РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОВОЙ ЗАДАЧИ С РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

М. А. Пудовкин

(*Казань*)

Для решения многих технических задач необходимо знание нестационарных полей в областях, границы которых меняются во времени заданным образом. Такие задачи начинают приобретать большое практическое значение. Известно, что общий метод решения тепловых задач с движущейся границей при произвольном законе ее перемещения основан на применении теории тепловых потенциалов [1,2] и приводит к решению интегральных уравнений. Большие затруднения, встречающиеся при численном решении даже простейших интегральных уравнений, вынуждают искать более эффективные методы решения, которые к настоящему времени еще недостаточно разработаны. Г. А. Гринберг [3], используя частный прием, указал решение линейных тепловых задач, когда граница области движется по закону $x = Vt$ или $x = A\sqrt{t}$ при постоянной температуре на движущейся границе. Б. Я. Любов [4], применяя интегральное преобразование Карсона — Лапласа к интегральному уравнению Вольтерра, дал метод решения линейных тепловых задач с равномерно движущейся границей, но использование результатов Б. Я. Любова для численных решений затруднительно. Д.В. Резодубов [5,6,7] решал упомянутые задачи методом, обобщающим метод Г. А. Гринберга [3], и методом контурных интегралов.

Ниже излагается способ решения третьей краевой задачи для линейного уравнения теплопроводности в полубесконечной области с постоянно движущейся границей, отличный от указанных в работах [1-7].

§ 1. Формулировка задачи. Требуется решить дифференциальное уравнение

$$a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - W\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t} + b(T - T_0) \qquad \text{для } x > Vt,\ t > 0 \tag{1.1}$$

где второе слагаемое справа характеризует изменение температуры в результате перемещения элемента, что, например, имеет место в пористых средах, в которые закачивают жидкость с постоянной скоростью W.

Предполагаем, что $W > V$. Кроме (1.1), должны выполняться условия

$$T(x,\ t) = T_0 = \text{const} = T(\infty,\ t) \qquad \text{при } t = 0 \tag{1.2}$$

$$\alpha(T - T_0) - \beta\frac{\partial T}{\partial x} = \varphi(t) \qquad \text{при } x = Vt \tag{1.3}$$

Введем вместо независимой переменной x новую переменную y — подвижную систему, в которой подвижная граница будет неподвижной, а именно

$$y = x - Vt \tag{1.4}$$

а вместо функции T — новую функцию $U(y,\ t)$ при помощи равенства

$$T(x,\ t) = T_0 + U(y,\ t)\exp\left(-\frac{(V-W)}{2a^2}\,y - \frac{(V-W)^2}{4a^2}\,t - bt\right) \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.1) и условия (1.2), (1.3) соответственно примут вид

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t} \qquad (y > 0,\ t > 0) \tag{1.6}$$

$$U = 0 \quad \text{при } t = 0, \qquad \delta U - \beta\frac{\partial U}{\partial y} = \Phi_1(t) \quad \text{при } y = 0 \tag{1.7}$$

Здесь

$$\delta = \alpha + \frac{V-W}{2a^2}\,\beta, \qquad \Phi_1(t) = \varphi(t)\exp\left(bt + \frac{(V-W)^2}{4a^2}\,t\right) \tag{1.8}$$

Далее положим

$$\delta U - \beta\frac{\partial U}{\partial y} = \psi(y,\ t) \tag{1.9}$$

Тогда $\psi(y,\ t)$ удовлетворяет уравнению и условиям

$$a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (y > 0,\ t > 0) \tag{1.10}$$

$$\psi(y,\ t) = 0 \quad \text{при } t = 0, \qquad \psi(y,\ t) = \Phi_1(t) \quad \text{при } y = 0 \tag{1.11}$$

Вместо последнего условия (1.11) берем более простое

$$\psi(y,\ t) = 1 \quad \text{при } y = 0 \tag{1.12}$$

§ 2. Решение задачи. Решением задачи (1.10), (1.11), (1.12) является [8]

$$\psi(y,\ t) = \operatorname{erfc}\frac{y}{2a\sqrt{t}} \qquad \left(\operatorname{erfc} Z = 1 - \operatorname{erf} Z,\ \operatorname{erf} Z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}\,du\right) \tag{2.1}$$

Последний интеграл табулирован [9]. Применяя принцип Дюгамеля [8], найдем, что решением задачи (1.10), (1.11) будет

$$\psi(y,\ t) = \frac{y}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\Phi_1(t)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau \tag{2.2}$$

Таким образом, будет определена правая часть (1.9), при этом равенство (1.9) будет обыкновенным линейным дифференциальным уравнением относительно $U(y,\ t)$ [10], Решая его, получаем

$$U(y,\ t) = Ce^{\theta y} + \frac{1}{\beta}e^{\theta y}\int_\infty^y e^{-\theta z}\psi(z,\ t)\,dz \qquad \left(\theta = \frac{\delta}{\beta}\right) \tag{2.3}$$

Здесь C — произвольная постоянная интегрирования, не зависящая от y, а через z обозначена переменная интегрирования. Из ограниченности $U(y,\ t)$ при $y\to\infty$ следует, что $C=0$.

Преобразуем (2.3), вводя новую переменную μ через равенство

$$z = y + \mu \tag{2.4}$$

Тогда равенство (2.3) примет вид

$$U(y,t) = \frac{1}{\beta}\int_\infty^0 e^{-\theta\mu}\psi(y+\mu,\ t)\,d\mu \tag{2.5}$$

Заменяя в (2.2) y на $y+\mu$, подставляя полученное выражение в (2.5), где изменим пределы интегрирования, а затем изменим порядок интегрирования, найдем

$$U(y,\ t) = -\frac{1}{\beta 2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\Phi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\left[\int_0^\infty (y+\mu)e^{-\theta\mu}\exp\frac{-(y+\mu)^2}{4a^2(t-\tau)}\,d\mu\right]d\tau \tag{2.6}$$

Внутренний интеграл проинтегрируем по частям

$$J = \int_0^\infty (y+\mu)e^{-\theta\mu}\exp\frac{-(y+\mu)^2}{4a^2(t-\tau)}\,d\mu = \tag{2.7}$$

$$= 2a^2(t-\tau)\exp\frac{-y^2}{4a^2(t-\tau)} - 2a^2\theta(t-\tau)\int_0^\infty \exp\left(-\theta\mu - \frac{(y+\mu)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\mu$$

и, так как

$$\int_0^\infty \exp\left(-\theta\mu - \frac{(y+\mu)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\mu =$$

$$= \exp\left[\theta y + \theta^2a^2(t-\tau)\right]\int_0^\infty \exp\left(-\frac{[y+\mu+2\theta a^2(t-\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\mu =$$

$$= \exp\left[\theta y + \theta^2a^2(t-\tau)\right]2a\sqrt{t-\tau}\operatorname{erfc}\left[\frac{y}{2a\sqrt{t-\tau}} + a\theta\sqrt{t-\tau}\right] \tag{2.8}$$

то внутренний интеграл (2.6) запишется

$$J = 2a^2(t-\tau)\exp\left(\frac{-y^2}{4a^2(t-\tau)}\right) -$$

$$-2a^2\theta(t-\tau)\exp\left[\theta y + \theta^2a^2(t-\tau)\right]2a\sqrt{t-\tau}\operatorname{erfc}\left[\frac{y}{2a\sqrt{t-\tau}} + a\theta\sqrt{t-\tau}\right] \tag{2.9}$$

Следовательно, равенство (2.6) принимает вид

$$U(y,\ t) = -\frac{a}{\beta\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\Phi_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\frac{-y^2}{4a^2(t-\tau)}\,d\tau +$$

$$+\frac{2a^2\theta e^{\theta y}}{\beta\sqrt{\pi}}\int_0^t \Phi_1(\tau)\exp\left[\theta^2 a^2(t-\tau)\right]\operatorname{erfc}\left[\frac{y}{2a\sqrt{t-\tau}} + a\theta\sqrt{t-\tau}\right]dt \tag{2.10}$$

Учитывая обозначения (1.8), (1.4), (1.5), в окончательном виде найдем

$$T(y,\ t) = T_0 - \frac{a}{\beta\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{V-W}{2a^2}y\right)\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left[-(t-\tau)\left(b+\frac{(V-W)^2}{4a^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau + \frac{2a^2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\alpha}{\beta}+\frac{V-W}{2a^2}\right]\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\,y\right)\times$$

$$\times\int_0^t \varphi(\tau)\exp\left\{-(t-\tau)\left[b+\frac{(V-W)^2}{4a^2}-a^2\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{V-W}{2a^2}\right)^2\right]\right\}\times$$

$$\times\operatorname{erfc}\left[\frac{y}{2a\sqrt{t-\tau}}+\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{V-W}{2a^2}\right)\sqrt{t-\tau}\right]d\tau \tag{2.11}$$

Выражение (2.11) дает решение, позволяющее найти поле температур в неподвижной системе.

Полагая в (2.11) $y = x - Vt$, найдем искомое решение, которое удовлетворит всем условиям сформулированной задачи. Оно имеет вид

$$T(x,\ t) = T_0 - \frac{a}{\beta\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{V-W}{2a^2}(x-Vt)\right]\times$$

$$\times\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left[-(t-\tau)\left(b+\frac{(V-W)^2}{4a^2}\right)-\frac{(x-Vt)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau +$$

$$+\frac{2a^2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\alpha}{\beta}+\frac{V-W}{2a^2}\right]\exp\left[\frac{\alpha}{\beta}(x-Vt)\right]\times$$

$$\times\int_0^t \varphi(\tau)\exp\left\{-(t-\tau)\left[b+\frac{(V-W)^2}{4a^2}-a^2\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{V-W}{2a^2}\right)^2\right]\right\}\times$$

$$\times\operatorname{erfc}\left[\frac{x-Vt}{2a\sqrt{t-\tau}}+a\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{V-W}{2a^2}\right)\sqrt{t-\tau}\right]d\tau \tag{2.12}$$

В обозначениях не различается температура в подвижной и неподвижной системах.

Поступила 26 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики. ГИТЛ, 1951.
2. Гурса Э. Г. Курс математического анализа. Т. III, ч. 1, ГТИИ, 1933.
3. Гринберг Г. А. Письмо в редакцию. ЖТФ, 1951, т. XXXI, вып. 3.
4. Любов Б. Я. Решение нестационарной одномерной задачи теплопроводности для области с равномерно движущейся границей, Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 6.
5. Резодубов Д. В. О линейных тепловых задачах с одной движущейся границей. ЖТФ, 1957, т. XXVII, вып. 9.
6. Резодубов Д. В. Об одном способе применения контурных интегралов к решению одномерных задач теории теплопроводности. Инж.-физич. журнал, 1959, т. II, № 1.
7. Резодубов Д. В. Решение линейных тепловых задач с равномерно движущейся границей в полубесконечной области. ЖЭТФ, 1960, т. XXX, вып. 6.
8. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М. Гостоптехиздат, 1952.
9. Лыков А. В. Теплопроводность нестационарных процессов. М. Гостоптехиздат, 1948.
10. Карслоу Х. С. Теория теплопроводности. М., Изд. 1947.