$\lesssim 10^{-6}$ с $\ll \tau_e = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ с и применима теория, изложенная в п. 4. Для указанных числовых значений параметров имеем $\mathrm{St} = 2$, $\mathrm{Re} = 10^3$, $J^* = 10^{-1}$, $\Delta e_p^0 = -5 \cdot 10^{-16}$ Кл, $J/S_ч = 5 \cdot 10^{-7}$ А/м². Такие плотности токов действительно наблюдаются при движении тел в облаках и осадках [2].

Поступила 6 V 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976.
2. **Soo S. L.** Dynamics of charged suspensions.— In: International Reviews in Aerosol Physics and Chemistry. Vol. 2. Oxford—N. Y., Pergamon Press, 1971. Рус. пер. Соу С. Л. Динамика заряженных суспензий.— В сб.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975.
3. **Имянитов И. М.** Электризация самолетов в облаках и осадках. Л.: Гидрометеоиздат, 1970.
4. **Cheng L., Soo S. L.** Charging of dust particles by impact.— J. Appl. Phys., 1970, vol. 41, N 2. Рус. пер. Л. Чень, Су С. Л. Электризация частиц пыли при соударениях.— Сб. пер. Механика, 1971, № 3.
5. **Рахматулин Х. А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред.— ПММ, 1956, т. 20, № 2.
6. **Черный Л. Т.** Электризация частиц суспензии при соударениях с граничными поверхностями. Предельные случаи: идеально проводящие и непроводящие частицы .— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4.
7. **Черный Л. Т.** Электризация слабопроводящих частиц суспензии при соударениях с граничными поверхностями.— ПММ, 1980, т. 44, № 4.

УДК 523.593

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА МНОГИХ МАСШТАБОВ В ЗАДАЧЕ О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

В. А. Батищев, В. В. Трепачев

(Ростов-на-Дону)

В работе [1] методом интегральных преобразований решена задача о волнах на поверхности вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины. В случае малой вязкости в [2] построены асимптотические разложения, справедливые на конечных отрезках времени.

В данной работе рассматривается плоская задача Коши—Пуассона для линеаризованных уравнений Навье—Стокса о движении несжимаемой жидкости малой вязкости под действием начального возвышения свободной поверхности

$$\partial \mathbf{v}/\partial t = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{v}, \ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$p = p_r + \lambda z, \ \mathbf{v} = 0, \ \zeta = \zeta_*(x)\ (t = 0), \ -p + \lambda\zeta + 2\varepsilon^2 \partial v_z/\partial z = 0 \ (z = 0),$$

$$\partial \zeta/\partial t = v_z, \ \partial v_x/\partial z + \partial v_z/\partial x = 0 \ (z = 0),$$

$$(\mathbf{v}, \partial \mathbf{v}/\partial x, p, \partial p/\partial x, \zeta_*) \to 0, |x| \to \infty,$$

$$\mathbf{v} = 0 \qquad (z = -H).$$

Все величины в (1) безразмерны. Здесь $\varepsilon^2 = 1/\mathrm{Re}$ — малый параметр; Re — число Рейнольдса; p_r — гидродинамическое давление; $\zeta(x, t)$ — возвышение свободной границы; $\lambda = gT^2\alpha^{-1}$; g — ускорение силы тяжести; α, T — соответственно единицы длины и времени. Начало координат взято на невозмущенной поверхности. Ось Oz направлена вертикально вверх. Жидкость приводится в движение начальным возвышением свободной границы $\zeta_*(x)$.

Асимптотические разложения решения задачи (1) при $\varepsilon \to 0$ строятся в виде

$$\mathbf{v} \sim \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k (\mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k + \mathbf{h}_k), \ \zeta \sim \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \zeta_k. \tag{2}$$

Аналогичный ряд строится для функции p с коэффициентами p_k, r_k, q_k. При исчезающей вязкости вблизи границ области формируются пограничные слои. Обозначим через D_S и D_Γ области пограничных слоев соответственно вблизи твердой границы S и свободной поверхности Г. Тогда $\mathbf{w}_k$, r_k — функции типа решений задачи пограничного слоя в D_S, а $\mathbf{h}_k$, q_k — в D_Γ.

Функции $\mathbf{v}_k$, p_k, определяющие течение всюду вне D_S и D_Γ, находятся в результате первого итерационного процесса [3] и выражаются через скалярную функцию $\varphi_k(x, z, t)$ по формулам $\mathbf{v}_k = \operatorname{grad} \varphi_k$, $p_k = -\partial\varphi_k/\partial t$, причем φ_k удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi_k = 0$. Введем преобразования Фурье по координате x и Лапласа по времени t:

$$\Phi f(\xi, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x, z, t)\, dx, \ Lf = \sigma \int_{0}^{\infty} f e^{-\sigma t} dt,$$

а также определим два масштаба времени t_1 и τ [4]:

$$t_1 = t + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \beta_k(t, \xi), \ \tau = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \omega_k(t, \xi). \tag{3}$$

Главные члены асимптотики (2) $\mathbf{v}_0$, p_0, ζ_0 находятся из решения соответствующей задачи [3] о течении идеальной жидкости, а коэффициент ζ_0 в разложении для возвышения свободной границы получается в виде

$$\Phi\zeta_0 = \zeta^*(\xi, \tau) \cos \gamma t_1,$$

где $\gamma = \sqrt{\lambda\xi \operatorname{th} \xi H}$, а ζ^* выражается через начальные данные и τ.

Функции $\mathbf{w}_k = (w_{xk}, w_{zk})$, проявляющие себя в области D_S, компенсируют невязки при выполнении условий прилипания в (1) и находятся с помощью второго итерационного процесса [3]. Для этого вводится преобразование растяжения $z = -H + \varepsilon s$ и требуется убывание $\mathbf{w}_k$ и их производных при $s \to \infty$. Тогда $w_{z0} = 0$, w_{x0} определяются из уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами, а w_{z1} получается в виде

$$L\Phi w_{z1} = -\lambda \sqrt{\sigma}\, \xi^2 (\sigma^2 + \gamma^2)^{-1} e^{-s\sqrt{\sigma}} \zeta^*(\xi, \tau).$$

Функции ζ_1, β_1, ω_1 в разложениях (2), (3) определяются применением первого итерационного процесса к условиям на свободной границе ($z = 0$) в (1). В результате для φ_1, ζ_1 выводим систему

$$\left.\begin{aligned} &\partial\zeta_1/\partial t_1 + \Pi\zeta_0 = v_{z1}, \ \partial\varphi_1/\partial t_1 + \Pi\varphi_0 + \lambda\zeta_1 = 0 \ (z = 0), \\ &\zeta_1 = \varphi_1 = 0 \ (t_1 = 0), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где оператор $\Pi = \dfrac{\partial\beta_1}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t_1} + \dfrac{\partial\omega_1}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial\tau}$.

Разделяя в (4) переменные t_1 и τ, получаем функцию ζ^* в виде

$$\zeta^*(\xi, \tau) = \Phi\zeta_* e^{\tau}. \tag{5}$$

Теперь, исключая φ_1 из системы (4), находим уравнение для ζ_1

$$\frac{\partial^2\Phi\zeta_1}{\partial t_1^2} + \gamma^2\Phi\zeta_1 = \left[\frac{\lambda\xi^2\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}\operatorname{ch}^2(\xi H)} M(\gamma t_1) + 2\frac{\partial\beta_1}{\partial t}\cos\gamma t_1 + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\gamma^{-1}\sin\gamma t_1\right]\zeta^*, \tag{6}$$

где $M(x) = \cos x \cdot c_1(\sqrt{x}) + \sin x \cdot s_1(\sqrt{x})$; $c_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \cos \xi^2 d\xi$; $s_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \sin \xi^2 d\xi$. Из (6) выводится ζ_1. Неизвестные функции ω_1, β_1, согласно методу многих масштабов [4], определяются из условия, чтобы коэффициенты при ε^1 в асимптотических разложениях (2) были ограничены при $t \to \infty$; в результате находим

$$\beta_1 = \beta t, \ \omega_1 = \gamma\beta t, \ \beta = -\lambda\xi^2/[2\sqrt{2}\gamma^2\sqrt{\gamma}\, \mathrm{ch}^2(\xi H)].$$

Для первых двух членов асимптотического разложения возвышения свободной поверхности ζ имеем

$$\zeta \sim \zeta_0 + \varepsilon\zeta_1, \ \Phi\zeta_0 = \cos\gamma(1+\varepsilon\beta)\, t \cdot \Phi\zeta_* e^{-\varepsilon\gamma\beta t}, \tag{7}$$

$$\Phi\zeta_1 = \frac{\lambda\xi^2}{2\sqrt{2}\,\gamma^2\sqrt{\gamma}\,\mathrm{ch}^2(\xi H)}\Big[\gamma t(\cos\gamma t - \sin\gamma t) - \sqrt{\frac{2\gamma t}{\pi}} +$$
$$+ M(\gamma t) + 2\gamma t\big(c_1(\sqrt{\gamma t})\sin\gamma t - s_1(\sqrt{\gamma t})\cos\gamma t\big)\Big]\Phi\zeta_* e^{-\varepsilon\gamma\beta t}.$$

Рассмотрим случай жидкости бесконечной глубины. Теперь в системе (1) последнее условие выполняется при $z = -\infty$, а в разложениях (2) отсутствуют коэффициенты $\mathbf{w}_k$, r_k. Выражение для возвышения свободной границы идеальной жидкости ζ_0 получается в виде $\Phi\zeta_0 = \cos\varphi t_1 \cdot \zeta^*(\xi, \tau)$, где $\varphi = \sqrt{\lambda|\xi|}$, а ζ^* определяется по формуле (5).

При $\varepsilon \to 0$ пограничный слой формируется только вблизи свободной границы Г. Функции $\mathbf{h}_k = (h_{xk}, h_{zk})$ компенсируют невязки при выполнении динамического условия для касательного напряжения на Г и находятся посредством второго итерационного процесса, причем $\mathbf{h}_0 = h_{z1} = q_k = 0$ $(k \geqslant 0)$: $L\Phi h_{z2} = -2\lambda\xi^3(\sigma^2+\varphi^2)^{-1}\exp(-s\sqrt{\sigma})\zeta^+$, $s = z/\varepsilon$. Коэффициенты β_2, ω_2 в разложениях (3) вычисляются одновременно с определением функций $\mathbf{v}_2$, ζ_2, p_2. Заметим, что в данном случае $\mathbf{v}_1 = p_1 = \zeta_1 = \omega_1 = \beta_1 = 0$, а ζ_2 определяется из формулы

$$\Phi\zeta_2 = \left[(\varphi\beta_2 + 2\xi^2\varphi^{-1})\sin\varphi t_1 - (\omega_2 + 2\xi^2 t_1)\cos\varphi t_1\right] e^{\tau}\Phi\zeta_*.$$

Из условия ограниченности при $t \to \infty$ коэффициентов при ε^2 в разложениях (2) выводятся выражения для β_2 и ω_2: $\omega_2 = -2\xi^2 t$, $\beta_2 = 0$.

Для асимптотического разложения возвышения свободной границы с точностью до членов порядка ε^3 находим

$$\zeta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\varepsilon^2\xi^2 t}\Phi\zeta_*\left(\cos\varphi t + 2\varepsilon^2\xi^2\varphi^{-1}\sin\varphi t\right)e^{i\xi x}d\xi + O(\varepsilon^3). \tag{8}$$

Построенные асимптотические разложения (2) и формулы (7), (8) описывают затухание волн, вызванных начальным возмущением свободной поверхности на временах порядка $O(\sqrt{\mathrm{Re}})$ и $O(\mathrm{Re})$ соответственно. Заметим, что коэффициент при ε^0 в асимптотической формуле (8) совпадает с известным интегралом Л. Н. Сретенского [1], а при разложении экспоненты $\exp(-2\varepsilon^2\xi^2 t)$ в ряд по степеням ε получаются первые два члена асимптотики ζ работы [2].

Поступила 3 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сретенский Л. Н.** О волнах на поверхности вязкой жидкости.— Труды ЦАГИ, 1941, № 541.
2. **Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С.** Асимптотический анализ волновых движений вязкой жидкости со свободной границей.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
3. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— УМН, 1957, т. 12, № 5.
4. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.