ГОРЕНИЕ ПОРОХА ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕМСЯ ДАВЛЕНИИ

Б. В. Новожилов (*Москва*)

Исследуется модель пороха, температура поверхности T_s которого зависит от давления и начальной температуры T_0. Все процессы, происходящие в реакционном слое конденсированной фазы и в газовой фазе, считаются безынерционными. Показано, что уравнение теплопроводности с конвективным членом, граничные условия на которое связывают скорость, температуру поверхности и градиент на ней, допускает колебательные режимы. В линейном приближении колебания скорости горения могут рассматриваться в тех же терминах, что и колебания, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Имеет смысл введение таких понятий, как собственная частота, декремент затухания и резонанс.

1. Модель горения пороха. В теории горения порохов Я. Б. Зельдовича [1] указан метод исследования нестационарных процессов при горении. Суть метода состоит в том, что стационарная зависимость скорости горения $m^0(T_0, p)$ от начальной температуры T_0 и давления p может быть переведена в зависимость $m(f, p)$, где f — градиент температуры на поверхности пороха. Полученная функциональная зависимость будет справедлива и в нестационарных условиях (в связи с чем и опущен индекс у скорости горения), так как градиент определяет температуру в зоне горения, от которой и зависит скорость горения. Переход от $m^0(T_0, p)$ к $m(f, p)$ осуществляется при помощи известной связи между градиентом, скоростью горения и начальной температурой

$$\varkappa f^\circ = \frac{m^\circ}{\rho}(T_s{}^\circ - T_0) \tag{1.1}$$

справедливой в стационарных условиях ($\varkappa$ — коэффициент температуропроводности, ρ — плотность пороха). При таком подходе к изучению нестационарных явлений пренебрегается, конечно, инерционностью всех процессов, за исключением теплопроводности в конденсированной фазе.

Температура поверхности пороха T_s в теории Я. Б. Зельдовича считается постоянной, т. е. не зависящей ни от давления, ни от начальной температуры пороха. Автором [2] было показано, что в том же предположении о главной роли инерционности прогретого слоя конденсированной фазы в теории нестационарного горения пороха можно аналогичным образом учесть зависимость температуры поверхности от T_0 и p. А именно, в [3] показано, что в нестационарных условиях T_s тоже зависит от градиента и давления, причем эта зависимость $T_s(f, p)$ может быть получена из стационарного закона $T_s{}^\circ(T_0, p)$ при учете (1.1).

Настоящая работа посвящена рассмотрению процесса горения пороха при переменном давлении в линейном приближении. Для этой цели нам понадобится связь между первыми производными от скорости горения по T_0 и p с одной стороны и по f и p — с другой. Введем обозначения для производных по T_0 и p

$$\begin{aligned} k &= (T_s{}^\circ - T_0)\left(\frac{\partial \ln m^\circ}{\partial T_0}\right)_p, & r &= \left(\frac{\partial T_s{}^\circ}{\partial T_0}\right)_p \\ \nu &= \left(\frac{\partial \ln m^\circ}{\partial \ln p}\right)_{T_0}, & \mu &= \frac{1}{T_s{}^\circ - T_0}\left(\frac{\partial T_s{}^\circ}{\partial \ln p}\right)_{T_0} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Переход от этих величин, которые могут быть определены из опытов по стационарному горению, к производным по f и p удобнее всего произвести при помощи якобианов. Из соотношения (1.1) имеем

$$(T_s{}^\circ - T_0)\left(\frac{\partial \ln f^\circ}{\partial T_0}\right)_p = k + r - 1, \qquad \left(\frac{\partial \ln f^\circ}{\partial \ln p}\right)_{T_0} = \nu + \mu$$

Поэтому, например

$$\left(\frac{\partial \ln m^\circ}{\partial \ln p}\right)_{f_0} = \frac{\partial(\ln m^\circ, \ln f^\circ)}{\partial(\ln p, \ln f^\circ)} = \frac{\partial(\ln m^\circ, \ln f^\circ)/\partial(\ln p, T_0)}{\partial(\ln p, \ln f^\circ)/\partial(\ln p, T_0)} =$$

$$= \frac{(\partial \ln m^\circ/\partial \ln p)_{T_0}(\partial \ln f^\circ/\partial T_0)_p - (\partial \ln m^\circ/\partial T_0)_p(\partial \ln f^\circ/\partial \ln p)_{T_0}}{(\partial \ln f^\circ/\partial T_0)_p} =$$

$$= \frac{\nu(r-1) - \mu k}{k + r - 1}$$

Аналогичным образом могут быть получены и остальные из приведенных ниже соотношений, которые будут, согласно сказанному выше, справедливы и в нестационарном случае

$$\left(\frac{\partial \ln m}{\partial \ln p}\right)_f = \frac{\nu(r-1)-\mu k}{k+r-1}, \qquad \frac{1}{T_s^\circ - T_0}\left(\frac{\partial T_s}{\partial \ln p}\right)_f = \frac{\mu(k-1)-\nu r}{k+r-1}$$

$$\left(\frac{\partial \ln m}{\partial \ln f}\right)_p = \frac{k}{k+r-1}, \qquad \frac{1}{T_s^\circ - T_0}\left(\frac{\partial T_s}{\partial \ln f}\right)_p = \frac{r}{k+r-1} \tag{1.3}$$

При $r = \mu = 0$ выражения (1.3) переходят в соотношения Я. Б. Зельдовича [3]

$$\left(\frac{\partial \ln m}{\partial \ln f}\right)_p = \frac{k}{k-1}, \qquad \left(\frac{\partial \ln m}{\partial \ln p}\right)_f = \frac{\nu}{1-k}$$

2. Собственная частота и декремент затухания. При исследовании устойчивости горения рассматриваемой модели пороха было найдено [2], что допущение о зависимости T_s° от T_0 приводит к существенному расширению области устойчивого горения. Если при $r = 0$ (случай Я. Б. Зельдовича) стационарный режим устойчив только, если $k < 1$, то при $r > 0$ возможно устойчивое горение и при $k > 1$, причем область устойчивости определяется соотношением $r \geqslant (k-1)^2 / (k+1)$. При этом оказалось, что релаксация нестационарного распределения температур и скорости горения к соответствующим стационарным значениям происходит колебательным образом (наличие колебательных режимов горения пороха впервые было отмечено в работе А. Г. Истратова и В. Б. Либровича [4]). При $k > 1$ и $r \geqslant (k-1)^2 / (k+1)$ временной множитель, характеризующий приближение к стационарному режиму, имеет вид $\exp\,[\Omega\,(u^0)^2\, t / \varkappa]$, где u^0 — стационарное значение линейной скорости горения $u^0 = m^0 / \rho$, а

$$\Omega = \frac{(k-1)^2 - r(k+1)}{2r^2} \pm i\,\frac{k-1}{2r^2}\sqrt{(2k-r+2)r-(k-1)^2} \tag{2.1}$$

Очевидно, что $\lambda = -\operatorname{Re}\Omega$ характеризует затухание колебаний, поэтому естественно назвать

$$\lambda = \frac{r(k+1)-(k-1)^2}{2r^2} \tag{2.2}$$

коэффициентом или декрементом затухания колебаний. Мнимая часть Ω, определяющая частоту колебаний, может быть представлена в виде

$$\operatorname{Im}\Omega = \pm\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \qquad (\omega = \sqrt{k} / r) \tag{2.3}$$

Будем называть ω собственной частотой колебаний пороха.

На кривой $r = (k-1)^2 / (k+1)$ затухание отсутствует, а частота

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{k}\,(k+1)}{(k-1)^2} \tag{2.4}$$

Введенные величины λ и ω безразмерны; чтобы перейти к размерным декременту и частоте, их нужно поделить на $\varkappa / (u^0)^2$, т. е. на характерное время релаксации прогретого слоя конденсированной фазы. При $\varkappa = 10^{-3}$ *см²/сек* имеем $\varkappa / (u^0)^2 = 10^{-1}$ *сек* и 10^{-3} *сек* для u^0, равного соответственно 10^{-1} и 1 *см / сек*.

Характер колебательного режима зависит от соотношения между λ и ω. При $\lambda \lll \omega$, т. е. при малом затухании, амплитуда за один период меняется мало. Очевидно, что при приближении к границе устойчивости, т. е. при $r \to (k-1)^2 / (k+1)$, затухание уменьшается и может быть сделано как угодно малым. В частности, на границе устойчивости декремент затухания $\lambda = 0$.

Таким образом, можно утверждать, что порох в области $k > 1$ представляет собою колебательную систему с определенной частотой и декрементом затухания. Выведенный (при постоянном давлении) из состояния стационарного горения порох будет релаксировать к стационарному режиму так, что его скорость горения будет совершать колебания около стационарного значения с частотой $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ и затуханием λ. При $k < 1$ релаксация к стационарному режиму происходит вязким образом, т. е. без прохождения состояния стационарного режима. Конечно, к апериодическому режиму можно перейти и при $k > 1$, потребовав $\lambda \geqslant \omega$, однако это условие приводит к такому большому r, которое, видимо, никогда не осуществляется в действительности.

Колебания при постоянном давлении назовем свободными. В следующем параграфе будет рассмотрено горение пороха при гармонически меняющемся давлении. Колебания скорости горения в этих условиях будем называть вынужденными.

3. Вынужденные колебания скорости горения. Исследуем в линейном приближении установившийся процесс горения пороха при гармонически меняющемся давлении. Как и прежде, будем принимать во внимание инерционность только прогретого слоя конденсированной фазы. Это требование приводит к ограничению частоты колебаний давления сверху. Именно, для того чтобы зону подогрева газа до температуры горения можно было считать безынерционной, необходимо, чтобы частота изменения давления была много меньше обратного характерного времени зоны подогрева газа

$$t^* = \frac{D\rho^{*2}}{u^2\rho^2}$$

где D — коэффициент диффузии, ρ^* и ρ — плотности газа и твердой фазы. По порядку величины $t^* \sim 10^{-5}$ *сек* (см., например, [5]). Таким образом, при изменении давления с частотой вплоть до десятков килогерц процессы в газовой фазе могут считаться безынерционными. Единственный инерционный процесс происходит в твердой фазе, где справедливо уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - u\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad T\,|_{x=0} = T_s, \qquad T\,|_{x=-\infty} = T_0 \tag{3.1}$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_s^\circ - T_0}, \qquad \xi = \frac{u^\circ}{\varkappa}x, \qquad \tau = \frac{(u^\circ)^2}{\varkappa}t, \qquad v = \frac{u}{u^\circ} = \frac{m}{m^\circ} \tag{3.2}$$

тогда получим

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} - v\frac{\partial\theta}{\partial\xi}, \quad \theta\,|_{\xi=0} = \vartheta, \qquad \theta\,|_{\xi=-\infty} = 0 \qquad \left(\vartheta = \frac{T_s - T_0}{T_s^\circ - T_0}\right) \tag{3.3}$$

Стационарный режим описывается решением

$$\theta = e^\xi, \quad v = 1, \quad \vartheta = 1, \quad \varphi = 1 \quad \varphi = (\partial\theta \,/\, \partial\xi)_0 = f \,/\, f_0 \tag{3.4}$$

где φ — безразмерный градиент.

Рассмотрим установившийся процесс горения при давлении, изменяющемся по закону

$$p = p^0\,(1 + h\cos\gamma\tau)$$

где γ — безразмерная частота. В линейном приближении можно воспользоваться комплексным методом; представим скорость, температуру, градиент и давление в виде

$$v = 1 + v_1 e^{i\gamma\tau}, \qquad \theta = e^\xi\,(1 + \theta_1 e^{i\gamma\tau}), \qquad \vartheta = 1 + \vartheta_1 e^{i\gamma\tau}, \qquad \varphi = 1 + \varphi_1 e^{i\gamma\tau} \tag{3.5}$$

$$\eta = 1 + he^{i\gamma\tau}\ (\eta = p \,/\, p^0)$$

Из соотношений (1.3) легко получить

$$v_1 = \frac{k}{k+r-1}\varphi_1 + \frac{\nu(r-1) - \mu k}{k+r-1}h, \qquad \vartheta_1 = \frac{r}{k+r-1}\varphi_1 + \frac{\mu(k-1) - \nu_r}{k+r-1}h \tag{3.6}$$

Линеаризация уравнения теплопроводности (3.2) приводит к уравнению

$$i\gamma\theta_1 = \theta_1'' + \theta_1' + v_1 \tag{3.7}$$

(штрих обозначает дифференцирование по ξ). Решение его

$$\theta_1 = Ae^{z_1\xi} + i\frac{v_1}{\gamma} \tag{3.8}$$

$$z_1 = {}^1/_2\,(\gamma \,/\, R_1 - 1) + iR_1, \qquad R_1 = ({}^1/_8\,(\sqrt{16\gamma^2 + 1} - 1))^{1/2} \tag{3.9}$$

Второй корень характеристического уравнения отброшен, так как он соответствует безгранично возрастающему решению при $\xi \to -\infty$. Из (3.8) получаем

$$\vartheta_1 = A + iv_1 \,/\, \gamma \tag{3.10}$$

$$\varphi = \left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = 1 + \vartheta_1 + \left.\frac{\partial\theta_1}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}, \qquad \varphi_1 = \vartheta_1 + Az_1 \tag{3.11}$$

Четыре алгебраических уравнения ((3.6, 7), (3.10, 11)) представляют замкнутую систему, из которой можно определить φ_1, ϑ_1, A и v_1. Для наиболее интересной величины — скорости горения — имеем

$$v_1 = \frac{\nu + (\nu r - \mu k)\,z_1}{1 - k + (r - ik \,/\, \gamma)\,z_1} \tag{3.12}$$

Введя величины

$$a = \nu + {}^1/_2\,(\nu r - \mu k)\,(\gamma \,/\, R_1 - 1), \qquad b = (\nu r - \mu k)\,R_1$$

$$c = 1 + \left(\frac{\gamma}{R_1} - 1\right)\left(\frac{r}{2} - \frac{kR_1}{\gamma}\right), \qquad d = rR_1 - \frac{k}{2\gamma}\left(\frac{\gamma}{R_1} - 1\right) \tag{3.13}$$

комплексную амплитуду скорости горения, ее модуль и сдвиг фазы по отношению к давлению можно представить в виде

$$v_1 = \frac{a+ib}{c+id}, \qquad |v_1| = \left(\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}\right)^{1/2}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{bc-ad}{ac+bd} \tag{3.14}$$

В случае постоянства температуры поверхности приведенные выражения переходят в

$$|v_1| = \frac{\nu}{\sqrt{c_0^2+d_0^2}}, \qquad \operatorname{tg}\psi = -\frac{d_0}{c_0}$$

$$\left(c_0 = 1 - k\left(1-\frac{R_1}{\gamma}\right), \qquad d_0 = -\frac{k}{2R_1}\left(1-\frac{R_1}{\gamma}\right)\right)$$

Эти результаты следуют и из работы Я. Б. Зельдовича [3].

4. **Резонанс**. Исследуем полученные зависимости в случае, когда частота колебаний давления близка к собственной частоте колебаний, т. е. в случае резонанса. Пусть $\gamma = \omega + \varepsilon$. Перейдем от величин k, r и γ к k, λ и ε, считая, что λ и ε малы по сравнению с собственной частотой ω. В рассматриваемом приближении

$$r = \frac{(k-1)^2}{k+1}\left[1 + 2\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\lambda\right], \quad \gamma = \frac{\sqrt{k}(k+1)}{(k-1)^2}\left[1 + \frac{(k-1)^2}{\sqrt{k}(k+1)}\varepsilon - 2\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\lambda\right]$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{k}}{|k-1|}\left[1 + \frac{(k-1)^2(k+1)}{\sqrt{k}(k^2+6k+1)}\varepsilon - \frac{2(k-1)^2}{k^2+6k+1}\lambda\right] \tag{4.1}$$

Подстановка этих выражений в (3.12) дает (при $k > 1$)

$$v_1 = \frac{(k+1)(k^2+6k+1)\{\nu(k^2-1) + [\nu(k-1)^2 - \mu k(k+1)](1+i\sqrt{k})\}}{2(k-1)^4[-\sqrt{k}(k-1) + i(3k+1)](\varepsilon - i\lambda)}h \tag{4.2}$$

Для модуля амплитуды получаем

$$|v_1|^2 = \frac{k(k+1)^3(k^2+6k+1)[\nu^2(k-1)^2 - 2\mu\nu k(k-1) + \mu^2 k(k+1)]}{4(k-1)^8(\varepsilon^2+\lambda^2)}h^2 \tag{4.3}$$

т. е. типичную резонансную зависимость скорости горения от частоты. Если $k < 1$, то резонансных явлений не возникает. Физически это обусловлено отсутствием у пороха собственной частоты, а формально выражается специфической зависимостью R_1 от величины $k - 1$. Для сдвига фазы имеем

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{F\lambda - G\varepsilon}{G\lambda + F\varepsilon} \tag{4.4}$$

$$F = \nu(k-1)^2 - 2\mu k(k+1), \qquad G = \sqrt{k}[\nu(k-1)(k+3) + \mu(k+1)^2]$$

Как и обычно, при переходе через резонанс (при изменении ε от $-\lambda$ до λ) фаза изменяется на $^1/_2\pi$. Отметим, что и уравнение и граничные условия являются в общем случае нелинейными. Представляет интерес исследование нелинейных колебаний скорости горения, возникающих при больших амплитудах давления. В этом случае следует ожидать всех характерных явлений, встречающихся в нелинейных колебаниях, а именно, неоднозначной зависимости скорости горения от частоты изменения давления, скачкообразных переходов горения из одного режима в другой, разонансов на частотах, не совпадающих с собственной частотой системы и т. п. (см., например, [6]).

Автор благодарен О. И. Лейпунскому за обсуждение работы и ряд полезных замечаний.

Поступила 23 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. Ж. эксперим. и теор. физ., 1942, № 11—12.
2. Новожилов Б. В. Критерий устойчивости стационарного режима горения пороха. ПМТФ, 1965, № 5.
3. Зельдович Я. Б. Об устойчивости режима горения пороха в полузамкнутом объеме. ПМТФ, 1963, № 1.
4. Истратов А. Г., Либрович В. Б. Об устойчивости горения пороха. ПМТФ, 1964, № 5.
5. Новожилов Б. В. Переходные процессы при горении порохов. ПМТФ, 1962, № 5.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е М. Механика. Физматгиз, 1958.