

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ КВАЗИХРУПКОГО И КВАЗИВЯЗКОГО РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ КРИТЕРИЕВ

В. Д. Кургузов, В. М. Корнев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

Рассматриваются материалы с регулярной структурой, имеющие квазихрупкий или квазивязкий тип разрушения, в случае когда характерный линейный размер структурного элемента известен. С помощью подхода Нейбера — Новожилова построены необходимые и достаточные критерии разрушения. Предложена модифицированная модель Леонова — Панасюка — Дагдейла для трещины нормального отрыва, когда поперечник зоны предразрушения совпадает с поперечником зоны пластичности. Для критических параметров квазихрупкого разрушения (растягивающих напряжений, длин зон предразрушения, коэффициентов интенсивности напряжений) получены соотношения, позволяющие рассматривать процесс разрушения материала в случае, когда длина трещины пренебрежимо мала по сравнению с характерным линейным размером структурного элемента. В широком диапазоне длин трещин рассмотрена диаграмма разрушения, полученная с использованием критических напряжений, вычисленных по необходимому и достаточному критериям. Методом конечных элементов решена упругопластическая задача о растяжении пластины с центральной трещиной. Определены размеры и форма пластической зоны в окрестности вершины трещины при различных уровнях нагружения, соответствующих квазихрупкому и квазивязкому типам разрушения. Проведен анализ полученных результатов, позволивший оценить поперечник зоны предразрушения и критическую величину раскрытия трещины.

Ключевые слова: квазихрупкий и квазивязкий типы разрушения, необходимый и достаточный критерии, зона предразрушения.

Введение. В настоящее время возрос интерес как к многомасштабному расчету, так и к многомасштабному конструированию материалов [1–3]. Подробное описание многомасштабного процесса разрушения приведено в работе [3]. Согласно модели [3] в окрестности вершины исходной макротрещины имеется две зоны предразрушения на мезо- и микроуровнях структуры материала, причем на микроуровне рассматривается микровырез, примыкающий к вершине фиктивной трещины. В [3] отмечена возможность возникновения ошибок в расчетах вследствие наличия дополнительных параметров, характеризующих длины зон предразрушения и величины раскрытия трещин на каждом структурном уровне. Любая реалистичная модель повреждений должна учитывать многомасштабность и изменения геометрии, условий нагружения и свойств материала [3. С. 26].

Необходимые многомасштабные критерии разрушения для хрупких сред получены в работах [4, 5], при этом использовались только исходные длины трещин. В [6–8] предложе-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10-08-00220, 11-08-00191) и в рамках Программы Президиума РАН № 25.

ны улучшенные достаточные критерии разрушения для одного из структурных уровней. Эти критерии построены в рамках модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [9, 10]. Следует отметить, что в работах [4–8] используется подход Нейбера — Новожилова [11, 12] для структурированных материалов. По сути, модификация модели Леонова — Панасюка — Дагдейла заключается в том, что в отличие от классической модели для зоны предразрушения помимо длины введен поперечник. Наличие дополнительного параметра позволяет оценить разрушение структуры материала в зоне предразрушения, расположенной вблизи средней линии реальной трещины, с использованием информации о параметрах стандартной $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграммы материала [7]. Построенные достаточные критерии [6–8] допускают предельный переход к необходимым критериям, когда длина зоны предразрушения стремится к нулю.

Использование подхода Нейбера — Новожилова [11, 12] позволяет расширить класс решений для сред со структурой. В соответствии с терминологией В. В. Новожилова изучаемые в данной работе критерии разрушения называются достаточными. Бесконечные напряжения в вершине фиктивной трещины, не допускаемые континуальным критерием разрушения, не противоречат дискретным критериям разрушения, если сингулярная составляющая решения имеет интегрируемую особенность. Обоснование подхода Нейбера — Новожилова при формулировке критериев приведено в [13].

Так как ниже рассматриваются материалы с иерархией структур и определяются критические параметры разрушения в широком диапазоне характерных линейных размеров, то следует ввести понятие критических расстояний для трещин [14, 15]. Под критическим расстоянием в [14, 15] понимается характерный диаметр регулярной структуры материала.

1. Структура материала и предлагаемая модель. Рассматриваются материалы с регулярной структурой, которые имеют квазихрупкий или квазивязкий тип разрушения, причем характерный линейный размер r_0 структурного элемента (например, диаметр зерна) известен. Используем модифицированную [6, 7] модель Леонова — Панасюка — Дагдейла [9, 10], в которую введены параметры классической $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграммы деформирования материала. Простейшая аппроксимация этой диаграммы представлена на рис. 1 (σ_m — теоретическая (идеальная) прочность материала на растяжение; ε_0 — максимальное упругое удлинение; ε_1 — максимальное удлинение структурного элемента). Таким образом, величина $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ представляет собой неупругое удлинение структурного элемента. В классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла напряжения σ_m совпадают со сжимающими напряжениями, действующими на продолжении реальной трещины в зоне

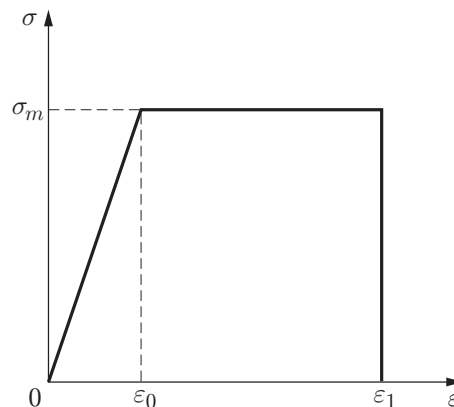


Рис. 1. Простейшая аппроксимация $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграммы деформирования материала

предразрушения. Для обычных конструкционных сталей напряжения σ_m равны пределу текучести.

Предположим, что внутренняя острая трещина нормального отрыва длиной $2l_0$ распространяется прямолинейно в структурно-неоднородном материале. Пусть на бесконечности заданы растягивающие напряжения σ_∞ , действующие по нормали к плоскости трещины. Помимо реальной внутренней прямолинейной трещины-разреза длиной $2l_0$ введем в рассмотрение фиктивную трещину-разрез длиной $2l = 2l_0 + 2\Delta$ (Δ — длина зоны предразрушения, расположенной на продолжении реальной трещины). Полная постановка задачи о распределении напряжений и смещений трещины нормального отрыва для упругопластических материалов рассматривается в нелинейной механике разрушения. Эту нелинейную задачу можно существенно упростить, используя классические представления линейной механики разрушения, когда фиктивная трещина нормального отрыва моделируется двусторонним разрезом, а нелинейность задачи возникает только при описании зоны предразрушения. Напомним, что согласно классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [9, 10] пластический материал в зоне предразрушения стягивает берега трещины, причем ее поперечник равен нулю.

В модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [9, 10] поле нормальных напряжений $\sigma_y(x, 0)$ на продолжении фиктивной трещины можно представить в виде суммы двух слагаемых (начало декартовой системы координат Oxy находится в правой вершине фиктивной трещины):

$$\sigma_y(x, 0) = K_I / (2\pi x)^{1/2} + O(1), \quad K_I = K_{I\infty} + K_{I\Delta}, \quad K_{I\infty} > 0, \quad K_{I\Delta} < 0. \quad (1)$$

Здесь $K_I = K_I(l, \Delta)$ — суммарный коэффициент интенсивности напряжений в вершине фиктивной трещины; $K_{I\infty}$ — коэффициент интенсивности напряжений, обусловленный напряжениями σ_∞ , заданными на бесконечности; $K_{I\Delta}$ — коэффициент интенсивности напряжений, обусловленный постоянными напряжениями σ_m , действующими в зоне предразрушения. Первое и второе слагаемые в соотношении (1) — сингулярная и гладкая части решения соответственно.

При описании зоны предразрушения можно исследовать три класса решений [6, 7]:

$$K_I > 0; \quad (2)$$

$$K_I = 0; \quad (3)$$

$$K_I < 0. \quad (4)$$

Подход Нейбера — Новожилова [11, 12] позволяет использовать первый класс решений (2) для сред со структурой, поскольку бесконечные напряжения в вершине фиктивной трещины (1), не допускаемые непрерывными критериями прочности, не противоречат дискретным критериям, если сингулярная составляющая решения имеет интегрируемую особенность. Второй класс решений (3) для сред со структурой соответствует классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [9, 10]. Третий класс решений (4) в рассматриваемой модели не соответствует какому-либо реальному физическому объекту. Однако желательно учитывать этот класс решений, так как возможны другие постановки задач и модели разрушения тел с трещиноподобными дефектами при сжатии. Например, в работах [16, 17] рассматриваются проблемы разрушения деформируемых тел со структурой при интенсивном сжатии, когда возникающие расслоения ориентированы вдоль главных сжимающих напряжений. Возникающие при сжатии структуры разрушения [16, 17] существенно отличаются от рассматриваемой в данной работе модели движения вершины трещины, так как соотношения (2), (3) соответствуют первой моде разрушения. Соотношение (4), описывающее третий класс решений, можно использовать для трещин сжатия [16].

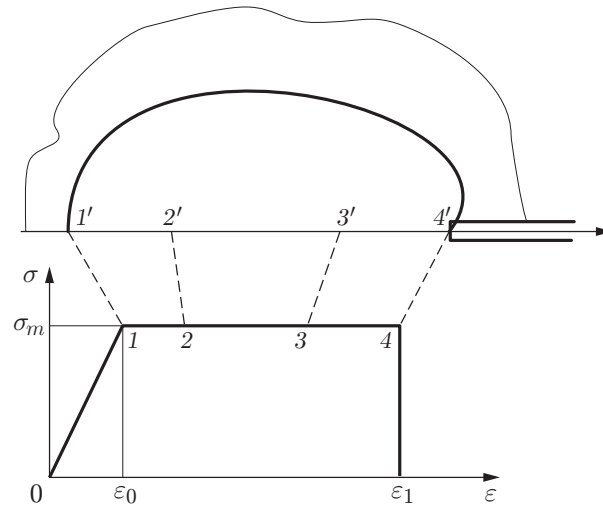


Рис. 2. Взаимосвязь между точками 1–4 на $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграмме и точками 1'–4' в зоне предразрушения

Зона предразрушения представляет собой прямоугольник со сторонами Δ , a , причем длина зоны предразрушения Δ определяется в процессе решения задачи о разрушении, а поперечник a этой зоны целесообразно отождествить с поперечником зоны пластичности. В соответствии с предлагаемой модификацией модели Леонова — Панасюка — Дагдейла следует различать вершины реальной и фиктивной трещин.

На рис. 2 приведена схема, качественно поясняющая взаимосвязь между точками 1, 2, 3, 4 на $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграмме и точками 1', 2', 3', 4' в зоне предразрушения, расположенными на продолжении реальной трещины слева от нее. Вне зоны предразрушения материал деформируется упруго, на границе этой зоны он начинает деформироваться неупруго, при этом точки зоны предразрушения находятся в области неупругого деформирования материала. На продолжении фиктивной трещины реализуется одноосное растяжение (см. [18. С. 30–31]). В докритическом состоянии материал в вершине реальной трещины имеет удлинение $\varepsilon < \varepsilon_1$, а в критическом состоянии его удлинение совпадает с критическим удлинением, т. е. в точке 4 на рис. 2 $\varepsilon = \varepsilon_1$.

2. Дискретно-интегральный критерий разрушения. Для трещины нормального отрыва достаточный дискретно-интегральный критерий разрушения [12] имеет вид

$$\frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} \sigma_y(x, 0) dx \leq \sigma_m, \quad x \geq 0; \quad (5)$$

$$2v(x, 0) \leq \delta_m^*, \quad -\Delta \leq x < 0. \quad (6)$$

Здесь $\sigma_y(x, 0)$ — нормальные напряжения на продолжении трещины; Oxy — прямоугольная система координат (рис. 3), ориентированная относительно правой вершины трещины (начало системы координат совпадает с вершиной фиктивной трещины в модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [9, 10]); r_0 — характерный линейный размер элемента структуры материала, соизмеримый с диаметром зерна; $2v(x, 0)$ — величина раскрытия трещины; $2v^*(-\Delta^*, 0) = \delta_m^*$ — критическая величина раскрытия трещины.

Для того чтобы использовать достаточный дискретно-интегральный критерий (5), (6), нужно знать аналитические выражения для нормальных напряжений $\sigma_y(x, 0)$ на продолжении трещины и для величины раскрытия трещины $2v(x, 0)$.

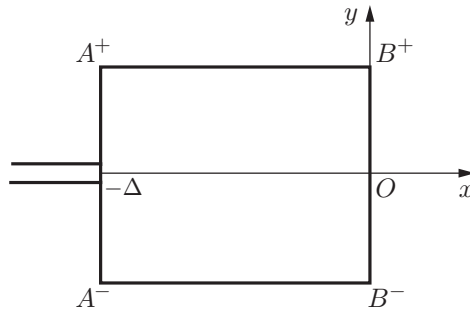


Рис. 3. Прямоугольная зона предразрушения перед правой вершиной трещины

Определим напряжения $\sigma_y(x, 0)$ на продолжении внутренней трещины. В структурно-неоднородном материале имеется сингулярная часть решения, которая в соотношении (1) определяется по заданным напряжениям σ_∞ . Для каждой длины $2l = 2l_0 + 2\Delta$ фиктивной трещины коэффициент интенсивности напряжений $K_{I\infty}$, обусловленный напряжениями σ_∞ , вычисляется по формуле

$$K_{I\infty} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l}. \quad (7)$$

Рассмотрим случай квазихрупкого разрушения, когда длина зоны предразрушения Δ существенно меньше длины исходной трещины l_0 :

$$\Delta \ll l_0. \quad (8)$$

С учетом неравенства (8) из соотношения (7) с точностью до величин высшего порядка малости получаем

$$K_{I\infty} \approx \sigma_\infty \sqrt{\pi l_0}. \quad (9)$$

Поскольку далее рассматривается первый класс решений (2), используем следующие представления нормальных напряжений (1) на продолжении трещины $\sigma_y(x, 0)$, обусловленных напряжениями σ_∞ :

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{\sigma_\infty(x + l_0)}{\sqrt{(x + l_0)^2 - l_0^2}}, \quad \Delta \equiv 0; \quad (10)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{K_{I\infty}}{\sqrt{2\pi x}} + \sigma_\infty + \frac{K_{I\Delta}}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_{I\infty} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l}. \quad (11)$$

Соотношение (10) является точным решением упругой задачи при $\Delta \equiv 0$, соотношение (11) представляет собой сконструированную аппроксимацию решения, которая имеет ту же особенность, что и асимптотическое (1) и точное (10) решения при $x \rightarrow 0$, и совпадает с точным решением (10) в предельном случае при $x \rightarrow \infty$, когда $\sigma_\infty = \text{const}$.

Приведем выражения для коэффициента интенсивности напряжений $K_{I\Delta}$ в соотношении (11), обусловленного постоянными напряжениями σ_m , действующими в зоне предразрушения в соответствии с модифицированной моделью Леонова — Панасюка — Дагдейла. Эти выражения взяты из справочника [19]:

$$K_{I\Delta} = -\sigma_m \sqrt{\pi l} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta}{l} \right) \right] \approx -\sigma_m \sqrt{\pi l_0} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta}{l_0} \right) \right]; \quad (12)$$

$$\sigma_{y\Delta}(x, 0) = \frac{K_{I\Delta}}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Постоянные напряжения σ_m , стягивающие противоположные берега двустороннего разреза, не порождают гладкую составляющую решения в (11), поскольку являются самоуравновешенными. Таким образом, распределение нормальных напряжений на продолжении трещины можно представить в виде

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_{y\infty}(x, 0) + \sigma_{y\Delta}(x, 0), \quad (13)$$

где $\sigma_{y\infty}(x, 0) = K_{I\infty}/\sqrt{2\pi x} + \sigma_\infty$. В случае квазихрупкого разрушения $\Delta/l \ll 1$ с точностью до величин высшего порядка малости для второго слагаемого в квадратных скобках соотношения (12) имеем простое представление

$$\arcsin\left(1 - \frac{\Delta}{l}\right) \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2\Delta}{l}}. \quad (14)$$

Определим величину раскрытия трещины $2v = 2v(x, 0)$. В работах [6, 7] предложена модифицированная модель Леонова — Панасюка — Дагдейла [9, 10], в которой вводится параметр, характеризующий поперечник зоны предразрушения. В модифицированной модели рассматривается двулистность решения (см. рис. 3). На всей плоскости с двусторонним разрезом определено решение, удовлетворяющее уравнениям линейной механики разрушения. Только в зоне предразрушения, представляющей собой прямоугольник со сторонами Δ , a , определено решение, удовлетворяющее уравнениям нелинейной механики разрушения. Вершинами этого прямоугольника являются $A^+(-\Delta, a/2)$, $B^+(0, a/2)$, $A^-(-\Delta, -a/2)$, $B^-(0, -a/2)$. Условия склейки решений по нормальным напряжениям σ_y^+ , σ_y^- и смещениям v^+ , v^- имеют следующий вид (знаки “плюс” и “минус” соответствуют верхнему и нижнему берегам разреза и верхней и нижней сторонам прямоугольника):

$$\begin{aligned} \sigma_y^+|_{-\Delta+O^+} = \sigma_y^+|_{A^+B^+}, \quad \sigma_y^-|_{-\Delta-O^-} = \sigma_y^-|_{A^-B^-}, \quad |\sigma_y^+|_{-\Delta+O^+}| = |\sigma_y^-|_{-\Delta-O^-}| = \sigma_m, \\ v^+|_{-\Delta+O^+} = v^+|_{A^+B^+}, \quad v^-|_{-\Delta-O^-} = v^-|_{A^-B^-}. \end{aligned}$$

Иными словами, как и в классической модели, к берегам разреза в зоне предразрушения приложены равные по абсолютной величине и противоположно направленные напряжения $\sigma_y^+|_{-\Delta+O^+}$, $\sigma_y^-|_{-\Delta-O^-}$, что соответствует участку 1-4 ($\sigma - \varepsilon$)-диаграммы на рис. 2. В зоне предразрушения в окрестности вершины реальной трещины можно рассматривать растяжение пучка волокон, так как фиктивная трещина раскрывается по параболе. В предлагаемой модели в зоне предразрушения реализуется одноосное напряженное состояние. Толщины этих волокон совпадают с характерным линейным размером r_0 структурного элемента.

Отождествим поперечник зоны предразрушения с поперечником зоны пластичности при плоском напряженном состоянии в вершине реальной трещины [7]:

$$a = \frac{5}{4\pi} \left(\frac{K_{I\infty}}{\sigma_m} \right)^2.$$

Параметр максимального неупругого удлинения $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ определяется на основе ($\sigma - \varepsilon$)-диаграммы (см. рис. 1). Тогда критическая величина раскрытия трещины δ_m^* , при которой разрушается ближайшее к центру трещины волокно в зоне предразрушения, вычисляется по формуле

$$\delta_m^* = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)a. \quad (15)$$

Для определения величины раскрытия $2v(x, 0)$ ($x < 0$) фиктивной трещины в (6) используется простейшее представление [18]

$$2v(x, 0) = \frac{\varkappa + 1}{G} K_I \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} + O(|x|), \quad x < 0, \quad K_I > 0, \quad \varkappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad (16)$$

в котором опущены второстепенные слагаемые порядка $O(|x|)$. Здесь ν — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига. Выражение (16) записано для случая плоского напряженного состояния.

При выполнении преобразований в равенствах (5), (6) с использованием соотношений (11)–(16) удерживаются члены с множителями $\sqrt{\Delta/l}$ и опускаются члены с множителями $\Delta/l \ll 1$. В результате для критических напряжений σ_∞^* и критической длины зоны предразрушения Δ^* для квазихрупких материалов получаем аналитические выражения

$$\frac{\sigma_\infty^*}{\sigma_m} = \left[1 + \left(1 - \frac{5}{8\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) \sqrt{\frac{2l^*}{r_0}} \right]^{-1}; \quad (17)$$

$$\Delta^* = \frac{5^2}{2^9} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right)^2 \left(\frac{\sigma_\infty^*}{\sigma_m} \right)^2 l^*. \quad (18)$$

Здесь $2l^* = 2l_0 + 2\Delta^*$ — критическая длина трещины. Выражение (17) имеет смысл, если

$$1 - \frac{5}{8\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} > 0. \quad (19)$$

Неравенство (19) представляет собой ограничение, которое выполняется только для хрупких и квазихрупких материалов, например керамик и высокопрочных сплавов. При этом ограничении существует первый класс решений (2), в случае если в асимптотическом представлении решения (16) опущены второстепенные слагаемые порядка $O(|x|)$. Из неравенства (19) следует, что неупругое удлинение $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ материала не должно превышать $5\varepsilon_0$. Если в соотношении (19) знак неравенства заменить на знак равенства, то получим ограничение, при котором существует второй класс решений (3). Если в соотношении (19) заменить знак неравенства на противоположный знак, то реализуется третий класс решений (4), в котором взаимно перекрываются берега трещины нормального отрыва.

В соотношениях (17), (18) возможен предельный переход при $\varepsilon_1/\varepsilon_0 \rightarrow 1$, что позволяет рассматривать разрушение хрупких материалов (в этих материалах зона предразрушения отсутствует: $\Delta = 0$). С использованием необходимого критерия разрушения (5) в случае хрупкого разрушения критические напряжения σ_∞^0 вычисляются по формуле

$$\frac{\sigma_\infty^0}{\sigma_m} = \left(1 + \frac{2l_0}{r_0} \right)^{-1/2}, \quad (20)$$

или

$$\frac{\sigma_\infty^0}{\sigma_m} = \left(1 + \sqrt{\frac{2l_0}{r_0}} \right)^{-1}. \quad (21)$$

Аналитические выражения (20), (21) для σ_∞^0 соответствуют представлениям нормальных напряжений на продолжении трещины (10), (11). Аналитические представления критических напряжений σ_∞^0 (20), (21) зависят от двух параметров: исходной длины трещины $2l_0$ и характерного линейного размера элемента структуры r_0 . В соотношении (17) критические напряжения σ_∞^* , полученные с использованием достаточного критерия разрушения (5), (6), зависят от двух указанных параметров, а также от величины $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$, характеризующей отношение неупругих и упругих относительных удлинений материала.

Поскольку при наличии трещин представления решений (10), (11) содержат сингулярную и гладкую части решений, следует получить оценки аналитических выражений для критических параметров $\sigma_\infty^*(l^*)$, $\sigma_\infty^0(l_0)$ при $l_0 \rightarrow 0$, $l_0 \rightarrow \infty$ соответственно из (17) и (20), (21). Эти оценки имеют вид

$$\lim_{l_0 \rightarrow 0} \sigma_\infty^* = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \sigma_\infty^0 = \sigma_m; \quad (22)$$

$$l_0 \rightarrow \infty: \quad \sigma_{\infty}^0 \sim \sqrt{\frac{r_0}{2l_0}} \sigma_m; \quad (23)$$

$$l_0 \rightarrow \infty: \quad \sigma_{\infty}^* \sim \left(1 - \frac{5}{8\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \sqrt{\frac{r_0}{2l_0}} \sigma_m. \quad (24)$$

Согласно достаточному и необходимому критериям разрушения (22) в случае отсутствия трещины ($l_0 \rightarrow 0$) прочность материала прямо пропорциональна напряжениям σ_m . При использовании необходимого критерия разрушения (23) для длинных трещин ($l_0 \rightarrow \infty$) прочность материала прямо пропорциональна напряжениям σ_m и обратно пропорциональна квадратному корню из относительной длины трещины $2l_0/r_0$ в структурированном материале. В достаточном критерии разрушения (24), в отличие от необходимого критерия (23) для длинных трещин ($l_0 \rightarrow \infty$), имеется множитель, зависящий от свойств материала в зоне предразрушения при неупругом деформировании. Полученные предельные соотношения и оценки (22)–(24) позволяют утверждать, что кривые разрушения, соответствующие необходимому (20), (21) и достаточному (17) критериям, обладают некоторой универсальностью при описании процесса разрушения.

Результаты расчетов критических напряжений σ_{∞}^0 при хрупком разрушении приведены на рис. 4 в двойных логарифмических координатах. Максимальное различие кривых 1, 2, имеющее место при $2l_0/r_0 \approx 1$, составляет около 40 %. В расчетах предпочтительно использовать более точное соотношение (20), поскольку представление решений (10) содержит не только сингулярную часть решения, но и высшие члены разложения [15]. Очевидно, что при одной и той же длине трещины l_0 $\sigma_{\infty}^*(l^*) > \sigma_{\infty}^0(l_0)$.

Рассмотрим поведение нелинейной системы при $\sigma_{\infty} < \sigma_{\infty}^0$, что соответствует неравенству в необходимом критерии (5). При таком слабом нагружении в рамках предлагаемой модели нелинейные эффекты не проявляются, исходная длина трещины $2l_0$ не меняется.

В случае если в достаточном критерии (5), (6) в первом соотношении (5) используется равенство, а во втором соотношении (6) — неравенство, имеет место докритическое состояние системы. Рассмотрим случай постепенного догружения в интервале нагрузок $\sigma_{\infty}^0 < \sigma_{\infty} < \sigma_{\infty}^*$, при котором имеет место устойчивое увеличение длины фиктивной трещины, когда $0 < \Delta < \Delta^*$ и $2l = 2l_0 + 2\Delta$. Первое соотношение в достаточном критерии (5), (6) определяет движение вершины фиктивной трещины.

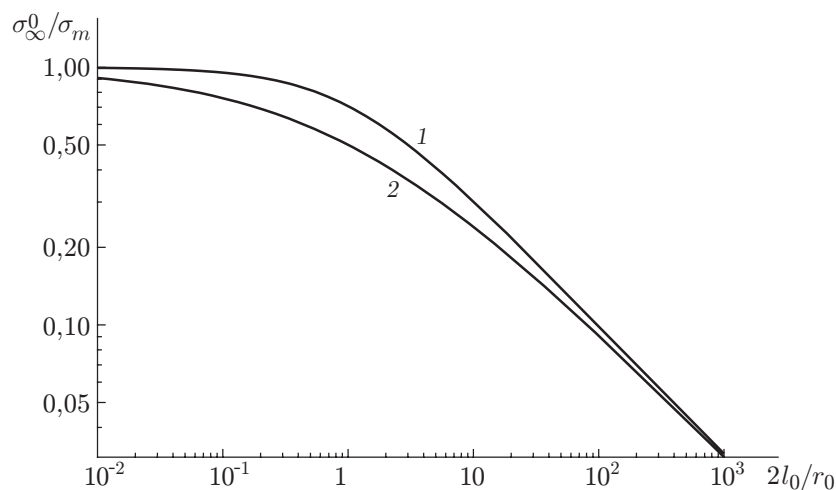


Рис. 4. Критические напряжения σ_{∞}^0 при хрупком разрушении, вычисленные по необходимому критерию разрушения:

1 — расчет по формуле (20); 2 — расчет по формуле (21)

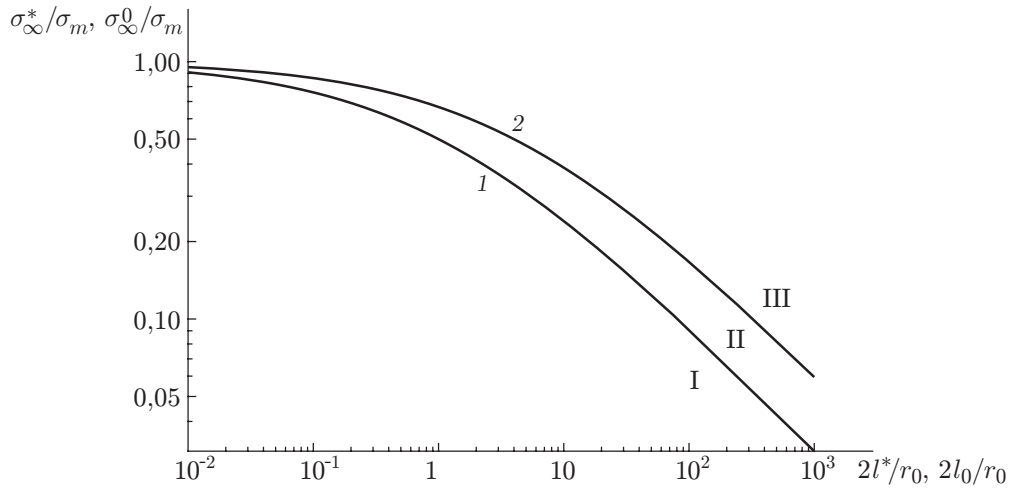


Рис. 5. Оценочная диаграмма разрушения:

I — область стабильного состояния трещины, II — область устойчивого роста трещины, III — область катастрофического распространения трещины; 1 — зависимость $\sigma_{\infty}^0/\sigma_m$ от $2l_0/r_0$, полученная по необходимому критерию (21), 2 — зависимость $\sigma_{\infty}^*/\sigma_m$ от $2l^*/r_0$, полученная по достаточному критерию (17) при $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 1 + 4\pi/5$

Если в соотношениях (5), (6) реализуются равенства, то система переходит в критическое состояние. Ближайшая к вершине трещины структура разрушается, поскольку $\Delta = \Delta^*$ и $2l^* = 2l_0 + 2\Delta^*$. При $\sigma_{\infty} = \sigma_{\infty}^*$ неустойчивость критического состояния нелинейной системы очевидна. Соотношения (6) определяют обрыв силовых связей в ближайшей к вершине реальной трещины структуре зоны предразрушения. Таким образом, критические нагрузки, вычисленные по необходимому σ_{∞}^0 и достаточному σ_{∞}^* критериям разрушения, являются нижней и верхней оценками критических нагрузок рассматриваемой нелинейной системы.

На рис. 5 приведена оценочная диаграмма разрушения, характеризующая состояние нелинейной системы, в двойных логарифмических координатах. Плоскость $(2l_0/r_0, \sigma_{\infty}^*/\sigma_m)$ разбивается кривыми 1, 2 на три области. В области I длина исходной трещины не меняется (трещина устойчива), в области II увеличивается на величину, равную длине зоны предразрушения (трещина подрастает, оставаясь устойчивой), в области III увеличивается катастрофически (трещина неустойчива). Предлагаемая оценочная диаграмма разрушения хорошо согласуется с результатами экспериментов, приведенными в работе [14] на рис. 1, а.

В рамках предлагаемой модели критические коэффициенты интенсивности напряжений для хрупкого $K_{Ic}^0 = \sigma_{\infty}^0 \sqrt{\pi l_0}$ и квазихрупкого $K_{Ic}^* = \sigma_{\infty}^* \sqrt{\pi l^*}$ типов разрушения являются оценками снизу и сверху соответственно для предельного коэффициента интенсивности напряжений. Эти критические коэффициенты не являются константами материала, поскольку вычисляются непосредственно с использованием характеристик хрупкого и квазихрупкого материалов:

$$K_{Ic}^0 = \sigma_m \sqrt{\pi l_0} \left(1 + \sqrt{\frac{2l_0}{r_0}} \right)^{-1}; \quad (25)$$

$$K_{Ic}^* = \sigma_m \sqrt{\pi l^*} \left[1 + \left(1 - \frac{5}{8\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) \sqrt{\frac{2l^*}{r_0}} \right]^{-1}. \quad (26)$$

Критический коэффициент интенсивности напряжений K_{Ic}^0 хрупкого материала (см. (25))

определяется с помощью структурного параметра материала r_0 и исходной длины трещины $2l_0$. Критический коэффициент интенсивности напряжений K_{Ic}^* квазихрупкого материала (см. (26)) определяется с использованием структурного параметра r_0 , критической длины трещины $2l^* = 2l_0 + 2\Delta^*$ и деформационного параметра $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$, характеризующего отношение неупругих и упругих относительных удлинений материала. Зависимость критического коэффициента интенсивности напряжений K_{Ic}^* от исходной длины трещины $2l_0$ является более сложной по сравнению с зависимостью $K_{Ic}^0(2l_0)$.

Оценочная диаграмма разрушения на макроуровне может быть получена в простом виде с помощью представлений (17), (21), (25), (26): в случае длинных трещин кривые разрушения описываются в рамках линейной механики разрушения, а в случае коротких трещин описание кривых разрушения требует учета высших членов асимптотического разложения (10). Для длинных трещин ($2l_0/r_0 \gg 1$) укажем интервал L критических расстояний:

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}^0}{\sigma_m} \right)^2 \leq L \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}^*}{\sigma_m} \right)^2, \quad \frac{r_0}{2} \leq L \leq \frac{r_0}{2} \left(1 - \frac{5}{8\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right)^{-2}. \quad (27)$$

Очевидно, что верхняя оценка L^* критического расстояния может отличаться от нижней оценки L^0 в несколько раз, а иногда на порядок. В отличие от [14] в рамках предлагаемой модели оценки L^0 , L^* вычисляются с использованием диаметра зерна r_0 и параметра $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$, характеризующего отношение неупругих и упругих относительных удлинений материала. Нижняя L^0 и верхняя L^* оценки критического расстояния характеризуют переход от очень коротких трещин к трещинам средней длины согласно необходимым и достаточным критериям соответственно. Таким образом, частично решена проблема более точного определения критического расстояния L [15]. Напомним, что при хрупком разрушении наиболее существенное различие критических нагрузок σ_∞^0 имеет место для коротких трещин $2l_0/r_0 \approx 1$ (см. рис. 4).

3. Численные эксперименты. Рассмотрим разрушение квазихрупких (2) и квазивязких (3) материалов. Для квазихрупких материалов проведем сравнение полученных выше оценочных диаграмм разрушения с результатами численных расчетов методом конечных элементов. Для квазивязких материалов используем достаточный критерий разрушения (5), (6), применив его для численного расчета поля напряжений в окрестности вершины трещины и величины раскрытия в вершине реальной трещины.

Рассмотрим текущую лагранжеву формулировку уравнений механики деформируемого твердого тела [20], использование которой предпочтительно при моделировании деформирования тел из упругопластического материала при больших деформациях.

Уравнения равновесия в слабой форме (уравнения баланса виртуальных мощностей) имеют следующий вид:

$$\int_V s : \delta d dV = \int_{S_T} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad \forall \delta \mathbf{v} \quad (\delta \mathbf{v} = 0 \text{ на } S_u). \quad (28)$$

Здесь $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ — вектор скорости; \mathbf{u} — вектор перемещения; d — симметричный тензор скорости деформаций; s — симметричный тензор напряжений Коши; V — область, занимаемая телом в текущей конфигурации; на замкнутой кусочно-гладкой границе $S = S_u \cup S_T$ ($S_u \cap S_T = \emptyset$) области V ставятся силовые граничные условия $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{t}^*$ (на S_T) и кинематические граничные условия $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$ (на S_u); \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S_T .

Кинематическое соотношение (связь тензора скорости деформаций с тензором градиента скорости) имеет вид

$$d = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)/2, \quad (29)$$

где $\nabla \mathbf{v}^T$ — тензор градиента скорости; ∇ — пространственный набла-вектор [20].

Определяющие соотношения для упругопластического материала записываются в виде

$$s^H = C : d, \quad (30)$$

где C — тензор четвертого ранга, компоненты которого в общем случае зависят от компонент тензоров напряжений и деформаций и их скоростей; s^H — производная Хилла тензора напряжений Коши, определяемая с помощью материальной производной этого тензора по формуле [20]

$$s^H = \dot{s} - w \cdot s + s \cdot w + s \operatorname{tr} d,$$

$w = (\nabla \mathbf{v}^T - \nabla \mathbf{v})/2$ — кососимметричный тензор вихря.

Согласно теории пластического течения материала с изотропным упрочнением компоненты тензора C зависят от следующих параметров: модуля Юнга материала E , коэффициента Пуассона ν , предела текучести при одноосном растяжении σ_s , касательного модуля E_t (значение $E_t = 0$ соответствует идеальному упругопластическому материалу).

При интегрировании уравнений (28) по времени используем пошаговую процедуру. Полагая, что в момент времени t решение известно, линейризуем уравнение баланса виртуальных мощностей относительно этого момента времени с учетом соотношений (29), (30). Пространственную дискретизацию полученного линейризованного уравнения выполним методом конечных элементов. Конфигурацию тела в момент времени t будем рассматривать в качестве отсчетной. Записывая уравнения (28) для момента времени $t + \Delta t$, после ряда преобразований (подробнее об этом см. [20]) получаем скалярное линейризованное уравнение

$$\int_V \delta e : {}^t C : e dV + \frac{1}{2} \int_V {}^t s : \delta(\nabla \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T - 2e \cdot e) dV = \int_{S_T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{t}^* \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} dS - \int_V {}^t s : \delta e dV$$

$$\forall \delta \tilde{\mathbf{u}} \quad (\delta \tilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ на } S_u).$$

Здесь $\tilde{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}$; $e = (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T)/2$. Полученное решение ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^t \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}$ на каждом шаге по времени уточняется методом Ньютона — Рафсона.

Рассмотрим квадратную пластину с центральной внутренней трещиной, подвергнутой осевому растяжению напряжениями σ_∞ , заданными на кромках. Толщина пластины равна 0,4 мм, ширина $w = 100$ мм, длина трещины $2l_0$ варьировалась в диапазоне от 4 до 90 мм. В силу наличия двух плоскостей симметрии при конечноэлементном анализе моделируется 1/4 пластины. Расчетная область разбивалась равномерной сеткой на 250 000 четырехузловых квадратных элементов с длиной стороны, равной 0,1 мм. Для коротких трещин с полудлиной $l_0 = 2, 3, 4, 5$ мм использовалась мелкая сетка, содержащая 10^6 квадратных элементов с длиной стороны 0,05 мм. Предполагается, что пластина деформируется в условиях плоского напряженного состояния. Материал пластины — сталь марки Ст2сп — имеет следующие характеристики: $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,25$, $\sigma_s = 400$ МПа, $E_t = 0$. Диаграмма деформирования материала приведена на рис. 1 ($\sigma_m = \sigma_s$). Внешняя нагрузка σ_∞ возрастает по линейному закону от нуля до σ_s за время $t = 1$. Под временем в квазистатических задачах понимается некоторый монотонно возрастающий параметр нагружения.

На рис. 6 показано распределение эквивалентных пластических деформаций $\varepsilon^p = \sqrt{(2/3)\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}$ в окрестности вершины трещины при $l_0 = 15$ мм, $\sigma_\infty/\sigma_s = 0,4$. При увеличении нагрузки узкая область пластических деформаций, толщина которой равна толщине 2–3 слоев элементов, распространяется от вершины трещины по ее оси прямолинейно, образуя зону предразрушения с поперечником, приближенно равным 0,1 мм, и длиной

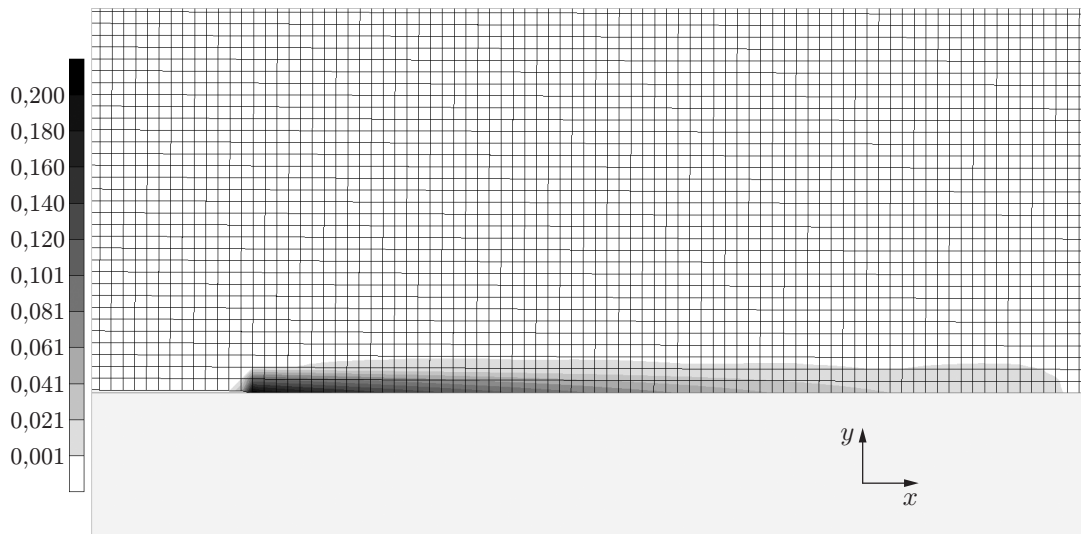


Рис. 6. Зона пластических деформаций в окрестности вершины трещины

около 3,4 мм; деформация ближайшего к вершине трещины элемента $\varepsilon^p = 20\%$. Таким образом, равенство (5) силового критерия разрушения выполняется на всем контуре пластической зоны, в том числе на продолжении фиктивной трещины.

Для модели квазивязкого материала максимальное удлинение структурного элемента ε_1 примем равным 0,02. Тогда максимальное упругое удлинение $\varepsilon_0 = \sigma_s/E = 0,002$, а неупругое удлинение структурного элемента $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = 0,018$. Таким образом, получаем параметр, характеризующий отношение неупругих и упругих относительных удлинений материала, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 9$. Подставляя найденный в результате численных расчетов поперечник зоны предразрушения a в формулу (15), получаем критическую величину раскрытия трещины $\delta_m^* = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)a$. На каждом шаге по времени определяется величина раскрытия трещины $2v$ в точке A^+ (см. рис. 3) и проверяется выполнение достаточного критерия (6). В тот момент, когда значение $2v$ становится равным значению δ_m^* либо превышает его, фиксируется внешняя нагрузка σ_∞ на данном временном шаге, которая и является критической нагрузкой по достаточному критерию σ_∞^* . Критическая нагрузка по необходимому критерию σ_∞^0 определяется в момент времени, соответствующий появлению пластических деформаций в ближайшем к вершине трещины конечном элементе. Таким образом, в вершине реальной трещины выполнено равенство (6) деформационного критерия разрушения.

На рис. 7 представлены диаграммы разрушения. Аппроксимация данных численного расчета проводилась методом наименьших квадратов с использованием формул (20) для кривой 1 и (17) для кривой 2.

Опишем способ построения кривой 1. По оси абсцисс на рис. 4, 5 откладывается величина $2l_0/r_0$ ($2l_0$ — исходная длина трещины; r_0 — характерный линейный размер элемента структуры материала), а на рис. 7 — величина l_0 . Для аппроксимации данных численного расчета выбиралась функция вида $(a + bx)^{-1/2}$, коэффициенты которой определялись методом наименьших квадратов, что позволило получить следующие значения: $a = 0,9999$, $b = 16,95$. Приравняв коэффициент $2/r_0$ при независимой переменной l_0 в формуле (20) к коэффициенту b , получаем $2/r_0 = 16,95$, откуда следует $r_0 = 0,118$. Характерный линейный размер элемента структуры материала r_0 оказался приблизительно равным размеру конечного элемента 0,1 мм. Уравнения (28)–(30), являющиеся уравнениями механики сплошной среды, не содержат размер элемента структуры материала. При дискретизации

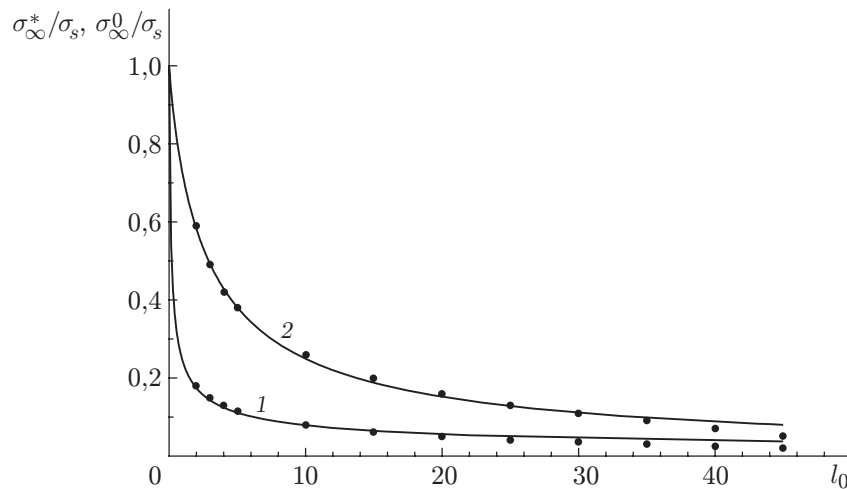


Рис. 7. Диаграммы разрушения, построенные в результате аппроксимации расчетных данных методом наименьших квадратов:

1 — расчет величины $\sigma_{\infty}^0/\sigma_s$ по необходимому критерию (5), 2 — расчет величины $\sigma_{\infty}^*/\sigma_s$ по достаточному критерию (6); точки — результаты численных расчетов для трещин с полудлинами $l_0 = 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ мм

расчетной области методом конечных элементов вводится структурный параметр, совпадающий с характерным линейным размером конечного элемента. Если методом конечных элементов решаются уравнения механики деформируемого твердого тела для материалов со структурой, то размер конечного элемента не должен превышать характерного линейного размера элемента структуры.

Параметр относительного неупругого удлинения $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 9$ соответствует квазивязкому типу разрушения, поэтому для аппроксимации данных численного расчета формула (17) неприменима: нарушается ограничение (19). Для аппроксимации критических нагрузок по достаточному критерию выбиралась функция вида $(1 + ax^b)^{-1}$. С использованием метода наименьших квадратов для показателя степени получено значение $b = 0,89$, которое существенно отличается от значения показателя степени в формуле (17), равного 0,5. Отклонение аппроксимирующих кривых 1, 2 от экспериментальных точек при $l_0 > 35$ мм объясняется тем, что ширина пластины является конечной, в то время как изложенная выше теория строилась для бесконечных пластин. Влияние ширины пластины на критические кривые разрушения в случае краевых трещин учтено в [21].

На рис. 8 в двойных логарифмических координатах представлены диаграммы разрушения для различных типов разрушения (от квазихрупкого до квазивязкого). Кривая 1 построена по необходимому критерию прочности (20), кривые 2–5 — по достаточному критерию при значениях относительного неупругого удлинения $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 2, 5, 7, 9$ соответственно. При выборе аппроксимирующей функции в виде $(1 + ax^b)^{-1}$ значения показателя степени для кривых 2, 3, 4, 5 равны $b = 0,70; 0,85; 0,87; 0,89$ соответственно.

Анализ результатов численных расчетов величин σ_{∞}^0 , σ_{∞}^* и сравнение их с результатами аналитических расчетов по формулам (17), (20), (21) позволяет сделать следующие выводы: в случае хрупкого разрушения результаты расчета с помощью аналитического представления (20) лучше согласуются с результатами численного расчета, чем результаты расчета по формуле (21). В случае квазихрупкого разрушения целесообразно использовать формулу (17) только при $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 \leq 2$.

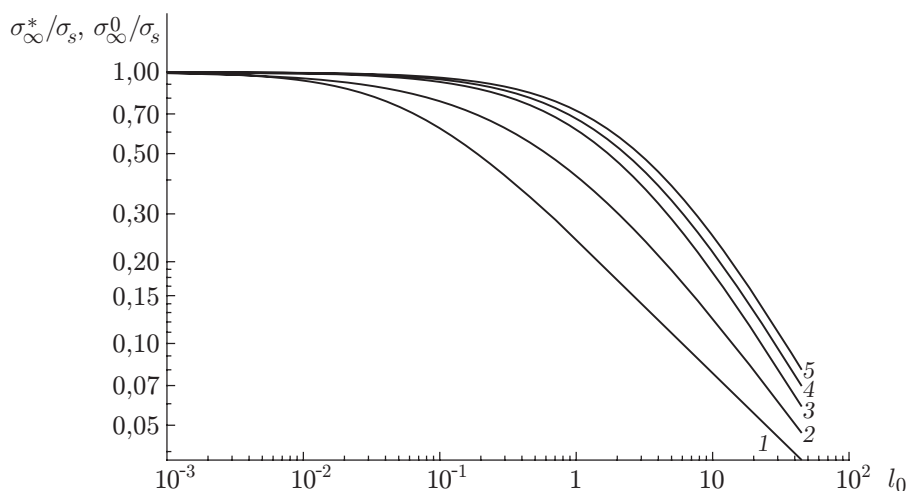


Рис. 8. Диаграммы разрушения в двойных логарифмических координатах: 1 — расчет $\sigma_{\infty}^0/\sigma_s$ по необходимому критерию (20), 2–5 — расчет $\sigma_{\infty}^*/\sigma_s$ по достаточному критерию при выборе аппроксимирующей функции в виде $(1 + ax^b)^{-1}$ (2 — $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 2$, 3 — $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 5$, 4 — $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 7$, 5 — $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 9$)

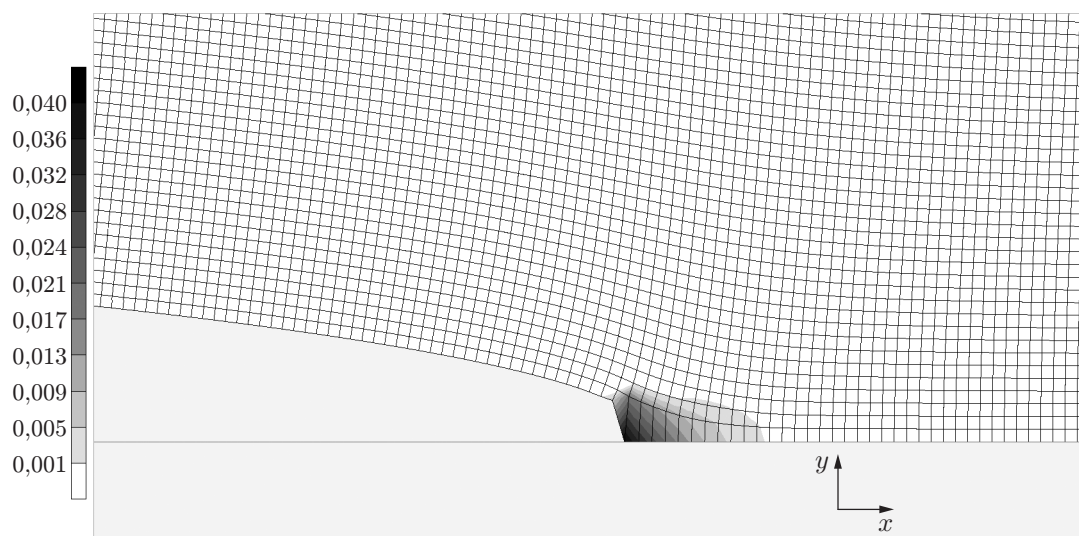


Рис. 9. Конфигурация деформированной поверхности трещины

На рис. 9 представлена конфигурация деформированной поверхности трещины в масштабе 80 : 1 при $l_0 = 15$ мм, $\sigma_{\infty}/\sigma_s = 0,19$. Наблюдается затупление первоначально острой внутренней трещины, причем тем большее, чем больше нагрузка. Условие (6) соответствует раскрытию реальной трещины в ее вершине и определяет разрыв перемещений: первоначально острая трещина при деформировании упругопластического материала превращается в тупую трещину [22]. Постепенное затупление трещин отмечено в работах [23, 24] при изучении задачи о растяжении плоскости с щелью в случае упрочняющихся материалов.

Заключение. Рассмотрены материалы, имеющие хрупкий, квазихрупкий и квазивязкий типы разрушения. Для этих материалов построены диаграммы разрушения, представляющие собой две критические кривые на плоскости длина трещины — внешняя нагрузка. Оценка снизу критических напряжений соответствует необходимому критерию разруше-

ния, оценка сверху — достаточному критерию разрушения. В большинстве случаев при нагружении образцов с трещинами нагрузкой, меньшей критической, быстрому росту трещины предшествует ее медленный устойчивый рост. После снятия нагрузки рост трещины прекращается. Докритическое увеличение трещины обусловлено в первую очередь ростом пластических деформаций перед вершиной трещины, вызванных возрастанием нагрузки. Зависимость приложенного напряжения от длины трещины в докритическом состоянии представляет собой докритический участок диаграммы разрушения, которая имеет смысл механической характеристики материала. Такая характеристика, представленная в виде зависимости $\sigma_{\infty}^* \sim l^*$, позволяет оценить сопротивление материала распространению трещины. Следует отметить, что при расчете на прочность элементов конструкции с трещинами при однократном нагружении необходимо знать величину, на которую длина трещины увеличивается вследствие монотонного увеличения нагрузки. Такой расчет позволяет сделать обоснованный выбор допустимых длин трещин при известных критических значениях длины [25].

Получены аналитические формулы, описывающие хрупкий и квазихрупкий типы разрушения. Результаты численного моделирования квазихрупкого и квазивязкого типов разрушения в рамках теории больших упругопластических деформаций позволяют уточнить границы области применимости аналитических представлений в случае квазихрупкого типа разрушения и получить простое описание процесса перехода от квазихрупкого типа разрушения к квазивязкому. Результаты натуральных экспериментов [14, 21] по разрушению хрупких и квазихрупких материалов хорошо согласуются с результатами расчетов, выполненных по аналитическим формулам и с помощью метода конечных элементов.

Первое равенство в (5), (6) представляет собой типичный силовой критерий разрушения, а второе равенство — деформационный критерий [18]. Таким образом, предлагаемый критерий разрушения (5), (6) одновременно учитывает силовой и деформационный критерии разрушения в характерных точках зоны предразрушения. При использовании такого подхода при описании процесса разрушения отсутствует необходимость анализа преимуществ и недостатков силовых или деформационных критериев [26–28]. От классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [9, 10] предлагаемый критерий (5), (6) отличается тем, что рассматриваемая в нем зона предразрушения (пластичности) имеет не только длину, но и поперечник. Если перейти от однократного нагружения к циклическому, то, учитывая накопление повреждений в материале в зоне предразрушения, можно описать процесс скачкообразного движения вершины трещины при усталости материала [29].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Muthukumar M., Ober C. K., Thomas E. L.** Competing interactions and levels of ordering in self-organizing polymeric materials // *Science*. 1997. V. 277, N 5330. P. 1225–1232.
2. **Olson G. B.** Computational design of hierarchically structured materials // *Science*. 1997. V. 277, N 5330. P. 1237–1242.
3. **Sih G. C.** Fracture mechanics in retrospect in contrast to multiscale in prospect // *Proc. of the 17th Nat. conf. of Italian group of fracture, Bologna, June 16–18, 2004* / Ed. by A. Finelli, L. Nobile. Torino: Politecnico di Torino, 2004. P. 15–37.
4. **Корнев В. М.** Иерархия критериев прочности структурированных хрупких сред. Сателлитное зарождение микротрещин // *ПМТФ*. 2000. Т. 41, № 2. С. 177–187.
5. **Корнев В. М.** Многомасштабные критерии сдвиговой прочности блочных хрупких сред. Сателлитное зарождение микропор // *Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых*. 2000. Т. 40, № 5. С. 7–16.
6. **Корнев В. М.** Обобщенный достаточный критерий прочности. Описание зоны предразрушения // *ПМТФ*. 2002. Т. 43, № 5. С. 153–161.

7. **Корнев В. М.** Распределение напряжений и раскрытие трещин в зоне предразрушения (подход Нейбера — Новожилова) // Физ. мезомеханика. 2004. Т. 7, № 3. С. 53–62.
8. **Kornev V. M., Kurguzov V. D.** Multiparametric sufficient criterion of quasi-brittle fracture for complicated stress state // Engng Fract. Mech. 2008. V. 75, N 5. P. 1099–1113.
9. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
10. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
11. **Neuber H.** Kerbspannungslehre: Grunglagen fur Genaue Spannungsrechnung. Berlin: Springer-Verlag, 1937.
12. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.
13. **Isupov L. P., Mikhailov S. E.** A comparative analysis of several nonlocal criteria // Arch. Appl. Mech. 1998. V. 68. P. 597–612.
14. **Taylor D.** The theory of critical distances // Engng Fract. Mech. 2008. V. 75, N 7. P. 1696–1705.
15. **Neimitz A.** Jump-like crack growth models of theory of critical distances. Are they correct? // ESIS Newsletter. 2008. N 44. P. 20–26.
16. **Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М.** Структуры разрушения в условиях интенсивного сжатия // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина / Под ред. Д. Д. Ивлева, Н. Ф. Морозова. М.: Физматлит, 2006.
17. **Carpinteri A., Corrado M., Paggi M., Mancini G.** New model for the analysis of size-scale effects on ductility of reinforced concrete elements in bending // J. Engng Mech. ASCE. 2009. V. 135, N 3. P. 221–229.
18. **Керштейн И. М.** Основы экспериментальной механики разрушения / И. М. Керштейн, В. Д. Ключников, Е. В. Ломакин, С. А. Шестериков. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
19. **Саврук М. П.** Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов; Т. 2).
20. **Коробейников С. Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
21. **Корнев В. М., Демешкин А. Г.** Диаграмма квазихрупкого разрушения тел со структурой при наличии краевых трещин // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 152–164.
22. **Слепян Л. И.** Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990.
23. **Rice J. R., Rosengren G. F.** Plane strain deformation near crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 1–12.
24. **Hutchinson J. W.** Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 13–31.
25. **Пестриков В. М.** Механика разрушения твердых тел / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. СПб.: Профессия, 2002.
26. **Leguillon D.** Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch // Eur. J. Mech. A. Solids. 2002. V. 21. P. 61–72.
27. **Newman J. C., James M. A., Zerbst U.** A review of the CTOA/CTOD fracture criterion // Engng Fract. Mech. 2003. V. 70, N 3/4. P. 371–385.
28. **Castrodeza E. M., Perez Ipina J. E., Bastian F. L.** Fracture toughness evaluation of unidirectional fiber metal laminates using traditional CTOD (δ) and Schwalbe (δ_5) methodologies // Engng Fract. Mech. 2004. V. 71, N 7/8. P. 1127–1138.
29. **Корнев В. М.** Диаграммы квазихрупкого разрушения тел с иерархией структур при малоцикловом нагружении // Физ. мезомеханика. 2011. Т. 14, № 5. С. 31–45.

*Поступила в редакцию 7/II 2012 г.,
в окончательном варианте — 12/IV 2012 г.*