

УДК 532.5, 532.584, 551.51

## ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ ПРАНДТЛЯ НА СЛУЧАЙ СКЛОНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ С ТЯЖЕЛОЙ ПРИМЕСЬЮ

Л. Х. Ингель

Научно-производственное объединение “Тайфун”, 249038 Обнинск, Россия  
Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, 119017 Москва, Россия  
E-mail: lev.ingel@gmail.com

Модель склоновых течений Прандтля обобщена на случай, когда на наклонной поверхности имеется однородный стационарный источник тяжелой примеси, которая существенно меняет плотность среды. Получено стационарное аналитическое решение для скорости возникающих течений, отклонений температуры и распределения примеси. Модель позволяет описывать, например, некоторые особенности динамики приземных метелей над наклонной поверхностью.

Ключевые слова: склоновые течения, модель Прандтля, тяжелая примесь, метели.

DOI: 10.15372/PMTF20180512

**Введение.** Пусть жидкая (газообразная) среда в поле силы тяжести ограничена снизу охлаждающейся наклонной поверхностью. Охлажденный вблизи поверхности и, следовательно, более плотный слой среды стекает вниз под действием силы тяжести. В случае малых амплитуд положительных отклонений плавучести (нагрева снизу) имеет место симметрия: возникают восходящие движения вдоль склона (однако вопрос об устойчивости решений при нагреве снизу более сложен). Исследованию течений над охлаждаемыми (нагреваемыми) наклонными поверхностями посвящено большое количество работ (см., например, [1–8]). Одним из приложений рассматриваемых течений являются склоновые ветры. В частности, такие ветры с большой скоростью постоянно дуют над территориями Антарктиды и Гренландии, занимаемыми ледниками.

Описывающие склоновые течения гидродинамические модели редко допускают явные аналитические решения. В настоящее время в качестве базового для атмосферных течений часто используется полученное в 40-е гг. XX в. простое решение Прандтля [1–7] для стационарного течения, возникающего вблизи однородно охлаждаемой (нагреваемой) бесконечной наклонной плоскости. Стационарное решение, описывающее стекание охлажденного от поверхности слоя среды ограниченной толщины, существует только при устойчивой фоновой стратификации температуры (плотности). Данное решение качественно достаточно точно описывает ряд особенностей наблюдаемых течений. В литературе также часто констатируется, что количественно решение удовлетворительно согласуется с натурными данными, однако это утверждение справедливо лишь отчасти, поскольку в геофизических приложениях решение зависит от такого плохо определенного параметра, как эффективный коэффициент турбулентного обмена.

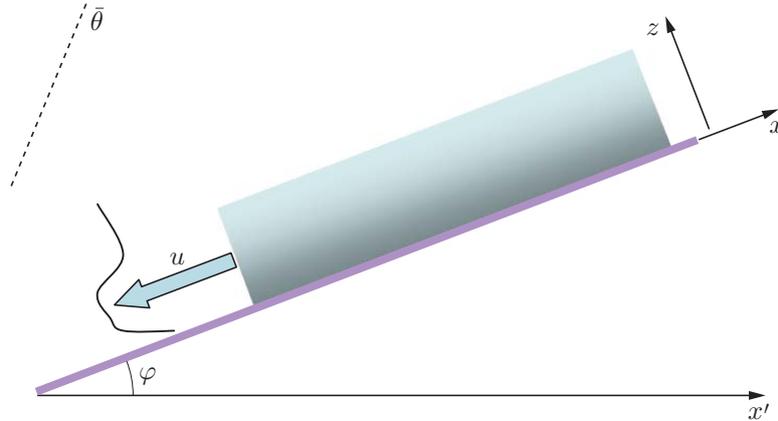


Рис. 1. Схема задачи

Если в среду снизу (с наклонной поверхности) поступает тяжелая примесь, это приводит к увеличению эффективной плотности приповерхностного слоя среды, что в некотором смысле аналогично охлаждению снизу; следовательно, должно возникать склоновое течение. Однако имеется существенное различие: частицы примеси оседают, что ограничивает толщину слоя повышенной плотности. Задачи о взвесенесущих склоновых течениях актуальны для ряда приложений (см., например, [2, 9–13]).

В настоящей работе рассмотрен аналог модели Прандтля для склоновых течений, обусловленных наличием в среде тяжелой примеси, в частности динамика приземных метелей (см., например, [12, 13]).

**1. Постановка задачи.** Схема задачи представлена на рис. 1. Штриховкой показан слой, содержащий тяжелую примесь, штриховой линией — вертикальный профиль фоновой температуры (в случае если процесс происходит в атмосфере, в качестве соответствующей переменной удобно использовать потенциальную температуру [14], увеличение которой с увеличением высоты соответствует устойчивой фоновой стратификации). Стационарные одномерные уравнения, описывающие склоновое течение над бесконечной наклонной поверхностью в устойчиво стратифицированной среде, можно представить в виде

$$0 = \nu \frac{d^2 u}{dz^2} + g \left( \alpha \theta - \frac{\mu}{\rho} \right) \sin \varphi, \quad \gamma u \sin \varphi = \varkappa \frac{d^2 \theta}{dz^2}; \quad (1)$$

$$-W \frac{d\mu}{dz} \cos \varphi = \chi \frac{d^2 \mu}{dz^2}, \quad (2)$$

где  $\varphi$  — угол наклона нижней границы к горизонту; ось  $z$  перпендикулярна наклонной поверхности;  $u$  — составляющая скорости вдоль склона (вдоль оси  $x$  (см. рис. 1));  $\theta$  — отклонение от фоновой температуры (для воздуха — потенциальной температуры [14]);  $\gamma > 0$  — вертикальный градиент фоновой температуры;  $\mu$  — парциальная плотность тяжелой примеси;  $\rho$  — средняя плотность среды;  $W$  — абсолютная скорость гравитационного оседания частиц (различием их размеров пренебрегается);  $\nu$ ,  $\varkappa$ ,  $\chi$  — коэффициенты обмена, полагающиеся постоянными);  $\alpha$  — температурный коэффициент расширения среды;  $g$  — ускорение свободного падения.

Уравнения (1), (2) являются обобщением системы уравнений модели Прандтля. Уравнение (2) представляет собой уравнение переноса тяжелой примеси [12, 15]; концентрация примеси входит в первое уравнение (1), поскольку вносит отрицательный вклад в плавучесть среды.

Следует отметить, что система уравнений гидродинамики и переноса тепла и примеси сводится к линейной системе (1), (2) только вследствие симметрии задачи, без каких-либо предположений о малости амплитуд возмущений скорости. Однако, как и в модели Прандтля, отклонения плотности среды полагаются малыми по сравнению с плотностью  $\rho$ .

На границе  $z = 0$  задаются поток примеси  $M$ , отсутствие отклонения температуры и условие прилипания:

$$z = 0: \quad \theta = 0, \quad u = 0, \quad \chi \frac{d\mu}{dz} = -M.$$

Предполагается, что вдали от поверхности  $z = 0$  возмущения затухают.

**2. Решение задачи.** Решение уравнения (2) с учетом краевых условий имеет вид

$$\mu = \frac{M}{W \cos \varphi} e^{-z/h_d}, \quad h_d = \frac{\chi}{W \cos \varphi}. \quad (3)$$

Исключая в (1) одну из неизвестных, с учетом (3) получаем уравнение

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + \frac{4}{h^4} u = \frac{gMW \sin(2\varphi)}{2\rho\nu\chi^2} e^{-z/h_d},$$

где

$$h = \left( \frac{4\kappa\nu}{\alpha g \gamma \sin^2 \varphi} \right)^{1/4} = \left( \frac{2\sqrt{\kappa\nu}}{N \sin \varphi} \right)^{1/2},$$

$N = (\alpha g \gamma)^{1/2}$  — частота плавучести. С учетом краевых условий решение принимает вид

$$u = U \left[ e^{-z/h_d} - \cos(z/h) e^{-z/h} - I \sin(z/h) e^{-z/h} \right],$$

$$\theta = \frac{IM}{\rho\alpha W (1 + I^2) \cos \varphi} \left\{ \sin(z/h) e^{-z/h} + I \left[ e^{-z/h_d} - \cos(z/h) e^{-z/h} \right] \right\}.$$

Здесь  $I$  — безразмерный параметр:

$$I = 2 \left( \frac{h_d}{h} \right)^2 = \frac{N\chi^2 \operatorname{tg} \varphi}{(\kappa\nu)^{1/2} W^2 \cos \varphi},$$

$U$  — масштаб скорости:

$$U = \frac{gM\chi^2 \operatorname{tg} \varphi}{\rho\nu W^3 (1 + I^2) \cos^2 \varphi}. \quad (4)$$

**3. Анализ решения.** Решение зависит от ряда параметров, прежде всего от угла наклона  $\varphi$ , скорости оседания частиц, коэффициентов обмена и интенсивности притока примеси на нижней границе. При наличии тяжелой примеси, приводящем к отклонениям плотности, сила, направленная вниз вдоль склона, действует в приповерхностном слое толщиной порядка  $h_d$ . Однако вследствие вязкости эта сила может вовлекать в движение и более толстые слои среды. Безразмерный определяющий параметр  $I$  зависит от соотношения масштабов  $h_d$  и  $h$ . Пусть, например, в приземном слое воздуха в условиях приземной метели [12, 13]  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициенты турбулентного обмена равны  $\nu = \kappa = \chi = 1$  м<sup>2</sup>/с,  $W = 0,3$  м/с,  $\varphi = 0,1$ ,  $N = 10^{-2}$  с<sup>-1</sup>. Тогда  $h_d \approx 3$  м,  $h \approx 30$  м,  $I \approx 2 \cdot 10^{-2}$ . Представляет интерес случай малых значений параметра  $I$ , когда решение упрощается:

$$u \approx U \left[ e^{-z/h_d} - \cos(z/h) e^{-z/h} \right], \quad \theta \approx \frac{IM}{\rho\alpha W \cos \varphi} \sin(z/h) e^{-z/h}. \quad (5)$$

Выражение для амплитуды скорости  $U$  также нетрудно получить исходя из физических соображений. В приповерхностном слое среды толщиной порядка  $h_d$  существует при-

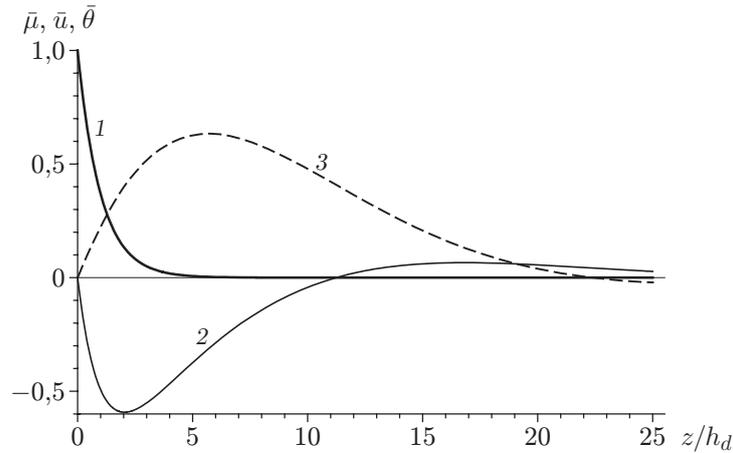


Рис. 2. Профили  $\bar{\mu}(z) = \mu/[M/(W \cos \varphi)]$  (1),  $\bar{u}(z) = u/U$  (2),  $\bar{\theta}(z) = \theta/[IM/(2\rho\alpha W(1 + I^2) \cos \varphi)]$  (3)

близительный баланс между движущей силой  $g(\mu/\rho) \sin \varphi$  и вязким трением  $\nu d^2 u/dz^2 \sim \nu U/h_d^2$ . Приравнивая данные выражения при характерном значении  $\mu$  вблизи поверхности  $\mu|_{z=0} = M/(W \cos \varphi)$ , для  $U$  получаем выражение, совпадающее с (4) при малых значениях параметра  $I$ . Аналогично, записывая в конечных разностях второе уравнение (1) и учитывая, что характерная толщина слоя, в котором имеет место отклонение температуры, составляет порядка  $h$ , для амплитуды  $\theta$  получаем выражение, близкое к выражению для амплитуды в правой части второй формулы (5). На рис. 2 приведены нормированные профили  $\mu$ ,  $u$ ,  $\theta$  при  $I = 2 \cdot 10^{-2}$ . При  $M = 3 \cdot 10^{-2}$  кг/(м<sup>2</sup>·с) и указанных выше значениях других параметров амплитуда  $U \approx 1$  м/с,  $\mu \sim 0,1$  кг/м<sup>3</sup>, амплитуда отклонений температуры составляет порядка  $0,1^\circ$ . Наиболее существенно амплитуда возникающих течений зависит от скорости оседания частиц  $W$ . При прочих фиксированных параметрах (в том числе величине потока  $M$ ) более “эффективно” поступление мелких, медленно оседающих частиц. Величина сдвига скорости в приповерхностном слое определяется выражением

$$\frac{du}{dz} \sim \frac{U}{h_d} \approx \frac{gM\chi \sin \varphi}{\rho\nu W^2 \cos^2 \varphi}$$

и при выбранных значениях параметров составляет порядка  $0,3$  с<sup>-1</sup>. В соответствии с существующей классификацией это достаточно большой сдвиг. Число Ричардсона в этом слое равно

$$\text{Ri} \approx \frac{g(\mu/(\rho h_d))}{(U/h_d)^2} \approx \frac{g\mu h_d}{\rho U^2} \approx \frac{\rho\nu^2 W^4 \cos^4 \varphi}{gM\chi^3 \sin^2 \varphi}.$$

При выбранных значениях параметров  $\text{Ri} \approx 3$ , однако при меньших значениях  $W$  амплитуды скорости и сдвига скорости могут существенно увеличиваться, а значение числа Ричардсона — уменьшаться. Поэтому представляет интерес исследование устойчивости рассматриваемого склонового течения.

**Заключение.** Таким образом, поступление в среду тяжелой примеси, как и охлаждение приповерхностного слоя, может приводить к возникновению существенных нисходящих течений над наклонной поверхностью. С использованием простейшей аналитической модели выявлены закономерности таких течений. Вследствие симметрии задачи система уравнений является линейной, поэтому данную модель можно обобщить на случай совместного влияния отклонений температуры поверхности (или потока тепла на поверхности) и

поступающей примеси. Также представляет интерес обобщение на случай, когда амплитуда отклонений плотности сопоставима с фоновой плотностью среды. Такие ситуации возможны при интенсивных приземных метелях [13].

Поток примеси на нижней границе среды полагался заданным. В реальных природных условиях этот поток существенно зависит от скорости течения и, вообще говоря, должен находиться из решения самосогласованной задачи вместе с этой скоростью. Реализованная в настоящей работе модель соответствует предельному случаю, когда имеется достаточно сильное фоновое течение в поперечном склону направлении, которое в значительной степени определяет интенсивность источника примеси на границе. Эту интенсивность в первом приближении можно считать заданной и практически не зависящей от возникающего склонового течения. Результаты проведенного анализа можно использовать для более полного описания динамики склоновых течений с тяжелой примесью, а также в качестве базового тестового примера при дальнейшем исследовании более общей самосогласованной задачи.

Автор выражает благодарность В. И. Бычковой за консультации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Прандтль Л.** Гидроаэромеханика. М.; Ижевск: Науч.-издат. центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000.
2. **Handbook** of environmental fluid dynamics. V. 1. Overview and fundamentals / Ed. by H. J. S. Fernando. Boca Raton; L.; N. Y.: CRC Press, 2012.
3. **Гебхарт Б.** Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия. М.: Мир, 1991. Т. 1.
4. **Гутман Л. Н.** Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1969.
5. **Zammett R. J., Fowler A. C.** Katabatic winds on ice sheets: a refinement of the Prandtl model // J. Atmospher. Sci. 2007. V. 64, N 7. P. 2707–2716.
6. **Zardi D., Serafin S.** An analytic solution for daily-periodic thermally-driven slope flow // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 2015. V. 141. P. 1968–1974.
7. **Mountain** weather research and forecasting. Recent progress and current challenges. Springer atmospheric sciences / Ed. by F. K. Chow, S. F. J. De Wekker, B. Snyder. Berlin: Springer, 2013.
8. **Ингель Л. Х.** К нелинейной теории кататических ветров // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 4. С. 3–12.
9. **Жмур В. В., Сапов Д. А.** Катастрофические взвесенесущие гравитационные потоки // Мировой океан. Т. 1. Геология и тектоника океана. Катастрофические явления в океане. М.: Науч. мир, 2013. С. 499–524.
10. **Iverson R. M.** Physics of debris flows // Rev. Geophys. 1997. V. 35. P. 245–296.
11. **Самолубов Б. И.** Придонные стратифицированные течения. М.: Науч. мир, 1999.
12. **Buchkova V. I., Rubinshtein K. G.** Preliminary results of testing the snowstorm short-range forecast algorithm // Russ. Meteorol. Hydrol. 2013. V. 38, N 6. P. 387–395.
13. **Бычкова В. И.** Параметризация процессов возникновения и эволюции низовой метели: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2016.
14. **Гилл А. Е.** Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 1.
15. **Ingel L. Kh.** An analytical model of the nonlinear interaction of the fields of temperature, heavy suspended sediment concentration and vertical shear of velocity in a stably stratified medium // Dynam. Atmosphere Oceans. 2003. V. 37. P. 147–154.

*Поступила в редакцию 20/X 2017 г.,  
в окончательном варианте — 9/I 2018 г.*