О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СКВАЖИН В СЛОИСТЫХ ПЛАСТАХ

В. Н. Эмих
(Новосибирск)

Ниже рассмотрено взаимодействие нескольких совершенных скважин, работающих в слоистых грунтах, т. е. в системе хорошо проницаемых грунтов перемежающихся с плохо проницаемыми. Оказывается, что интерференция скважин может быть весьма ощутимой, особенно при малых расстояниях между скважинами и малой проницаемостью соседних пластов.

§ 1. Скважины в одном напорном пласте. Пусть водоносный пласт мощности a граничит сверху с пластом мощности a_0, а снизу — с пластом мощности a_1. Коэффициенты фильтрации k_0 и k_1 соседних пластов малы по сравнению с коэффициентом фильтрации k водоносного горизонта. Границы всех пластов — горизонтальные плоскости. Напор $h(x, y)$ рассматриваемого водоносного горизонта, в котором работают скважины, неизвестен; напоры водоносных пластов, лежащих выше и ниже рассматриваемого, постоянны и равны соответственно H_0 и H_1. Тогда уравнение для h при установившемся движении имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}-\omega^2(h-H)=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}-\omega^2 S=0 \tag{1.1}$$

где $S = H-h$ понижение кривой депрессии

$$\omega^2=\frac{1}{ka}\left(\frac{k_0}{a_0}+\frac{k_1}{a_1}\right), \qquad H=\left(\frac{k_0}{a_0}+\frac{k_1}{a_1}\right)^{-1}\left(\frac{k_0 H_0}{a_0}+\frac{k_1 H_1}{a_1}\right)$$

Уравнение (1.1) имеет частное решение $S=0\,(h=H=\mathrm{const})$, отвечающее тому случаю, когда скважины не работают, а имеет место переток из одного слоя в другой. Частными решениями уравнения (1.1) будут также цилиндрические функции мнимого аргумента нулевого порядка $K_0(\omega r_i)$ и $I_0(\omega r_i)$, причем

$$r_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Решение вида

$$S=-\sum_{i=1}^{n}[A_i K_0(\omega r_i)+B_i I_0(\omega r_i)], \qquad h=H+\sum_{i=1}^{n}[A_i K_0(\omega r_i)+B_i I_0(\omega r_i)]$$

также будет решением уравнения (1.1).

Если поставить условие $h\to H$ при $r\to\infty$, между тем как $I_0(\omega r_i)\to\infty$, то можно считать $B_i=0$ $(i=\overline{1, n})$. Решение вида

$$h=H+\sum_{i=1}^{n}A_i K_0(\omega r_i) \tag{1.2}$$

соответствует наличию n скважин с центрами в точках (x_i, y_i) в плане.

§ 2. Скважины в безнапорном пласте. Для безнапорного пласта функция $h(x, y)$, совпадающая с ординатой свободной поверхности, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}-\omega^2(h-H)=0 \tag{2.1}$$

В этом случае на рассматриваемый водоносный горизонт влияет только нижележащий водоносный пласт, напор H в котором постоянен.

Линеаризуя уравнение (2.1), т. е. полагая в нем (для не очень больших понижений) [2]

$$h-H\approx(h-H)\frac{h+H}{2H}=\frac{h^2-H^2}{2H}$$

приведем его к виду

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}-\omega^2(h^2-H^2)=0, \qquad \omega^2=k_1/ka_1H \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) имеет такой же вид, как и (1.1). Его решение, отвечающее наличию n скважин в точках (x_i, y_i) в плане и удовлетворяющее условию $h=H$ на ∞, имеет вид

$$h^2=H^2+\sum_{i=1}^{n}A_i K_0(\omega r_i) \tag{2.3}$$

§ 3. **Примеры.** *1. Две скважины в безнапорном горизонте.* Рассмотрим две одинаковые (в смысле размеров, понижения и дебита) скважины в безнапорном пласте; оси скважин отстоят одна от другой на расстоянии $2l$. Выберем оси x и y в основании пласта, причем плоскость xz направим через оси скважин, а ось z выберем так, чтобы скважины оказались симметричными относительно нее. В точке (x, y), отстоящей от осей скважин на расстояниях

$$r_1 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x+l)^2 + y^2},$$

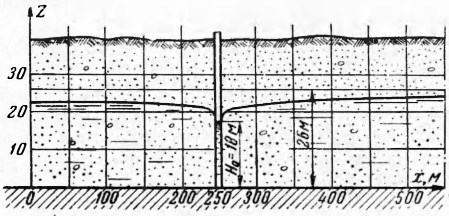
h определится согласно (2.3) при $n=2$

В силу симметрии скважин

$$A_1 = A_2 = A$$

так что

$$h^2 = H^2 + A\,[K_0(\omega r_1) + K_0(\omega r_2)] \qquad (3.1)$$



Фиг. 1

Полагая здесь $y = 0$, $x = l - \delta$, $H - H_0$, найдем

$$A = -\frac{H^2 - H_0^2}{K_0(\omega\delta) + K(2\omega l)}$$

Для определения дебита Q каждой из скважин здесь и в дальнейшем будем дифференцировать (3.1) в направлении, совпадающем с осью x.

Положим

$$\text{в (3.1)}\ y = 0, \qquad r_1 = |x - l|, \qquad r_2 = |x + l|, \qquad x > 0.$$

Тогда вдоль оси x

$$h^2 = \begin{cases} H^2 + A\{K_0[(l-x)\omega] + K_0[(l+x)\omega]\} & (0 \leqslant x \leqslant l - \delta) \\ H^2 + A\{K_0[(x-l)\omega] + K_0[(x+l)\omega]\} & (l + \delta \leqslant x < \infty) \end{cases} \qquad (3.2)$$

Слева от оси $z\,(x < 0)$ картина симметрична. Пользуясь равенством [3]

$$K_0'(x) = -K_1(x) \qquad (3.3)$$

малостью δ по сравнению с $2l$ и дифференцируя по x первое уравнение (3.2), найдем

$$Q = -2\pi\delta kh \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=l-\delta} = \frac{\pi k (H^2 - H_0^2)\,\omega\delta\,[K_1(\omega\delta) + K_1(2\omega l)]}{K_0(\omega\delta) + K_0(2\omega l)}$$

Для $\omega\delta < 0.02$ можно пользоваться приближенными формулами

$$K_0(\omega\delta) \approx \ln(1.123 / \omega\delta) = \ln(R/\delta), \qquad K_1(\omega\delta) \approx \omega\delta^{-1} \qquad (3.4)$$

Обычно $\omega\delta$ имеет порядок $10^{-2} - 10^{-5}$. Поэтому выражение для Q можно переписать так

$$Q \approx \frac{\pi k (H^2 - H_0^2)}{\ln(R/\delta) + K_0(2\omega l)} \qquad (3.5)$$

Если, кроме того, $2\omega l < 0.02$, то и $K_0(2\omega l) \approx \ln(1.123 / 2\omega l) = \ln(R / 2l)$ и тогда

$$Q \approx \frac{\pi k (H^2 - H_0^2)}{\ln(R/\delta) + \ln(R/2l)} = \frac{\pi k (H^2 - H_0^2)}{\ln(R^2 / 2\delta l)} \qquad (3.6)$$

В формуле (3.1) было положено $y = 0$ и по уравнениям (3.2) построен график зависимости h от x вдоль оси x (фиг. 1) для $x > 0$ при следующих значениях параметров:

$$l = 250\,\text{м}, \quad H = 26\,\text{м}, \quad H_0 = 18\,\text{м}, \quad k = 32\,\text{м}/\text{сут}$$
$$k_1 = 0.001\,\text{м}/\text{сут}, \quad a_1 = 25\,\text{м}, \quad \delta = 0.15\,\text{м}.$$

По формуле (2.2) находим $\omega \approx 0.22 \cdot 10^{-3}$ $м^{-1}$. Здесь $\omega\delta \approx 0.33 \cdot 10^{-4} < 0.02$, но $2\,\omega l \approx 0.11 < 0.02$. Поэтому расход следует вычислять по формуле (3.5).

Из фиг. 1 видно, что кривая депрессии круто снижается в непосредственной близости к скважине. Заметим, что в данной гидравлической теории не учитывается промежуток высачивания.

Подсчитанный по формуле (3.5) дебит каждой из взаимодействующих скважин равен 32 *л/сек* $\approx$ 115 $м^3$/*час*; дебит же одиночной сважины, работающей с тем же понижением

$$Q = \frac{\pi k (H^2 - H_0^2)}{\ln(R/\delta)}$$

составляет 39.3 *л/сек* $\approx$ 141 *м*^{3}/*час*. Таким образом, отношение дебита каждой из взаимодействующих скважин к дебиту одиночной скважины Q_0 равно

$$\eta = (Q / Q_0)\, 100 = (115 / 141)\, 100 \approx 81.6\%$$

Для $l = 500$ *м* и при тех же значениях остальных параметров это отношение оказалось равным 86.5%.

Был построен также график кривой депрессии в плоскости yz на основании (3.1), в котором положено $x = 0$.

2. *Четыре скважины в безнапорном горизонте, оси которых лежат в одной вертикальной плоскости.* Как и в случае двух скважин, направим плоскость xz через оси скважин, а ось z выберем так, чтобы две средние скважины *1* и *1'* оказались симметричными относительно нее и были от оси z на расстоянии l_1; предположим, что симметричные скважины попарно одинаковы во всех отношениях. Тогда согласно (2.3) при $n = 4$ напор в точке $M\ (x,\ y)$ выразится уравнением

$$h^2 = H^2 + A\,[K_0(\omega r_1) + K_0(\omega r_2)] + B\,[K_0(\omega r_3) + K_0(\omega r_4)] \tag{3.7}$$

Здесь

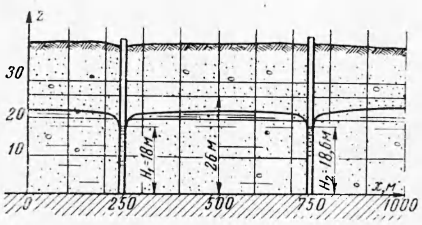
$$r_1 = \sqrt{(x - l_1)^2 + y^2}, \qquad r^2 = \sqrt{(x + l_1)^2 + y^2}$$
$$r_3 = \sqrt{(x - l_2)^2 + y^2}, \qquad r_4 = \sqrt{(x + l_2)^2 + y^2} \tag{3.8}$$

Задав условия на скважинах: $h = H_1$ при $x = l_1 - \delta$, $y = 0$ и $h = H_2$ при $x = l_2 - \delta$, $y = 0$, найдем из (3.7) постоянные A и B.

Положим в (3.8) $y = 0$. Тогда получим уравнение кривой депрессии в плоскости xz

$$h^2 = H^2 + A\,[K_0(\omega\,|\,x - l_1\,|) + K_0(\omega\,|\,x + l_1\,|)] + B\,[K_0(\omega\,|\,x - l_2\,|) + K_0(\omega\,|\,x + l_2\,|)] \tag{3.9}$$

Пользуясь (3.4), малостью $\omega\delta$ и дифференцируя по x уравнение (3.9), найдем дебит Q каждой из скважин *1* и *1'*



Фиг. 2

$$Q_1 = -2\pi\delta k h\, \frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x = l_1 - \delta} \approx -\pi k A$$

и аналогично для Q_2 имеем

$$Q_2 \approx -\pi k B$$

Если потребовать, чтобы дебиты всех четырех скважин были равны ($Q_1 = Q_2$), то $A = B$, т. е. получим соотношение, связывающее H_1 и H_2. При $l_1 = 250$ *м*, $l_2 = 750$ *м*, $H_1 = 18$ *м* и прежних значениях остальных параметров из этого соотношения найдено $H_2 = 18.6$ *м* и по (3.9) построен график кривой депрессии в плоскости xz (фиг. 2), а также в плоскости yz.

3. *Четыре скважины в безнапорном горизонте, центры которых в плане лежат по вершинам квадрата.* Выберем оси координат так, чтобы оси скважин оказались в двух вертикальных координатных плоскостях xz и yz; плоскость xy совместим по-прежнему с основанием водоносного пласта. Тогда для h получим уравнение

$$h^2 = H^2 + A\,[K_0(\omega r_1) + K_0(\omega r_2) + K_0(\omega r_3) + K_0(\omega r_4)] \tag{3.10}$$

Здесь $r_1 = \sqrt{(x - l)^2 + y^2}$ и т. д.; l — расстояние скважин от начала координат. Скважины считаем одинаковыми во всех отношениях. Задав условие на стенке одной из них, например, $h = H_0$ при $x = l - \delta$, $y = 0$, найдем из (3.10). Так же, как и раньше, определяем дебит Q каждой из четырех сважин, работающих одновременно

$$Q \approx \frac{k\pi\,(H^2 - H_0{}^2)}{\ln(R / \delta) + K_0(2\omega l) + 2K_0(\omega l\sqrt{2})}, \qquad R = 1.123 / \omega \tag{3.11}$$

Для $l = 250$ *м*, $\delta = 0.1$ *м* и прежних значениях остальных параметров $Q = 80$ *м*^{3}/*час* $\approx$ 22 *л/сек*, что составляет около 59% дебита одиночной скважины при том же понижении. При $l = 1000$ *м* это отношение достигает 74%, при $l = 5000$ *м* — 96.2%, т. е. скважины уже почти не взаимодействуют. Понижение в центре S_{00}, вычисленное по (3.10) при $x = y = 0$, равно 5.7 *м*.

§ 4. **Случай непроницаемости пластов, ограничивающих напорный горизонт.** Уравнение (1.1) имеет в этом случае вид $\Delta h = 0$, так как $\omega = 0\ (k_0 = k_1 = 0)$, а его решение выражается формулой

$$h = (Q / 2\pi k a) \ln r + C \tag{4.1}$$

где a — мощность водоносного пласта. Согласно (4.1) на любом расстоянии кривая пьезометрического напора будет повышаться; поэтому приходится считать, что скважина окружена некоторым контуром питания. В качестве конкретного случая возьмем круговой контур радиуса R со скважиной в центре.

Пусть $h = H$ при $r = R$ и $h = H_0$ при $r = \delta$; тогда дебит определяется по формуле

$$Q = \frac{2\pi ka\,(H - H_0)}{\ln(R\,/\,\delta)} \tag{4.2}$$

Дебит же одиночной скважины в напорном пласте в случае слабой проницаемости соседних пластов выражается формулой

$$Q = \frac{2\pi ka\,(H - H_0)}{K_0\,(\omega\delta)} \approx \frac{2\pi ka\,(H - H_0)}{\ln(1.123\,/\,\omega\delta)}$$

Сравнивая эту формулу с предыдущей, видим, что расходы будут равны, если

$$R = 1.123\,/\,\omega \tag{4.3}$$

Таким образом, в случае слабой проницаемости соседних пластов можно считать, что водоносный горизонт граничит с непроницаемыми слоями, но скважины окружены круговым контуром питания радиуса $R = 1.123\,/\,\omega$.

Рассмотрим систему двух одинаковых скважин, окруженных тем же контуром питания и расположенных симметрично относительно центра круга на расстоянии l от него. Пользуясь методом инверсии относительно кругового контура питания, можно найти выражение для дебита Q^* каждой из скважин, работающих одновременно

$$Q^* = \frac{2\pi ka\,(H - H_0)}{\ln[(R^4 - l^4)\,/\,2\delta l R^2]} \tag{4.4}$$

Сравнивая (4.4) и (4.2), найдем

$$\eta = \frac{Q^*}{Q} = \frac{\ln(R\,/\,\delta)}{\ln(R\,/\,\delta) + \ln[(R^4 - l^4)\,/\,2lR^3]} \tag{4.5}$$

В случае слабой проницаемости соседних пластов η всегда меньше единицы. В данном же случае, когда мы полагаем наличие контура питания, η может оказаться больше единицы, если, как видно из (4.5)

$$(R^4 - l^4)\,/\,2lR^3 < 1$$

что будет при $R < 2.107\,l$, или при $l > R\,/\,2.107$. Этот на первый взгляд парадоксальный результат объясняется тем, что скважины, расположенные достаточно близко к контуру питания, оказываются в лучших условиях, чем одиночная скважина, расположенная в центре. Иначе говоря, уменьшение дебита за счет взаимодействия скважин компенсируется увеличением дебита благодаря близости к контуру питания.

Если же наоборот $l\,/\,R$ мало (порядка 0.1), то в формуле (4.4) величиной l^4 можно пренебречь, и получаем

$$Q^* \approx \frac{2\pi ka\,(H - H_0)}{\ln(R\,/\,\delta) + \ln(R\,/\,2l)} \tag{4.6}$$

При одновременной работе двух скважин в случае очень слабой проницаемости соседних пластов дебит каждой из скважин дается формулой

$$Q \approx \frac{2\pi ka\,(H - H_0)}{\ln(1.123\,/\,\omega\delta) + K_0\,(2\omega l)}$$

или, если $2\omega l < 0.02$

$$Q \approx \frac{2\pi ka\,(H - H_0)}{\ln(1.123\,/\,\omega\delta) + \ln(1.123\,/\,2\omega l)}$$

Эта формула совпадает с (4.6), если $R = 1.123\,/\,\omega$. Условие малости $l\,/\,R$ при этом выполняется; в самом деле

$$l\,/\,R < l\omega < 0.01$$

Автор благодарит П. Я. Полубаринову-Кочину за помощь при выполнении предлагаемой работы.

Поступила 7 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. О дебите скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором. Изв. АН СССР, ОТН, 1960, № 3.
3. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гоcиздат, 1958.