

СКОРОСТЬ ЗВУКА В ДВУХФАЗНЫХ ПАРОЖИДКОСТНЫХ СИСТЕМАХ

И. С. Радовский

(Москва)

К процессу распространения акустической волны в двухфазной среде применены основные положения термодинамики необратимых процессов. В результате получены выражения, определяющие зависимость скорости звука в парожидкостной среде от степени сухости и степени неравновесности различных релаксационных процессов, сопровождающих распространение акустических волн. В предельном равновесном случае эти выражения сводятся к известным формулам, полученным в равновесной термодинамике.

Вопрос о скорости распространения слабых возмущений в равновесной двухфазной среде был в свое время решен методами равновесной термодинамики (например, [1-3]). Имеющийся экспериментальный материал [4-7] пока слишком скуден и противоречив для общих выводов, однако несомненны большие расхождения между результатами измерений скорости звука и расчетов по формулам равновесной термодинамики. Причиной таких расхождений может быть неравновесный характер распространения волн при измерениях скорости звука. Расхождения между экспериментальными данными различных авторов связано, по-видимому, с различной степенью неравновесности в соответствующих экспериментах.

Попытки в [5-8] получить новые теоретические зависимости нельзя признать удовлетворительными, так как они фактически основаны на тех или иных заранее заданных искусственных условиях распространения звуковой волны, которые в реальной двухфазной среде в большинстве случаев не выполняются. Так, в [5, 8] рассматривается среда, в которой при распространении звуковой волны совершенно не успевают происходить фазовые переходы и теплообмен между фазами, в то время как процесс обмена импульсом между фазами происходит равновесно. В [6, 7] при тех же условиях относительно фазовых переходов и теплообмена рассматривается влияние на скорость звука неравновесности процесса обмена импульсом между фазами.

В реальной парожидкостной среде названные процессы при распространении звуковой волны протекают в большинстве случаев одновременно. Следовательно, для правильного решения вопроса о скорости звука в двухфазных средах необходим полный анализ сложного совместного влияния на скорость звука всех процессов, сопровождающих его распространение. Ниже такой анализ дан на основе методов термодинамики необратимых процессов.

Скорость звука можно рассматривать как физическую характеристику двухфазной среды в целом лишь при выполнении условий $d \ll \lambda$, $D \ll \lambda$, где λ — длина волны, d — диаметр частиц диспергированной фазы, D — расстояние между частицами. Но при этом по отношению к звуковой волне двухфазная среда ведет себя как непрерывная, т. е. для нее справедливо уравнение Лапласа, полученное из самых общих уравнений для непрерывной среды [9]

$$a^2 = -v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s^* \quad (1)$$

Здесь производная $(\partial p / \partial v)_s^*$ характеризует связь между давлением и удельным объемом двухфазной системы в неравновесном адиабатном процессе.

Следует оговориться, что отождествление адиабатного процесса с изэнтропийным правомерно при малых отклонениях от состояния равновесия [10], в том числе и при распространении слабого возмущения, каким является звуковая волна.

Неравновесная производная $(\partial p / \partial v)_s^*$ с учетом всех одновременно протекающих неравновесных процессов может быть определена лишь методами термодинамики необратимых процессов. Следовательно, наиболее полное решение вопроса о скорости звука в двухфазных средах можно получить именно с позиций термодинамики необратимых процессов.

Двухфазная среда является термодинамической системой, которая может находиться как в равновесном, так и в неравновесном состоянии. Состояние равновесия двухфазной среды характеризуется прежде всего фазовым, тепловым и механическим равновесием.

При распространении звуковой волны равновесное состояние двухфазной среды нарушается, и в ней протекают процессы, в общем случае неравновесные, которые носят релаксационный характер.

Каждый из релаксационных процессов можно рассматривать как определенную внутреннюю реакцию [10], характеризующуюся степенью полноты ξ_j и сродством R_j . При малых отклонениях от состояния равновесия выполняется феноменологический закон линейной зависимости обобщенных потоков системы от обобщенных сил. В данном случае в качестве обобщенных сил следует рассматривать величины R_j , в качестве обобщенных потоков — $d\xi_j / dt$, где t — время.

В общем случае для n зависящих друг от друга процессов феноменологический закон выражается так:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \sum_{q=1}^n \alpha_{jq} R_q \quad (2)$$

Известно, однако, [10], что путем замены переменных ξ_j , и, соответственно, R_j всегда можно диагонализировать матрицу феноменологических коэффициентов α_{jq} , т. е. привести ее к такому виду, когда $\alpha_{iq} = 0$ при $j \neq q$, $\alpha_{jq} \neq 0$ при $j = q$. Это значит, что реакции, соответствующие выбранным таким образом переменным ξ_j , независимы, и уравнение (2) для каждой реакции приводится к более простому виду

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \alpha_j R_j \quad (3)$$

Разложив R_j в ряд Тейлора вблизи равновесного значения параметра ξ_j^0 , можно получить из (3) уравнение релаксации

$$\frac{d\xi_j}{dt} = - \frac{\xi_j - \xi_j^0}{\tau_j} \quad (4)$$

где τ_j — время релаксации j -го процесса.

Следовательно, каждый независимый процесс характеризуется определенным временем релаксации. Для зависимых же процессов понятие времени релаксации, очевидно, лишено смысла, так как (2) в этом случае не преобразуется к виду (4). Система, в которой одновременно протекает несколько процессов (зависимых или независимых), характеризуется спектром времен релаксации τ_j , определяемых из уравнений (4) после приведения параметров ξ_j к независимому виду [10].

Будем рассматривать двухфазную среду как систему, в которой при возмущении протекают n независимых релаксационных процессов. Состояние такой системы, в отличие от равновесной, не определяется двумя независимыми термодинамическими параметрами. К ним необходимо добавить еще n независимых переменных ξ_j . Выбрав в качестве независимых термодинамических параметров s , v , можно записать

$$p = p(s, v, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n) \quad (5)$$

Приращение давления при малом возмущении

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{v, \xi} \Delta s + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s, \xi} \Delta v + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\right)_{s, v} \Delta \xi_j \quad (6)$$

Здесь индекс ξ при производной означает, что остаются постоянными степени полноты всех реакций.

Учитывая, что для адиабатного процесса, как отмечено выше, $\Delta s = 0$, получим из (6)

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta v}\right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s, \xi} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\right)_{s, v} \frac{\Delta \xi_j}{\Delta v} \quad (7)$$

Звуковая волна определяет гармонический характер изменения параметров ξ_j ; поэтому имеем

$$\Delta \xi_j = b_j e^{i\omega t}, \quad \frac{d\xi_j}{dt} = i\omega \Delta \xi_j \quad (8)$$

Сравнивая (8) и (4), получим

$$\Delta \xi_j = \frac{\Delta \xi_j^0}{1 + i\omega \tau_j} \quad (9)$$

Подставим (9) в (7) и учтем, что $(\partial \xi_j^0 / \partial v)_s \equiv (\partial \xi_j / \partial v)_{s, R_j}$. Тогда

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s^* = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s, \xi} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{i\omega \tau_j + 1} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\right)_{s, v} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial v}\right)_{s, R_j} \quad (10)$$

Воспользуемся соотношением для преобразования производных

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s, \xi(j-1), R(j)} = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s, \xi(j), R(j+1)} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\right)_{s, v} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial v}\right)_{s, R_j} \quad (11)$$

Здесь индексы $\xi_{(j-1)}$ и $R_{(j)}$ при производной означают, что постоянными считаются степени полноты всех реакций до $j-1$ включительно и средства остальных реакций, начиная с j . Из (10) и (11)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s^* = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s, (n)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{i\omega \tau_j + 1} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s, (j-1)} - \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s, (j)} \right] \quad (12)$$

В полученном выражении для простоты опущены индексы ξ и R , а индексы в скобках при производных означают число реакций, степени полноты которых считаются постоянными. При этом подразумевается, что для остальных реакций постоянными являются средства.

Выражение (12) дает комплексное значение производной $(\partial p / \partial v)_s^*$. Следовательно, решение волнового уравнения для двухфазной среды содержит комплексное волновое число. Мнимая часть волнового числа, как известно [9], характеризует поглощение звуковой волны, а вещественная часть связана со скоростью ее распространения.

Подставив (12) в (1), получим выражение для комплексной скорости звука

$$a^2 = a_{(n)}^2 + \sum_{j=1}^n \frac{a_{(j-1)}^2 - a_{(j)}^2}{i\omega \tau_j + 1} \quad (13)$$

При малом поглощении на длине волны вещественная часть в (13) представляет собой фазовую скорость волны

$$a^2 = a_{(n)}^2 + \sum_{j=1}^n \frac{a_{(j-1)}^2 - a_{(j)}^2}{4 + \omega^2 \tau_j^2} \quad (14)$$

Выясним смысл величин $a_{(n)}$, $a_{(j)}$ и $a_{(j-1)}$. В уравнении (6) производные относятся, очевидно, к невозмущенному состоянию, когда $\xi = 0$, $R = 0$. Следовательно, условие $\xi_j = \text{const}$ равносильно $\dot{\xi}_j = 0$, т. е. соответствующая реакция вообще не происходит — она заторможена. Аналогично, $R_j = \text{const}$ равносильно $R_j = 0$, т. е. соответствующая реакция протекает равновесно. Итак, $a_{(n)}$ — скорость звука в двухфазной среде, где заторможены все релаксационные процессы, $a_{(j)}$ — скорость звука при заторможенных процессах до j включительно и равновесном протекании остальных процессов. Аналогичный смысл имеет величина $a_{(j-1)}$, но заторможенными считаются $(j-1)$ процессов.

Соотношение (14) в принципе учитывает все релаксационные процессы, протекающие одновременно в двухфазной среде. Из (14) видно, что скорость звука в двухфазной среде существенно зависит от величин $\omega \tau_j$. В частности, если для всех релаксационных процессов $\omega \tau_j \gg 1$ (очень высокая частота), (14) дает $a = a_{(n)}$ — верхняя граница дисперсии. Если же для всех процессов $\omega \tau_j \ll 1$ (что возможно при достаточно низких частотах), получаем $a = a_0$, где a_0 — скорость звука при равновесном характере всех процессов (нижняя граница дисперсии). Но именно при таких условиях получена формула для скорости звука в двухфазных средах методами равновесной термодинамики.

Таким образом, на нижней границе дисперсии (14) превращается в обычную равновесную термодинамическую формулу. Необходимо заметить, что в [6, 7] такой предельный переход не получается, в связи с чем авторы делают необоснованный вывод о неприменимости равновесных формул, полученных в [1, 2], даже на нижней границе дисперсии. В действительности же в двухфазной системе, как и в любой другой среде, принципиально возможно равновесное распространение звуковых волн, и тогда, разумеется, справедливы равновесные формулы. Известно, что и в случае однофазных сред формулы равновесной термодинамики, связывающие скорость звука с различными термодинамическими параметрами, тоже справедливы лишь на нижней границе дисперсии. Однако в однофазных средах дисперсия является следствием релаксационных процессов, протекающих на молекулярном уровне и характеризующихся сравнительно малыми величинами времен релаксации. Поэтому практически нижняя граница дисперсии осуществляется в довольно широком диапазоне частот, что позволяет при экспериментальных исследованиях сравнительно легко получать так называемые «термодинамические» значения скорости звука (правильнее было бы применить термин «равновесные»).

В двухфазных средах существенное влияние на дисперсию оказывают макроскопические релаксационные процессы, характеризующиеся обычно гораздо большими величинами времен релаксации. Поэтому для двухфазных сред нижняя граница дисперсии в большинстве случаев осуществляется в сравнительно узком диапазоне малых частот. Следовательно, и для двухфазных сред понятие термодинамической скорости звука имеет вполне реальный смысл, если выполнены условия $\omega \tau_j \ll 1$. Практически выполнение этих условий можно обеспечить путем уменьшения размеров частиц диспергированной фазы, так как при этом, очевидно, уменьшаются τ_j . Несводимость к равновесным формулам в [6, 7] объясняется тем, что авторы заранее задают неравновесные условия, считая заторможенными процессы фазовых переходов и теплообмена и рассматривая дисперсию скорости звука в зависимости лишь от одной величины $\omega \tau_g$, где τ_g — время релаксации обмена импульсом между фазами.

Из (14) видно, что такая постановка вопроса была бы правомерной лишь в том случае, если бы τ_g отличалось от времен релаксации всех остальных процессов на несколько порядков.

Величины $a_{(j)}$ в уравнении (14) являются функциями степени сухости и давления. Соответствующие выражения могут быть получены из рассмотрения свойств условной двухфазной среды, в которой заторможены определенные независимые релаксационные процессы.

Процессы фазового обмена и теплообмена в парожидкостной среде неразрывно связаны между собой, поэтому необходимо вместо них рассматривать два других, эквивалентных им, но независимых процесса.

Известно, что парообразование и конденсация в объеме парожидкостной среды происходит лишь на поверхности частиц диспергированной фазы. Следовательно, температура поверхности всегда равна температуре насыщения T_s , а скорость фазового обмена зависит от соотношения скоростей теплообмена (т. е. выравнивания температуры) внутри частицы и в окружающей ее основной фазе.

Очевидно, что при постоянной температуре поверхности частицы процессы выравнивания температуры в частице и основной фазе протекают независимо друг от друга. В то же время этими двумя процессами практически полностью определяется и фазовый переход, и теплообмен между фазами. При распространении волн малой амплитуды названные процессы протекают независимо от процесса выравнивания скоростей смещения фаз.

Получим выражения для $a_{(1)}$, $a_{(2)}$, $a_{(3)}$ в соответствии с независимыми релаксационными процессами:

- 1) выравнивание температуры до T_s в основной фазе;
- 2) выравнивание температуры до T_s в частице;
- 3) выравнивание скоростей смещения фаз.

Рассмотрим систему «пар — капли». Из уравнений аддитивности удельного объема и энтропии

$$v = (1 - x) v' + x v'', \quad s = (1 - x) s' + x s'' \quad (15)$$

где x — степень сухости, v' , s' и v'' , s'' — удельные объемы и энтропия жидкой фазы и пара, получим

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p''}\right)_s^* = (1 - x) \left(\frac{\partial v'}{\partial p'}\right)_s^* \frac{dp'}{dp''} + x \left(\frac{\partial v''}{\partial p''}\right)_s^* + (v'' - v') \left(\frac{\partial x}{\partial p''}\right)_s^* \quad (16)$$

$$ds = (1 - x) ds' + x ds'' + (s'' - s') dx \quad (17)$$

В общем случае вследствие влияния поверхностных сил давления фаз не одинаковы. В уравнении (16) в качестве определяющего принято давление основной фазы, т. е. p'' . Производные, обозначенные звездочкой, характеризуют неравновесные процессы.

Воспользовавшись соотношениями между производными, справедливыми для каждой из фаз

$$\left(\frac{\partial v'}{\partial p'}\right)_s^* = \left[\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s\right]' + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p' \left(\frac{\partial s'}{\partial p'}\right)_s^*, \quad \left(\frac{\partial v''}{\partial p''}\right)_s^* = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s'' + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p'' \left(\frac{\partial s''}{\partial p''}\right)_s^* \quad (18)$$

где равновесные производные $(\partial v / \partial p)_s$ и $(\partial v / \partial s)_p$ берутся со стороны однофазной области, а также уравнением Максвелла

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \quad (19)$$

преобразуем (16) к следующему виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial p''}\right)_s^* = & (1 - x) \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s' \frac{dp'}{dp''} + x \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s'' + (1 - x) \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s' \left[\left(\frac{\partial s'}{\partial p'}\right)_s^* + \right. \\ & \left. + x \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s'' \left(\frac{\partial s''}{\partial p''}\right)_s^* + (v'' - v') \left(\frac{\partial x}{\partial p''}\right)_s^* \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Кроме того, из (17) следует:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p''}\right)_s^* = -\frac{T}{r} \left[(1 - x) \left(\frac{\partial s'}{\partial p'}\right)_s^* + x \left(\frac{\partial s''}{\partial p''}\right)_s^* \right] \quad (21)$$

где r — скрытая теплота парообразования.

Таким образом, задача определения неравновесной производной $(\partial v / \partial p)_s^*$ сводится к определению при заданных условиях неравновесных

производных $(\partial s' / \partial p'')_s^*$ и $(\partial s'' / \partial p'')_s^*$. Если заторможен только первый релаксационный процесс, т. е. теплообмен в окружающем каплю паре, а выравнивание температуры в объеме капли происходит равновесно, то температура всей капли всегда равна T_s при данном p'' . Элементарное приращение температуры капли при независимых переменных p, s

$$dT' = dT_s = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)' dp' + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)' ds' = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)' dp' + \frac{T}{c_p'} ds' \quad (22)$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial p''}\right)_{(1)} = \frac{c_p'}{T} \left[\frac{dT_s}{dp''} - \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)' \left(\frac{dp'}{dp''}\right)_{(1)} \right] \quad (23)$$

Производная dT_s / dp'' определяется обобщенным уравнением Клапейрона — Клаузиуса.

Воспользовавшись известными соотношениями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s &= \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p, & \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p &= - \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_v \\ c_p - c_v &= T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \end{aligned} \quad (24)$$

можно преобразовать производную $(\partial T / \partial p)_s$ к виду

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{v}{a} \left[\frac{T}{c_p} (k - 1) \right]^{1/2} \quad (25)$$

Учитывая, что в паре передача тепла по условию не происходит, т. е. $ds'' = 0$, получаем из (1), (20), (21), (23) и (25)

$$\begin{aligned} a_{(1)}^2 &= v^2 \left\{ x \frac{v'^2}{a'^2} + (1 - x) \left[k' \frac{v'^2}{a'^2} \left(\frac{dp'}{dp''}\right)_{(1)} + c_p' \frac{v'' - v'}{r} \frac{dT_s}{dp''} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{v'}{a'} \left(c_p' \frac{k' - 1}{T} \right)^{1/2} \left[\frac{dT_s}{dp''} + T \frac{v'' - v'}{r} \left(\frac{dp'}{dp''}\right)_{(1)} \right] \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (26)$$

Величина $(dp' / dp'')_{(1)}$ зависит от размеров капель и может быть определена из формулы Лапласа

$$p' = p'' + \frac{4\sigma}{d} \quad (27)$$

где σ — поверхностное натяжение. Дифференцирование (27) дает

$$\frac{dp'}{dp''} = 1 + \frac{4}{d} \frac{d\sigma}{dp''} - \frac{4\sigma}{3v'd} \left(\frac{\partial v'}{\partial p'}\right)_s \frac{dp'}{dp''} \quad (28)$$

После преобразований с использованием приведенных выше выражений получим

$$\left(\frac{dp'}{dp''}\right)_{(1)} = \left\{ 1 + \frac{4}{d} \left[\frac{d\sigma}{dT} - \frac{\sigma}{3a'} \left(c_p' \frac{k' - 1}{T} \right)^{1/2} \right] \frac{dT_s}{dp''} \right\} \left(1 - \frac{4\sigma v' k'}{3a'^2 d} \right)^{-1} \quad (29)$$

Если заторможены оба первых процесса, т. е. теплообмен в паре и капле, то, очевидно, $ds' = ds'' = dx = 0$. При этом из (20) и (1) получим

$$a_{(2)}^2 = v^2 \left[x \frac{v'^2}{a'^2} + (1 - x) \frac{v'^2}{a'^2} \left(\frac{dp'}{dp''}\right)_{(2)} \right]^{-1} \quad (30)$$

Из (28) и (18)

$$\left(\frac{dp'}{dp''}\right)_{(2)} = \left(1 + \frac{4}{d} \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT_s}{dp''} \right) \left(1 - \frac{4\sigma v' k'}{3a'^2 d} \right)^{-1} \quad (31)$$

Для определения $a_{(3)}$ рассмотрим элементарный объем влажного пара δV , содержащий одну каплю и характеризующийся такой же массовой концентрацией фаз, как и вся система в целом. В общем случае скорости смещения фаз различны, и между каплей и окружающим ее паром возникают силы трения. При малых числах Рейнольдса (а это условие в случае малых возмущений выполняется) сила трения по закону Стокса пропорциональна разности скоростей [11]. Запишем уравнения движения элементарного объема пара $\delta V''$ и капли, объем которой $\delta V'$

$$\begin{aligned}\frac{1}{v''} \frac{\partial^2 u''}{\partial t^2} \delta V'' &= -\frac{\partial p''}{\partial y} \delta V'' - \beta \left(\frac{\partial u''}{\partial t} - \frac{\partial u'}{\partial t} \right) \\ \frac{1}{v'} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} \delta V' &= -\frac{\partial p''}{\partial y} \delta V' + \beta \left(\frac{\partial u''}{\partial t} - \frac{\partial u'}{\partial t} \right)\end{aligned}\quad (32)$$

Здесь u' , u'' — смещения капли и пара, β — коэффициент пропорциональности для силы Стокса, y — направление распространения плоской волны.

Учитывая, что для гармонических колебаний

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega u \quad (33)$$

и что деформация каждой фазы по условию адиабатна, получаем из уравнений (32) поле несложных преобразований

$$-\omega^2 u'' = v \frac{\beta v v' + i\omega x v'' \delta V'}{\beta v' + i\omega x \delta V'} \left[x \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s'' + (1-x) \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s' \left(\frac{dp'}{dp''} \right)_{(2)} \right]^{-1} \frac{\partial^2 u''}{\partial y^2} \quad (34)$$

Уравнение (34) имеет вид обычного волнового уравнения для гармонической волны [9]. Следовательно, множитель при $\partial^2 u'' / \partial y^2$ представляет собой квадрат комплексной скорости звука, которая характеризовала бы двухфазную среду при заторможенных процессах выравнивания температуры и наличии релаксации обмена импульсом. При $\omega \rightarrow 0$ выражение комплексной скорости звука, как и следовало ожидать, превращается в формулу (30) для $a_{(2)}^2$. При $\omega \rightarrow \infty$ получим формулу для $a_{(3)}^2$

$$a_{(3)}^2 = v v'' \left[x \frac{v''^2}{a''^2} + (1-x) \frac{v'^2}{a'^2} \left(\frac{dp'}{dp''} \right)_{(2)} \right]^{-1} \quad (35)$$

Если пренебречь влиянием поверхностных сил и допустить, что жидкая фаза несжимаема, а пар идеален, то (35) превращается в выражение, полученное в [6] при названных допущениях и условии отсутствия выравнивания скоростей смещения в фазах.

Для системы «жидкость — пузырьки пара» можно аналогично получить выражения

$$\begin{aligned}a_{(1)}^2 &= v^2 \left\{ (1-x) \frac{v'^2}{a'^2} + x \left[k'' \frac{v''^2}{a''^2} \left(\frac{dp''}{dp'} \right)_{(1)} + c_p'' \frac{v'' - v'}{r} \frac{dT_s}{dp'} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{v''}{a''} \left(c_p'' \frac{k'' - 1}{T} \right)^{1/2} \left[\frac{dT_s}{dp'} + T \frac{v'' - v'}{r} \left(\frac{dp''}{dp'} \right)_{(1)} \right] \right] \right\}^{-1}\end{aligned}\quad (36)$$

$$a_{(2)}^2 = v^2 \left[x \frac{v''^2}{a''^2} \left(\frac{dp''}{dp'} \right)_{(2)} + (1-x) \frac{v'^2}{a'^2} \right]^{-1} \quad (37)$$

$$a_{(3)}^2 = v v' \left[x \frac{v''^2}{a''^2} \left(\frac{dp''}{dp'} \right)_{(2)} + (1-x) \frac{v'^2}{a'^2} \right]^{-1} \quad (38)$$

В случае пренебрежимого влияния поверхностных сил (30) и (37) совпадают с формулой, полученной в [5] при условии отсутствия обмена массой и теплом между фазами. Если также допустить, что жидкая фаза несжимаема, а пар идеален, то (30) и (37) превращаются в формулу, полученную при указанных предположениях в работе [8]

Из предыдущего ясно, что $a_{(2)}$ является чисто условной величиной, необходимой для расчета действительной скорости звука по формуле (14). Неудивительно поэтому, что расчетные значения скорости звука по формулам, полученным в [5] и [8], по признанию самих авторов, значительно отличаются от экспериментальных. Из формулы (14) видно, что равенство $a = a_{(2)}$ может выполняться лишь при условии $\omega\tau_1 \gg 1$, $\omega\tau_2 \gg 1$, $\omega\tau_3 \ll 1$.

Поступила 7 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Новиков И. И. Показатель адиабаты насыщенного и влажного пара. Докл. АН СССР, Новая серия, 1948, т. 59, № 8.
3. Вайсман М. Д. Термодинамика парожидкостных потоков. Л., «Энергия», 1967.
4. England W. G., Firey J. C., Trapp O. E. Additional velocity of sound measurements in wetsteam. Industr. Engin Chem. Process Design and Development, 1966, vol. 5, No 2.
5. Семенов Н. И., Костерин С. И. Результаты исследования скорости звука в движущихся газожидкостных смесях. Теплоэнергетика, 1964, № 6.
6. Дейч М. Е., Филиппов Г. А., Стекольников Е. В. Скорость звука в двухфазных средах. Теплоэнергетика, 1964, № 8.
7. Дейч М. Е., Филиппов Г. А., Стекольников Е. В., Анисимова М. П. Экспериментальное исследование скорости звука во влажном водяном паре. Теплоэнергетика, 1967, № 4.
8. Дворниченко В. В. К вопросу о скорости звука в двухфазной области. Теплоэнергетика, 1966, № 10.
9. Михайлов И. Г., Соловьев В. А., Сырников Ю. П. Основы молекулярной акустики, М., «Наука», 1964.
10. Хаазе Р. Термодинамика необратимых процессов. М., «Мир», 1967.
11. Ламб Г. Гидродинамика М.—Л. Гостехиздат, 1947.