ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКИХ ПРИТУПЛЕННЫХ ТЕЛ С ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ ГАЗА В ВЫСОКОЭНТРОПИЙНОМ СЛОЕ

***В. В. Лунев** (Москва)*

При гиперзвуковом ($M \gg 1$) обтекании тонких притупленных тел к их поверхности примыкает высокоэнтропийный слой газа, с высокой температурой и малой плотностью, образованный газом, прошедшим через ударную волну большой интенсивности в окрестности притупления. В этом слое, в отличие от внешней, низкоэнтропийной области течения, где справедлив закон плоских сечений и продольная скорость газа uU близка к скорости набегающего потока U, эти скорости могут заметно различаться.

Для несовершенного газа существует большой диапазон скоростей U и плотностей ρ_∞ обтекания (U для воздуха от 3000 до 1000 *м / сек*), в котором физико-химические превращения газа, протекающие равновесным или неравновесным образом, имеют место лишь в высокоэнтропийном слое, в то время как вне его газ можно считать совершенным с тем же показателем адиабаты γ, что и в набегающем потоке. Ниже рассматривается именно такой случай.

Различные стороны влияния высокоэнтропийного слоя на обтекание тонких притупленных тел рассмотрены в работах [1, 2] и др. В работе [1] показано, что учет влияния физико-химических превращений воздуха в высокоэнтропийном слое и продольного движения газа в нем, с точки зрения применения взрывной аналогии, качественно эквивалентен изменению энергии, сообщаемой газу притупленным носком, т. е. изменению коэффициента сопротивления c_x носка. Аналогичные идеи в той или иной форме для частных случаев содержатся в работах [3–5].

В развитие этого для плоских ($\nu = 0$) и осесимметричных ($\nu = 1$) обтеканий ниже установлен закон подобия, основанный на введении эффективного коэффициента сопротивления носка. При этом распределение давления по телу, формы ударных волн и распределение параметров вне высокоэнтропийного слоя имеют универсальный вид, который не зависит от процессов в высокоэнтропийном слое, протекающих равновесным или неравновесным образом.

Аналогичный закон подобия имеет место для взрыва в атмосфере в тех случаях, когда отличие газа от совершенного существенно лишь в центральной части взрывной зоны.

1. Для описания обтекания тонких притупленных тел используем для элементарного перпендикулярного оси слоя, при прохождении его телом, интегральные соотношения энергии и импульса в радиальном направлении, которые приведем к виду

$$\frac{1}{2} R^{1+\nu} v_R{}^2 J_1 + \frac{p_w}{\gamma - 1} (R^{1+\nu} - r_w^{1+\nu}) J_2 = \frac{1}{2} c_x{}^* + 2^\nu \int_0^x p_w r_w' r_w{}^\nu \, dx + \frac{R^{1+\nu}}{\gamma(\gamma - 1) M^2} \qquad (1.1)$$

$$2^{-\nu} R^{1+\nu} v_R J_3 = I + \int_0^x \left(p_w J_4^\nu - \frac{1}{\gamma M^2} \right) R^\nu \, dx \qquad (1.2)$$

$$J_1 = \frac{1}{\psi_R} \int_0^{\psi_R} \left(\frac{v}{v_R} \right)^2 \frac{d\psi}{w}, \qquad J_2 = 2^\nu (R^{1+\nu} - r_w{}^{1+\nu})^{-1} \int_{r_w}^{R} \frac{p}{p_w} r^\nu \, dr$$

$$J_3 = \frac{1}{\psi_R} \int_0^{\psi_R} \frac{v}{v_R} \frac{d\psi}{w}; \qquad J_4 = \int_{r_w}^{R} \frac{p}{p_w} dr, \qquad c_x{}^* = c_x \left(1 - \frac{2E_1}{c_x} \right)$$

$$v_R = \frac{2}{1 + \gamma} R' = \left(1 - \frac{1}{M^2 R'^2} \right), \qquad \psi_R = R^{1+\nu}$$

Здесь и ниже xr_0, rr_0 — продольная (отсчитываемая от места сопряжения носка и боковой поверхности) и радиальная координаты, r_0R, r_0r_w — формы ударной волны и поверхности тела, $2r_0$ — диаметр миделя носка $\rho_\infty U^2 p$, $\rho_\infty \rho$, $U^2 i$, Uw, Uv — давление, плотность, энтальпия, скорость газа и составляющая вдоль оси r, $\rho_\infty U^2 p_w$ — давление на поверхности тела, $\pi^\nu r_0{}^{1+\nu} \rho_\infty U \psi$ — функция тока. Величина $I r_0{}^{1+\nu} \rho_\infty U^2$ равна количеству движения в перпендикулярном оси r направлении, приобретаемому газом (на единицу угла между двумя близкими меридиальными плоскостями при $\nu = 1$) при прохождении окрестности притупления. Величина $c_x{}^*$ в такой записи является как бы местным, эффективным коэффициентом сопротивления носка.

Функция E_1 учитывает влияние физико-химических процессов в высокоэнтропийном слое (первое слагаемое под интегралом) и изменение энергии в рассматриваемом элементарном слое вследствие продольного перетекания газа через его границы. Эта функция имеет вид [1]

$$E_1 = 2^\nu \int_{r_w}^{R} r^\nu \rho \left[\left(i - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\right) + \frac{(1-u)^2}{2}\right] dr -$$

$$-2^\nu \int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dx} \int_{r_w}^{R} \left\{\left[\frac{(1-u)^2}{2} + \frac{v^2}{2} + i - \frac{p}{\rho}\right]\rho + p\right\}(1-u)\, r^\nu dr =$$

$$= \int_0^{\psi_R} \left(i - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\right)\frac{d\psi}{u} + \int_0^{\psi_R}\left[\frac{u(1-u)^2}{2} + \frac{v^2}{2} - (1-u)\, i\right]\frac{d\psi}{u} \tag{1.3}$$

Пользуясь уравнением Бернулли

$$i = {}^1/_2 (1 - w^2) + 1 / (\gamma - 1) M^2$$

пренебрегая членами порядка M^{-2}, и заменяя скорость u близкой величиной w, получим

$$\frac{1}{c_x} E_1 = \int_0^{\varphi_\delta} \left[\left(i - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\right) - \frac{(1-w)^2}{2}\right]\frac{d\varphi}{w} \qquad \left(\varphi = \frac{\psi}{c_x}\right) \tag{1.4}$$

Здесь интегрирование распространено лишь на область высокоэнтропийного слоя, так как вне его подынтегральное выражение (1.4), согласно предположению, пренебрежимо мало. При этом известная неопределенность в выборе граничной линии тока ψ_δ не сказывается, очевидно, на величине E_1.

Для диссоциированного воздуха первое слагаемое E_1 обычно много превосходит второе, и функция E_1 положительна. Для совершенного газа при $\gamma = 1.4$ величина E_1 пренебрежимо мала.

Интегралы J_k близки к единице, что использовалось ранее в приближенных теориях: при $J_k = 1$ и $E_1 = 0$ система (1.1) — (1.2) совпадает с уравнениями Г. Г. Черного [6], а при $J_k = 1$ — с уравнениями работы [1]. Здесь предположим лишь, что входящие под эти интегралы профили величин подобны в такой степени, что величины J_k можно считать одинаковыми, по крайней мере, для тел с аффиноподобной формой боковой поверхности для заданного произведения $M\theta$, где θ — относительная толщина тела.

В общем случае неравновесного движения газа в высокоэнтропийном слое изменение параметров его вдоль линий тока при заданном распределении давления определяется уравнениями типа

$$\omega w \frac{d\alpha_j}{dx} = W(\rho_\infty U^2 p, T, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad \left(\omega = \frac{U\tau}{r_0}, \quad j = 1, \ldots, n\right)$$

$$\frac{di}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}, \qquad i = i(\rho_\infty U^2, p, T, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \rho = \rho(\rho_\infty U^2 p, T, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{1.5}$$

Здесь α_j — концентрации компонент газовой смеси, T — температура газа, τ — время, характеризующее скорость протекания реакции. Отсюда следует, что функция E_1 для заданного газа и формы носка зависит от условий обтекания и является функционалом от распределения давления p_w. В предельных случаях равновесного ($\omega \to \infty$) и замороженного ($\omega \approx 0$) относительно состава в начальном сечении течения величина E_1 зависит лишь от местного значения p.

В этих предельных случаях $E_1 \sim p^{(\gamma_0 - 1)/\gamma_0}$, где γ_0 эффективный показатель адиабаты в высокоэнтропийном слое. Так как обычно разность $\gamma_0 = 1$ мала, особенно для равновесно диссоциирующего воздуха при высоких температурах, то величина $c_x{}^*$ в предельных случаях $\omega \approx 0$ и $\omega \to \infty$ изменяется вдоль образующей боковой поверхности весьма медленно, особенно если изменение p_w невелико (например, притупленные конус, клин). Можно ожидать, что это обстоятельство — медленное изменение отношения $c_x{}^* / c_x$ вдоль боковой поверхности — имеет место и в общем случае умеренных значений параметра ω; на данном этапе примем это как допущение и ограничение применимости изложенных ниже результатов.

[1] В работе [1] в формуле, аналогичной (1.3), в подынтегральном выражении второго слагаемого опущен малый член $v^2 / 2$, а вместо величины i вследствие опечатки стоит p / ρ.

2. В математическом выражении принятое допущение означает

$$\frac{dc_x^*}{dx} \sim \varepsilon \ll 1 \tag{2.1}$$

где $\varepsilon = (\gamma_0 - 1) / \gamma_0$ для предельных случаев $\omega = 0$ и $\omega \to \infty$.

Пусть $r_w = \theta r_w^{(0)} + 1$, $r_w^{(0)}(0) = 0$. Из уравнения (1.1) имеем $pR^{1+\nu} \sim 1$, поэтому порядок отношения величины I к другому члену правой части уравнения (1.2) не превышает IR / x. Тогда на достаточно большом удалении от носка, где $x \gg 1$, $1 \ll R \ll x$, в системе (1.1), (1.2) можно пренебречь величиной I и, кроме того, положить $r_w = \theta r_w^{(0)}$, $R(0) = 0$. Введем переменные

$$x_1 = \lambda x, \qquad r_1 = \lambda r, \qquad R_1 = \lambda R, \qquad r_{1w}^{(0)} = \lambda r_w^{(0)}, \qquad \lambda = (2 / c_x^*)^{1/(1+\nu)} \tag{2.2}$$

Тогда с точностью до членов порядка ε система (1.1), (1.2) примет вид

$$\frac{1}{2} R_1^{1+\nu} v_R^2 J_1^{(0)} + \frac{p_w}{\gamma - 1} [R_1^{1+\nu} - (\theta r_{w_1}^{(0)})^{1+\nu}] J_2^{(0)} =$$

$$= 1 + 2^\nu \theta \int_0^{x_1} p_w (r_{1w}^{(0)})' (r_{1w}^{(0)})^\nu dx_1 + \frac{R_1^{1+\nu}}{\gamma(\gamma - 1) M^2} \tag{2.3}$$

$$2^{-\nu} R_1^{1+\nu} v_R J_3^{(0)} = \int_0^{x_1} \left[p (J_4^{(0)})^\nu - \frac{1}{\gamma M^2} \right] R_1^\nu dx_1 \qquad (R_1(0) = 0)$$

где величины $J_k^{(0)}$ равны J_k, если в последних положить $r_w = \theta r_w^{(0)}$.

Уравнения (2.3) в принятой постановке не зависят от процессов в высокоэнтропийном слое.

Отсюда следует, что в переменных (2.2) формы ударных волн $R_1(x_1)$ и распределение давления $p_w(x_1)$ при заданных γ, M и θ одинаковы для всех аффиноподобных тел с формой $r_w^0(x_1)$ и совпадают с теми же характеристиками для совершенного газа. Эти характеристики подчиняются частным случаям закона подобия, известным для совершенного газа [6]. Так, при конечных θ в переменных подобия

$$R_2 = \theta^{2-\nu} R_1, \qquad p_2 = p\theta^{-2}, \qquad r_2 = \theta^{2-\nu} r_1, \qquad x_2 = \theta^{3-\nu} x_1$$

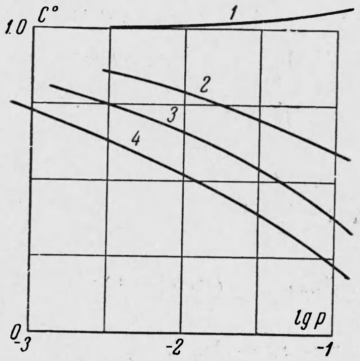
для одинаковых $r_{1w}^{(0)}(x_1)$ течение зависит лишь от параметров γ и $M\theta$. При $\theta = 0$ имеет место универсальная зависимость величин $R_1 M^{-2/(1+\nu)}$ и pM^2 от γ и переменной $x_1 M^{-(3+\nu)/(1+\nu)}$. Таким образом, изложенный закон подобия исключает из критериев подобия основных характеристик обтекания тонких притупленных тел требование подобия уравнения состояния газа в высокоэнтропийном слое.

В низкоэнтропийной области уравнения движения в переменных подобия (x_1, r_1) и соотношения по ударной волне не содержат иных определяющих параметров, кроме M, γ. Поэтому, так как задание ударной волны полностью определяет течение в области ее влияния, то из совпадения форм ударных волн $R_1(x_1)$ должно следовать одинаковое распределение функций $v(x_1, r_1)$, $p(x_1, r_1)$ и $\rho(x_1, r_1)$ в области вблизи ударной волны, заполненной линиями тока, прошедшими через подобные участки ударных волн. Это подобие будет нарушаться при приближении к высокоэнтропийному слою, где распределение параметров будет зависеть от уравнения состояния и в общем случае не будет подобным. В более строгом рассмотрении для подобия течений вне высокоэнтропийного слоя должны быть одинаковыми его границы $r_{1\delta} = r_{1w} + \lambda\delta$, где $r_0\delta$ — толщина слоя. Для подобия течения в высокоэнтропийном слое, согласно работе [7], в сравниваемых течениях должны быть одинаковыми функции $s(\varphi) = \sin^2\beta$, где β — угол наклона ударной волны в точке пересечения ее рассматриваемой линией тока, и функции $f(i) = p / \rho i$ в уравнении состояния газа в этом слое.

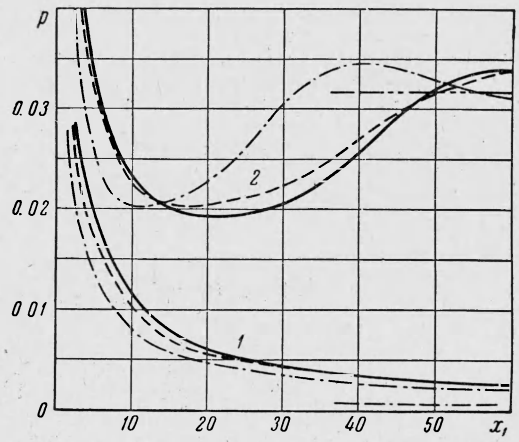
В случае незначительного изменения величин c_x^* вдоль боковой поверхности (затупленные конус, клин при равновесном или замороженном течении) из изложенного следует, что обтекание притупленного тела с реальными свойствами газа будет тождественным (за исключением течения в высокоэнтропийном слое) обтеканию совершенным газом такого же тела, но с другим носком, имеющим коэффициент сопротивления, равный c_x^*.

Для равновесного процесса при заданных условиях обтекания величины i, p / ρ и w в высокоэнтропийном слое зависят от p_w и параметра s. Кривые отношений $C^\circ = c_x^* / c_x$ для обтекания сферы совершенным газом с $M = \infty$, $\gamma = 1.4$ (кривая *1*) и равновесно-диссоциирующим воздухом при $\rho_\infty = 3 \cdot 10^{-7}$ *г / см*^{3} и $U = 5$, 7.5, 10 *км / сек* (кривые *2*, *3*, *4*) приведены на фиг. 1. В работе [8] показано, что для широкого класса тел функции $s(\varphi)$ близки между собой (исключение составляют тела типа плоского диска или пластины при $(\gamma_0 - 1)^{1/2} \to 0$). Поэтому данными фиг. 1 можно пользоваться для носков другой формы.

На фиг. 2 нанесены кривые $p_w(x)$ для случая обтекания затупленных по сфере цилиндр $\theta_0 = 0$ (кривые 1) и конуса с углом полураствора $\theta = 10°$ (кривые 2) совершенным газом с $\gamma = 1.4$ (сплошные линии), равновесно-диссоциирующим воздухом при $\rho_\infty = 3 \cdot 10^{-7}$ $г/см^{-3}$, $U = 10^4$ $м/сек$ (пунктир) при $M = 30$. Там же для сравнения штрих-пунктиром нанесены исходные кривые для воздуха в тех же координатах, что и для совершенного газа; двойным пунктиром с точкой показаны асимптотические значения величин при $x_1 \to \infty$. Как видно, в координатах подобия кривые близки между собой.



Фиг. 1



Фиг. 2

При использовании закона подобия для пересчета известного распределения давления на другие условия обтекания величины c_x^*, приведенные, например, на фиг. 1, зависят от искомого распределения давления $p_w(x)$, и наоборот, и заранее неизвестны. Однако вследствие слабой зависимости c_x^* от p_w последнее не обязательно для этих целей знать точно. Например, для притупленного конуса величины c_x^* достаточно точно можно определить по давлению на остром конусе. В крайнем случае, величины c_x^* и p_w могут быть найдены при помощи итераций.

Закон подобия распространяется на случай взрыва, если при этом газ отличается от совершенного лишь для конечной массы m_0 в центре взрывной зоны. Параметры при таком взрыве с энергией E_0 совпадают с параметрами при взрыве в совершенном газе с тем же γ, но с энергией

$$E = E_0 - \int_0^{m_0} \left(e' - \frac{p'}{\rho'(\gamma - 1)} \right) dm$$

где e', p', ρ' — размерные внутренняя энергия, давление и плотность. Определение величин e и ρ' представляет собой предмет специального исследования. Автор благодарит Павлова В. Г. за выполнение связанных с работой расчетов.

Поступила 20 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В. О движении в атмосфере затупленного тела с большими сверхзвуковыми скоростями. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1959, № 4.
2. Сычев В. В. К теории гиперзвуковых течений газа со скачками уплотнения степенной формы. ПММ, 1960, вып. 3.
3. Cheng H. K., Chang A. L. On Numerical Comparison between Invisced Flow Past Slender Blunt Nosed Bodies. ARSJ, 1961, No. 7.
4. Inger G. R. Similitude of Hypersonic Flows over Slender Bodies in Nonequilibrium Dissosiated Gases. AIAA, 1963, No. 1.
5. Черный Г. Г. Об аналогии с взрывом гиперзвукового обтекания тонкого притупленного впереди тела. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 2.
6. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, М., 1959.
7. Лунев В. В. Закон подобия для гиперзвуковых обтеканий тонких притупленных тел вязким газом. ПММ, 1961, вып. 6.
8. Лунев В. В. О форме ударной волны при гиперзвуковом обтекании тупых тел. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1964, № 6.