Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 2

РЕГУЛЯРНЫЕ ТИПА (2,1) ПОДМОДЕЛИ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

УДК 533

Л. В. Овсянников

**Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск**

Тип (2,1) частично инвариантных решений (подмоделей) выделяется значениями ранга $\sigma = 2$ и дефекта $\delta = 1$. Свойство регулярности таких решений означает, что ведущая подгруппа (подалгебра), относительно которой определяется частично инвариантное решение типа (2,1), имеет в базовом пространстве представления ровно два функционально независимых инварианта, являющихся функциями независимых переменных [1]. Для уравнений газовой динамики с уравнением состояния общего вида, допускающих алгебру Ли операторов L_{11}, регулярные решения типа (2,1) возможны только относительно некоторых трехмерных подалгебр $L_{3,i}$. Исчерпывающий список таких подалгебр легко извлекается из оптимальной системы ΘL_{11}, приведенной в [2]. Он состоит из 12 не подобных представителей, каждый из которых порождает регулярную подмодель типа (2,1). Настоящая работа посвящена описанию всех этих подмоделей. Ранее такие классы решений указывались лишь выборочно [1, 3].

1. Предварительные сведения. Рассматриваются уравнения газовой динамики

$$\rho D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \qquad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \qquad DS = 0, \qquad p = F(\rho, S) \tag{1.1}$$

в стандартных обозначениях времени t, координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$ и искомых величин: вектора скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$, плотности ρ, давления p и энтропии S. Символ D обозначает материальную производную: $D = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$. Функция F задает уравнение состояния газа (последнее в (1.1)) и считается произвольно фиксированной достаточно гладкой функцией, удовлетворяющей неравенствам $F_\rho > 0$, $F_S > 0$. В описании подмоделей участвуют также скорость звука c, причем $c^2 = F_\rho$, и удельная энтальпия $e = \int \rho^{-1} F_\rho \, d\rho$.

Множество всех подмоделей типа (2,1) системы (1.1) является объединением подмножеств подмоделей двух характеристических классов: эволюционного χ^e и стационарного χ^s (аналогичное подразделение делалось в [4]). Инвариантная подсистема уравнений в подмоделях класса χ^e имеет качественное сходство с системой уравнений инвариантной подмодели одномерных неустановившихся движений газа. Характерное свойство таких систем — их гиперболический тип. При этом отыскание решений сводится к одному квазилинейному уравнению второго порядка гиперболического типа для лагранжевой координаты. Инвариантная подсистема уравнений в подмоделях класса χ^s имеет качественное сходство с системой уравнений двумерных установившихся течений газа. Характерным свойством таких систем является их смешанный, эллиптико-гиперболический тип. Для этих подмоделей возможно введение функции тока, получение интегралов Бернулли и завихренности.

В каждой подмодели типа (2,1) участвует одна «лишняя» искомая функция, которая не инвариантна и удовлетворяет переопределенной системе дифференциальных уравнений. Поэтому вопрос о существовании решений типа (2,1) не тривиален, ответ на него получается в процессе приведения упомянутой переопределенной системы к пассивной форме.

В итоге формируется определенная инвариантная подсистема, для решений которой возможно представление некоторых конечных интегралов.

Формирование инвариантной подсистемы связано с введением вспомогательной инвариантной искомой функции h, которая предполагается отличной от нуля. В случае $h = 0$ исходная система распадается на две подсистемы, одна из которых определяет «лишнюю» функцию, а другая не зависит от этой функции и является инвариантной относительно некоторой двумерной подгруппы. При этом редукции всего решения к инвариантному нет, за исключением подмодели $\Pi(3, 15^{00})$. Вместе с тем наиболее интересен случай $h \neq 0$, когда «лишняя» функция существенно влияет на структуру инвариантной подсистемы. Поэтому ниже неравенство $h \neq 0$ предполагается выполненным всюду, где это возможно.

Подмодели, получаемые с помощью ведущей подалгебры $L_{3.i}$, индексируются символом $\Pi(3, i)$, где i — порядковый номер трехмерной подалгебры из табл. 6 работы [2].

Вначале рассматриваются подмодели характеристического класса χ^c. Таких подмоделей всего семь. Их представление идет в порядке возрастающей сложности.

2. $\Pi(3, 46)$. Базис подалгебры: $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_4 = t\partial_x + \partial_u$. Инварианты: t, z, v, w, ρ, p, S. «Лишняя» u.

Представление решения:

$$(v, w, \rho, p, S) \mid (t, z), \qquad u = u(t, x, y, z).$$

Уравнения подмодели:

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = 0; \tag{2.1$_1$}$$

$$v_t + wv_z = 0; \tag{2.1$_2$}$$

$$w_t + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0; \tag{2.1$_3$}$$

$$\rho_t + w\rho_z + \rho(u_x + w_z) = 0; \tag{2.1$_4$}$$

$$S_t + wS_z = 0. \tag{2.1$_5$}$$

Из (2.1$_4$) следует, что $u_x = h$ есть функция только от переменных t, z. Вместе с (2.1$_1$) это дает переопределенную систему для u:

$$u_x = h(t, z), \qquad u_t + vu_y + wu_z + hu = 0. \tag{2.2}$$

Условие совместности системы (2.2) таково:

$$h_t + wh_z + h^2 = 0. \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3), (2.1$_2$), (2.1$_3$), (2.1$_4$) (где подставлено $u_x = h$) и (2.1$_5$) образуют инвариантную подсистему для функций u, w, ρ, S, h.

Лагранжева координата $\xi = \xi(t, z)$ вводится соотношениями

$$\rho = h\xi_z, \qquad \rho w = -h\xi_t, \tag{2.4}$$

в силу которых вместе с (2.3) уравнение (2.1$_4$) удовлетворено тождественно. Кроме того, (2.1$_2$) и (2.1$_5$) имеют интегралы $v = V(\xi)$, $S = S(\xi)$, а (2.3) интегрируется в виде

$$h = 1/(t + T(\xi)) \tag{2.5}$$

с произвольными функциями $V(\xi)$, $S(\xi)$ и $T(\xi)$.

Переопределенная система (2.2) имеет общее решение

$$u = h(t, \xi)[x + X(\xi, \lambda)], \qquad \lambda = y - tV(\xi)$$

с произвольной функцией $X(\xi,\lambda)$.

Оставшееся уравнение (2.1_3) с помощью (2.4) и (2.5) приводится к уравнению для лагранжевой координаты ξ:

$$(\xi_t^2 - c^2\xi_t^2)\xi_{zz} - 2\xi_t\xi_z\xi_{zt} + \xi_z^2\xi_{tt} = \xi_z^2\left[h^{-1}F_S S'(\xi) - hc^2T'(\xi)\right]. \tag{2.6}$$

В уравнении (2.6) все коэффициенты и правая часть — известные функции от t, ξ, ξ_t, ξ_z.

3. $\Pi(3,38_1^{000})$ (из серии подалгебр $L_{3,38}$ выделяется подалгебра с $\alpha=\sigma=\tau=0$, $\beta=1$). Базис подалгебры: $X_3=\partial_z$, $X_1+X_5=\partial_x+t\partial_y+\partial_v$, $X_6=t\partial_z+\partial_w$. Инварианты: t, $\lambda=x-y/t$, u, $V=v-y/t$, ρ, p, S. «Лишняя» w.

Представление решения:

$$(\rho,p,S)\mid(t,\lambda),\quad u=U(t,\lambda)+t^{-1}V(t,\lambda),\quad v=y/t+V(t,\lambda),\quad w=W(t,\lambda,y,z).$$

Уравнения подмодели:

$$U_t+UU_\lambda+(1+t^{-2})\rho^{-1}p_\lambda=2t^{-2}V; \tag{3.1_1}$$

$$V_t+UV_\lambda+t^{-1}V-t^{-1}\rho^{-1}p_\lambda=0; \tag{3.1_2}$$

$$W_t+UW_\lambda+(y/t+V)\,W_y+WW_z=0; \tag{3.1_3}$$

$$\rho_t+U\rho_\lambda+\rho\left(U_\lambda+t^{-1}+W_z\right)=0; \tag{3.1_4}$$

$$S_t+US_\lambda=0. \tag{3.1_5}$$

Из (3.1_4) следует, что $W_z=h$ есть функция только от переменных t, λ. Вместе с (3.1_3) это дает переопределенную систему для W:

$$W_z=h(t,\lambda),\qquad W_t+UW_\lambda+(y/t+V)\,W_y+hW=0. \tag{3.2}$$

Условие совместности системы (3.2) таково:

$$h_t+Uh_\lambda+h^2=0. \tag{3.3}$$

Уравнения (3.3), (3.1_1), (3.1_2), (3.1_4) (где подставлено $W_z=h$) и (3.1_5) образуют инвариантную подсистему для функций u, V, ρ, S, h.

Лагранжева координата $\xi=\xi(t,\lambda)$ вводится соотношениями

$$t\rho=h\xi_\lambda,\qquad t\rho U=-h\xi_t, \tag{3.4}$$

в силу которых вместе с (3.3) уравнение (3.1_4) удовлетворено тождественно. Кроме того, комбинация (3.1_1) и (3.1_2), а также комбинация (3.1_5) и (3.3) имеют интегралы

$$U+(t+t^{-1})V=H(\xi),\quad S=S(\xi),\qquad h=1\Big/(t+T(\xi)) \tag{3.5}$$

с произвольными функциями $H(\xi)$, $S(\xi)$, $T(\xi)$.

Переопределенная система (3.2) имеет общее решение

$$W=h(t,\xi)[z+Z(\xi,j)],\qquad j=y/t-\int t^{-1}V(t,\xi)\,dt$$

с произвольной функцией $Z(\xi,j)$.

Оставшееся уравнение (3.1_1) с помощью (3.4) и (3.5) приводится к уравнению для лагранжевой координаты $\xi(t,\lambda)$, аналогичному (2.6).

4. $\Pi(3, 38_2^{\square 00})$ (из серии подалгебр $L_{3,38}$ выделяется подалгебра с $\alpha = \beta = \sigma = 0$, $\tau = 1$). Базис подалгебры: $X_3 = \partial_z$, $X_5 = t\partial_y + \partial_v$, $X_2 + X_6 = \partial_y + t\partial_z + \partial_w$. Инварианты: t, x, u, $W = w + tv - y$, ρ, p, S. «Лишняя» v.

Представление решения:

$$(u, \rho, p, S) \mid (t, x), \qquad w = y - tv + W(t, x), \qquad v = v(t, x, y, z).$$

Уравнения подмодели:

$$u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x = 0; \tag{4.1$_1$}$$

$$v_t + uv_x + vv_y + (y - tv + W)v_z = 0; \tag{4.1$_2$}$$

$$W_t + uW_x = 0; \tag{4.1$_3$}$$

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x + \rho(v_y - tv_z) = 0; \tag{4.1$_4$}$$

$$S_t + uS_x = 0. \tag{4.1$_5$}$$

Из (4.1$_4$) следует, что $v_y - tv_z = h$ есть функция только от переменных t, x. Вместе с уравнением (4.1$_2$) это дает переопределенную систему для v:

$$v_y - tv_z = h(t, x), \qquad v_t + uv_x + (y + W)v_z + hv = 0. \tag{4.2}$$

Приведение этой системы в инволюцию осуществляется в «два такта» и дает следующий результат. С новой вспомогательной функцией $k = k(t, x)$ пассивная форма системы (4.2) есть

$$v_z = k, \qquad v_y = tk + h, \qquad v_t + uv_x + hv = -(y + W)k, \tag{4.3}$$

причем функции h и k связаны уравнениями

$$h_t + uh_x + h^2 + 2k = 0, \qquad k_t + uk_x + hk = 0. \tag{4.4}$$

Уравнения (4.4), (4.1$_1$), (4.1$_3$), (4.1$_4$) (где подставлено $v_y - tv_z = h$) и (4.1$_5$) образуют инвариантную подсистему для функций u, W, ρ, S, h, k.

Лагранжева координата $\xi = \xi(t, x)$ вводится соотношениями

$$\rho = k\xi_x, \qquad \rho u = -k\xi_t, \tag{4.5}$$

в силу которых вместе с (4.4) уравнение (4.1$_4$) удовлетворено тождественно. Кроме того, уравнения (4.1$_3$), (4.1$_5$) имеют интегралы $W = W(\xi)$, $S = S(\xi)$ с произвольными функциями $W(\xi)$, $S(\xi)$.

Общее решение переопределенной системы (4.3) находится в виде

$$v = (z + ty)k + yh + V(t, x),$$

где функция $V(t, x)$ является общим решением уравнения

$$V_t + uV_x + hV + kW = 0. \tag{4.6}$$

После перехода к лагранжевым координатам t, ξ система (4.4), (4.6) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$h_t + h^2 + 2k = 0, \qquad k_t + hk = 0, \qquad V_t + hV + kW = 0,$$

которая интегрируется явно. Общее решение подсистемы (4.4), (4.6) есть

$$h = \frac{2At + B}{At^2 + Bt + C}, \qquad k = \frac{A}{At^2 + Bt + C}, \qquad V = W\frac{At + D}{At^2 + Bt + C}, \tag{4.7}$$

где A, B, C, D — произвольные функции от ξ.

Оставшееся уравнение (4.1_1) с помощью (4.5) и (4.7) приводится к уравнению для лагранжевой координаты $\xi(t,x)$, аналогичному (2.6).

5. $\Pi(3,15^{00})$ (из серии подалгебр $L_{3,15}$ выделяется подалгебра с $\alpha=\beta=0$). Базис подалгебры: $X_3+X_5=\partial_z+t\partial_y+\partial_v$, $X_2-X_6=\partial_y-t\partial_z-\partial_w$, $X_7=y\partial_z-z\partial_y+v\partial_w-w\partial_v$. Инварианты: t, x, u, V, ρ, p, S, где

$$V=\sqrt{\left(v-\frac{ty+z}{t^2+1}\right)^2+\left(w-\frac{tz-y}{t^2+1}\right)^2}.$$

«Лишней» является функция θ, участвующая в выражениях

$$v=\frac{ty+z}{t^2+1}+V\cos\theta,\qquad w=\frac{tz-y}{t^2+1}+V\sin\theta.$$

Представление решения:

$$(u,V,\rho,p,S)\mid(t,x),\qquad \theta=\theta(t,x,y,z).$$

Уравнения подмодели:

$$u_t+uu_x+\rho^{-1}p_x=0; \tag{5.1$_1$}$$

$$V_t+uV_x+\frac{tV}{t^2+1}=0; \tag{5.1$_2$}$$

$$\theta_t+u\theta_x+\left(V\cos\theta+\frac{ty+z}{t^2+1}\right)\theta_y+\left(V\sin\theta+\frac{tz-y}{t^2+1}\right)\theta_z=\frac{1}{t^2+1}; \tag{5.1$_3$}$$

$$\rho_t+u\rho_x+\rho\left(u_x+\frac{2t}{t^2+1}-V\sin\theta\,\theta_y+V\cos\theta\,\theta_z\right)=0; \tag{5.1$_4$}$$

$$S_t+uS_x=0. \tag{5.1$_5$}$$

Из (5.1_4) следует, что $\sin\theta\,\theta_y-\cos\theta\,\theta_z=h$ есть функция только от переменных t, x. Вместе с (5.1_3) это дает переопределенную систему для θ:

$$\begin{gathered}\sin\theta\,\theta_y-\cos\theta\,\theta_z=h(t,x),\\ \theta_t+u\theta_x+\left(V\cos\theta+\frac{ty+z}{t^2+1}\right)\theta_y+\left(V\sin\theta+\frac{tz-y}{t^2+1}\right)\theta_z=\frac{1}{t^2+1}.\end{gathered} \tag{5.2}$$

Приведение системы (5.2) в инволюцию показывает, что необходимо $h=0$ и $\theta_y=\theta_z=0$. Это означает, что подмодель $\Pi(3,15^{00})$ редуцируется к инвариантной подмодели типа (2,0) относительно подалгебры $L_{2,21}$ с базисом X_3+X_5, X_2-X_6. Подробный анализ содержится в дипломной работе С. В. Головина.

6. $\Pi(3,13)$. Базис подалгебры: $X_2=\partial_y$, $X_3=\partial_z$, $X_7=y\partial_z-z\partial_y+v\partial_w-w\partial_v$. Инварианты: t, x, u, $q=\sqrt{v^2+w^2}$, ρ, p, S. «Лишняя» $\theta=\operatorname{arctg}(w/v)$.

Представление решения:

$$(u,q,\rho,p,S)\mid(t,x),\qquad v=q\cos\theta,\qquad w=q\sin\theta,\qquad \theta=\theta(t,x,y,z).$$

Уравнения подмодели:

$$u_t+uu_x+\rho^{-1}p_x=0; \tag{6.1$_1$}$$

$$q_t+uq_x=0; \tag{6.1$_2$}$$

$$\theta_t+u\theta_x+q\cos\theta\,\theta_y+q\sin\theta\,\theta_z=0; \tag{6.1$_3$}$$

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x + \rho q(-\sin\theta\,\theta_y + \cos\theta\,\theta_z) = 0; \tag{6.1$_4$}$$

$$S_t + uS_x = 0. \tag{6.1$_5$}$$

Из (6.1$_4$) следует, что $-\sin\theta\,\theta_y + \cos\theta\,\theta_z = h$ есть функция только от переменных t, x. Вместе с (6.1$_3$) это дает переопределенную систему для θ:

$$-\sin\theta\,\theta_y + \cos\theta\,\theta_z = h(t,x), \qquad \theta_t + u\theta_x + q\cos\theta\,\theta_y + q\sin\theta\,\theta_z = 0. \tag{6.2}$$

Условие совместности системы (6.2) таково:

$$h_t + uh_x + h^2 q = 0. \tag{6.3}$$

Уравнения (6.3), (6.1$_1$), (6.1$_2$), (6.1$_4$) (где подставлено h) и (6.1$_5$) образуют инвариантную подсистему для функций u, q, ρ, S, h.

Лагранжева координата $\xi = \xi(t,x)$ вводится соотношениями

$$\rho = h\xi_x, \quad \rho u = -h\xi_t, \tag{6.4}$$

в силу которых вместе с (6.3) уравнение (6.1$_4$) удовлетворено тождественно. Кроме того, уравнения (6.1$_2$), (6.1$_5$), а также (6.3) имеют интегралы

$$q = Q(\xi), \qquad S = S(\xi), \qquad h = 1/(tQ(\xi) + H(\xi)) \tag{6.5}$$

с произвольными функциями $Q(\xi)$, $S(\xi)$, $H(\xi)$.

Переопределенная система (6.2) имеет общее решение, неявно определенное уравнением

$$f(\xi,\lambda,\mu) = 0, \qquad \lambda = y - h^{-1}\cos\theta, \qquad \mu = z - h^{-1}\sin\theta$$

с произвольной функцией f, гарантирующей возможность определения θ.

Оставшееся уравнение (6.1$_1$) с помощью (6.4) и (6.5) приводится к уравнению для лагранжевой координаты $\xi(t,x)$, аналогичному (2.6).

7. П(3, 11). Базис подалгебры: $X_1 = \partial_x$, $X_4 = t\partial_x + \partial_u$, $X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v$. Вводятся цилиндрические координаты соотношениями

$$y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta, \quad v = V\cos\theta - W\sin\theta, \quad w = V\sin\theta + W\cos\theta. \tag{7.1}$$

Инварианты: t, r, V, W, ρ, p, S. «Лишняя» u.

Представление решения:

$$(V, W, \rho, p, S) \mid (t, r), \qquad u = u(t, x, r, \theta).$$

Уравнения подмодели:

$$u_t + uu_x + Vu_r + r^{-1}Wu_\theta = 0; \tag{7.2$_1$}$$

$$V_t + VV_r + \rho^{-1}p_x = r^{-1}W^2; \tag{7.2$_2$}$$

$$W_t + VW_r = -r^{-1}VW\cdot \tag{7.2$_3$}$$

$$\rho_t + V\rho_r + \rho\left(u_x + V_r + r^{-1}V\right) = 0; \tag{7.2$_4$}$$

$$S_t + VS_r = 0. \tag{7.2$_5$}$$

Из (7.2$_4$) следует, что $u_x = h$ зависит только от переменных t, r. Вместе с уравнением (7.2$_1$) это дает переопределенную систему для u:

$$u_x = h(t,r), \qquad u_t + Vu_r + r^{-1}Wu_\theta + hu = 0. \tag{7.3}$$

Условие совместности системы (7.3) таково:

$$h_t + Vh_r + h^2 = 0. \tag{7.4}$$

Уравнения (7.4), (7.2_2), (7.2_3), (7.2_4) (где подставлено $u_x = h$) и (7.2_5) образуют инвариантную подсистему для функций V, W, ρ, S, h.

Лагранжева координата $\xi = \xi(t, r)$ вводится соотношениями

$$r\rho = h\xi_r, \qquad r\rho V = -h\xi_t, \tag{7.5}$$

в силу которых вместе с (7.4) удовлетворено уравнение (7.2_4). Кроме того, уравнения (7.2_3), (7.2_5), а также (7.4) имеют интегралы

$$rW = Q(\xi), \qquad S = S(\xi), \qquad h = 1/(t + T(\xi)) \tag{7.6}$$

с произвольными функциями $Q(\xi)$, $S(\xi)$, $T(\xi)$.

Переопределенная система (7.3) имеет общее решение

$$u = h(t,\xi)[x + X(\xi,\eta)], \qquad \eta = \theta - Q(\xi)\int \frac{dt}{r^2(t,\xi)}$$

с произвольной функцией $X(\xi, \eta)$.

Оставшееся уравнение (7.2_2) с помощью (7.5) и (7.6) приводится к уравнению для лагранжевой координаты $\xi(t, r)$, аналогичному (2.6).

8. $\Pi(3, 8)$. Базис подалгебры образуют операторы вращений X_7, X_8, X_9. Задача рассматривается в сферических координатах. Ее решение изложено в работе автора [5].

Этим исчерпан список регулярных подмоделей типа (2,1) класса χ^e. Далее рассматриваются подмодели класса χ^s. Таких подмоделей всего пять. И здесь изложение идет в порядке возрастающей сложности.

9. $\Pi(3, 29)$. Базис подалгебры: $X_1 = \partial_x$, $X_4 = t\partial_x + \partial_u$, $X_{10} = \partial_t$. Инварианты: y, z, v, w, ρ, p, S. «Лишняя» u.

Представление решения:

$$(v, w, \rho, p, S) \mid (y, z), \qquad u = u(t, x, y, z).$$

Уравнения подмодели:

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = 0; \tag{9.1_1}$$

$$vv_y + wv_z + \rho^{-1}p_y = 0; \tag{9.1_2}$$

$$vw_y + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0; \tag{9.1_3}$$

$$v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0; \tag{9.1_4}$$

$$vS_y + wS_z = 0. \tag{9.1_5}$$

Из (9.1_4) следует, что $u_x = h$ есть функция только от переменных y, z. Вместе с уравнением (9.1_1) это дает переопределенную систему для u:

$$u_x = h(y, z), \qquad u_t + vu_y + wu_z + hu = 0. \tag{9.2}$$

Условие совместности системы (9.2) таково:

$$vh_y + wh_z + h^2 = 0. \tag{9.3}$$

Уравнения (9.3), (9.1_2), (9.1_3), (9.1_4) (где подставлено $u_x = h$) и (9.1_5) образуют инвариантную подсистему для функций v, w, ρ, S, h.

Функция тока $\psi = \psi(y, z)$ вводится соотношениями

$$\rho v = h\psi_z, \qquad \rho w = -h\psi_y, \tag{9.4}$$

в силу которых вместе с (9.3) автоматически удовлетворено уравнение (9.1_4). Кроме того, (9.1_5) имеет интеграл $S = S(\psi)$ с произвольной функцией $S(\psi)$, а из (9.1_2) и (9.1_3) следует интеграл Бернулли

$$v^2 + w^2 + 2e(\rho, S) = 2b(\psi) \tag{9.5}$$

с произвольной функцией $b(\psi)$ и энтальпией e. Исключением давления из уравнений (9.1_2) и (9.1_3) получается также интеграл завихренности для величины $v_z - w_y$:

$$h(v_z - w_y) = F_\rho(\rho, S) + \rho\,[G(\psi) - e_S(\rho, S)] \tag{9.6}$$

($G(\psi)$ — произвольная функция).

Общее решение переопределенной системы (9.2) дается формулой

$$u = h(y, z)(x + X(t, y, z)),$$

где функция $X = X(t, y, z)$ находится как общее решение уравнения

$$X_t + vX_y + wX_z = 0.$$

Для функции тока $\psi(y, z)$ из (9.4)–(9.6) можно получить одно квазилинейное уравнение второго порядка, которое будет содержать также неизвестную функцию h. Поэтому упомянутое уравнение следует решать вместе с (9.3).

10. $\Pi(3, 27^{00})$. Базис подалгебры: $X_3 = \partial_z$, $X_6 = t\partial_z + \partial_w$, $X_4 + X_{10} = t\partial_x + \partial_u + \partial_t$. Инварианты: $\lambda = x - \frac{1}{2}t^2$, y, $U = u - t$, v, ρ, p, S. «Лишняя» w.

Представление решения:

$$u = t + U(\lambda, y), \qquad v = V(\lambda, y), \qquad (\rho, p, S) \mid (\lambda, y), \qquad w = w(t, \lambda, y, z).$$

Уравнения подмодели:

$$\begin{gathered} UU_\lambda + VU_y + \rho^{-1}p_\lambda = -1, \\ UV_\lambda + VV_y + \rho^{-1}p_y = 0, \\ w_t + Uw_\lambda + Vw_y + ww_z = 0, \\ U\rho_\lambda + V\rho_y + \rho(U_\lambda + V_y + w_z) = 0, \\ US_\lambda + VS_y = 0. \end{gathered} \tag{10.1}$$

Система (10.1) совпадает с системой (9.1) (с точностью до обозначений), кроме первого уравнения (10.1), которое в отличие от уравнения (9.1_2) имеет ненулевую правую часть (-1). Поэтому справедливы все соотношения, полученные в п. **9**, кроме интеграла Бернулли, который здесь имеет вид

$$U^2 + V^2 + 2\lambda + 2e(\rho, S) = 2b(\psi).$$

11. $\Pi(3, 23)$. Базис подалгебры: $X_1 = \partial_x$, $X_4 = t\partial_x + \partial_u$, $\alpha X_6 + X_{11} = \alpha(t\partial_z + \partial_w) + t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$. Инварианты: $\lambda = y/t$, $\mu = z/t - \alpha\ln t$, v, $w - z/t$, ρ, p, S. «Лишняя» u.

Представление решения:

$$u = u(t, x, \lambda, \mu), \quad v = \lambda + V(\lambda, \mu), \quad w = \alpha + z/t + W(\lambda, \mu), \quad (\rho, p, S) \mid (\lambda, \mu).$$

Уравнения подмодели:

$$t(u_t + uu_x) + Vu_\lambda + Wu_\mu = 0; \tag{11.1$_1$}$$

$$VV_\lambda + WV_\mu + V + \rho^{-1}p_\lambda = 0; \tag{11.1$_2$}$$

$$VW_\lambda + WW_\mu + W + \rho^{-1}p_\mu = -\alpha; \tag{11.1$_3$}$$

$$V\rho_\lambda + W\rho_\mu + \rho(tu_x + V_\lambda + W_\mu + 2) = 0; \tag{11.1$_4$}$$

$$VS_\lambda + WS_\mu = 0. \tag{11.1$_5$}$$

Из уравнения (11.1$_4$) следует, что $tu_x = h$ есть функция только от переменных λ, μ. Вместе с (11.1$_1$) это дает переопределенную систему для u:

$$tu_x = h(\lambda, \mu), \qquad tu_t + Vu_\lambda + Wu_\mu + hu = 0. \tag{11.2}$$

Условие совместности системы (11.2) таково:

$$Vh_\lambda + Wh_\mu = h - h^2. \tag{11.3}$$

Уравнения (11.3), (11.1$_2$), (11.1$_3$), (11.1$_4$) (где подставлено $tu_x = h$) и (11.1$_5$) образуют инвариантную подсистему для функций V, W, ρ, S, h.

Функция тока $\psi = \psi(\lambda, \mu)$ вводится соотношениями

$$\rho V = \frac{(h-1)^3}{h^2}\,\psi_\mu, \qquad \rho W = -\frac{(h-1)^3}{h^2}\,\psi_\lambda,$$

в силу которых вместе с (11.3) уравнение (11.1$_4$) удовлетворено тождественно. Кроме того, (11.1$_5$) имеет интеграл энтропии $S = S(\psi)$ с произвольной функцией $S(\psi)$.

Общее решение переопределенной системы (11.2) имеет вид

$$u = t^{-1}h(\lambda, \mu)[x + X(t, \lambda, \mu)],$$

где функция $X = X(t, \lambda, \mu)$ находится как общее решение уравнения

$$tX_t + VX_\lambda + WX_\mu = 0.$$

Интегралы Бернулли и завихренности здесь не получаются. Частным случаем этой подмодели является $\Pi(3, 24)$, получаемая при $\alpha = 0$.

12. $\Pi(3, 17)$. Базис подалгебры: $X_1 = \partial_x$, $X_4 = t\partial_x + \partial_u$, $X_7 + X_{10} = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v + \partial_t$. Подмодель рассматривается в цилиндрических координатах (7.1). Инварианты: r, $\lambda = \theta - t$, V, W, ρ, p, S. «Лишняя» u.

Представление решения:

$$u = u(t, x, r, \lambda), \qquad (V, W, \rho, p, S) \mid (r, \lambda).$$

Уравнения подмодели (после замены $W \to r(1 + W)$):

$$u_t + uu_x + Vu_r + Wu_\lambda = 0; \tag{12.1$_1$}$$

$$VV_r + WV_\lambda + \rho^{-1}p_r = r(1 + W)^2; \tag{12.1$_2$}$$

$$r^2(VW_r + WW_\lambda) + \rho^{-1}p_\lambda = -2rV(1 + W); \tag{12.1$_3$}$$

$$V\rho_r + W\rho_\lambda + \rho(u_x + V_r + r^{-1}V + W_\lambda) = 0; \tag{12.1$_4$}$$

$$VS_r + WS_\lambda = 0. \tag{12.1$_5$}$$

Из (12.1_4) следует, что $u_x = h$ зависит только от переменных r, λ. Вместе с (12.1_1) это дает переопределенную систему для u:

$$u_x = h(r, \lambda), \qquad u_t + Vu_r + Wu_\lambda + hu = 0. \tag{12.2}$$

Условие совместности системы (12.2) таково:

$$Vh_r + Wh_\lambda + h^2 = 0. \tag{12.3}$$

Уравнения (12.3), (12.1_2), (12.1_3), (12.1_4) (где подставлено $u_x = h$) и (12.1_5) образуют инвариантную подсистему для функций V, W, ρ, S, h.

Функция тока $\psi = \psi(r, \lambda)$ вводится соотношениями

$$r\rho V = h\psi_\lambda, \qquad r\rho W = -h\psi_r,$$

в силу которых вместе с (12.3) уравнение (12.1_4) удовлетворено тождественно. Кроме того, (12.1_5) имеет интеграл энтропии $S = S(\psi)$ с произвольной функцией $S(\psi)$.

Общее решение переопределенной системы (12.2) имеет вид

$$u = h(r, \lambda)[x + X(t, r, \lambda)],$$

где функция $X = X(t, r, \lambda)$ есть общее решение уравнения

$$X_t + VX_r + WX_\lambda = 0.$$

Из уравнений (12.1_2) и (12.1_3) получается интеграл Бернулли

$$V^2 + r^2W^2 - r^2 + 2e(\rho, S) = 2b(\psi)$$

с произвольной функцией $b(\psi)$. Интеграл завихренности находится в виде

$$\frac{h}{r\rho}[V_\lambda - (r^2(1 + W))_r] = -S'(\psi)\int \frac{F_S}{\rho^2}d\rho + G(\psi)$$

с произвольной функцией $G(\psi)$.

13. $\Pi(3, 6)$. Базис подалгебры: $X_1 = \partial_x$, $X_4 = t\partial_x + \partial_u$, $\beta X_7 + X_{11} = \beta(y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v) + t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$. Подмодель рассматривается в цилиндрических координатах (7.1). Инварианты: $\lambda = r/t$, $\mu = \theta - \beta \ln t$, V, W, ρ, p, S. «Лишняя» u.

Представление решения:

$$u = u(t, x, \lambda, \mu), \qquad (V, W, \rho, p, S) \mid (\lambda, \mu).$$

Уравнения подмодели (после замены $V \to \lambda + V$, $W \to \lambda W + \beta\lambda$):

$$t(u_t + uu_x) + Vu_\lambda + Wu_\mu = 0; \tag{13.1$_1$}$$

$$VV_\lambda + WV_\mu + V + \rho^{-1}p_\lambda = \lambda(W + \beta)^2; \tag{13.1$_2$}$$

$$\lambda^2(VW_\lambda + WW_\mu) + \lambda V(W + \beta) + \rho^{-1}p_\mu = -\lambda(\lambda + V)(W + \beta); \tag{13.1$_3$}$$

$$V\rho_\lambda + W\rho_\mu + \rho(tu_x + V_\lambda + \lambda^{-1}V + W_\mu + 2) = 0; \tag{13.1$_4$}$$

$$VS_\lambda + WS_\mu = 0. \tag{13.1$_5$}$$

Из (13.1_4) следует, что $tu_x = h$ есть функция только от переменных λ, μ. Вместе с (13.1_1) это дает переопределенную систему для u:

$$tu_x = h(\lambda, \mu), \qquad tu_t + Vu_\lambda + Wu_\mu + hu = 0. \tag{13.2}$$

Условие совместности системы (13.2) таково:

$$Vh_\lambda + Wh_\mu = h - h^2. \tag{13.3}$$

Уравнения (13.3), (13.1_2), (13.1_3), (13.1_4) (где подставлено $tu_x = h$) и (13.1_5) образуют инвариантную подсистему для функций V, W, ρ, S, h.

Функция тока $\psi = \psi(\lambda, \mu)$ вводится соотношениями

$$\lambda\rho V = \frac{(h-1)^3}{h^2}\psi_\mu, \qquad \lambda\rho W = -\frac{(h-1)^3}{h^2}\psi_\lambda,$$

в силу которых вместе с (13.3) уравнение (13.1_4) удовлетворено тождественно. Кроме того, (13.1_5) имеет интеграл энтропии $S = S(\psi)$ с произвольной функцией $S(\psi)$.

Общее решение переопределенной системы (13.2) имеет вид

$$u = t^{-1}h(\lambda,\mu)[x + X(t,\lambda,\mu)],$$

где $X = X(t,\lambda,\mu)$ есть общее решение уравнения

$$tX_t + VX_\lambda + WX_\mu = 0.$$

Интегралы Бернулли и завихренности здесь получить не удается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17326).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343, №2. С. 156–159.
2. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
3. **Grundland A. M., Lalague L.** Lie subgroups of symmetry groups of the fluid dynamics and magnetohydrodynamics equations II. Montréal, CRM–1889, 1993. P. 1–47.
4. **Хабиров С. В.** К анализу инвариантных решений ранга три уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 1995. Т. 341, №6. С. 764–766.
5. **Овсянников Л. В.** Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36, №3. С. 45–52.

Поступила в редакцию 4/VIII 1995 г.