **Morse P. M., Rubenstein P. J.** The diffraction of waves by ribbons and slitts // Phys. Rev. 1938. V. 54, N 1. P. 895–898.
5. **Burke J. E., Twersky V.** In scattering of semielliptic protuberance on a ground plane // J. Opt. Soc. Amer. 1964. V. 54, N 6. P. 732–744.
6. **Baracat R.** Diffraction of a plane waves by an elliptic cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1963. V. 35, N 12. P. 1990–1996.
7. **Varatharajulu V. V., Pao Y. H.** Scattering matrix for elastic waves. I. Theory // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 60, N 3. P. 556–567.

8. **Varadan V. V.** Scattering matrix for elastic waves. 11. Application to elliptic cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63, N 4. P. 1014–1024.

9. **Банаф Р. П., Голдсмит В.** Дифракция стационарных упругих волн на препятствиях произвольной формы // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Прикл. механика: Пер. журн. Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1963. Т. 30, № 4. С. 126–134.

10. **Vaidyanathan S., Kouris D.** Effect of an elliptical inhomogeneous inclusion with a slipping interface on the elastic field of a concentrated moment // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1992. V. 59. P. 780–782.

11. **Warren W.** The edge dislocation inside an elliptical inclusion // Mech. Mat. 1989. V. 2. P. 319–330.

12. **Сорока П. Н.** Отражение плоской гармонической упругой волны от выпуклой некруговой цилиндрической полости // Прикл. механика. 1988. Т. 24, № 2. С. 83–89.

13. **Рубцов Ю. К., Сорока П. Н.** Распространение высокочастотных гармонических упругих волн от осесимметричной полости // Теорет. и прикл. механика: Респ. межвед. науч.-техн. сб. Киев–Донецк, 1987. Вып. 18. С. 87–95.

14. **Синяев А. Я., Кальц А. Л.** Исследование концентраций динамических напряжений в среде с эллиптической неоднородностью // Результаты комплексных исследований в сейсмоактивных районах Казахстана. Алма-Ата, 1984. С. 171–179.

15. **Рубцов Ю. К.** Отражение плоской ступенчатой волны сжатия от выпуклой цилиндрической полости // Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 4. С. 26–33.

16. **Пинчукова Н. И.** Нестационарная дифракция упругой волны на жестком цилиндре // Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископаемых. 1986. № 3. С. 81–84.

17. **Янке Е., Эмде Ф., Леш.** Специальные функции. М.: Наука, 1971.

18. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972.

Поступила в редакцию 18/X 1994 г.