

УДК 536.3

## Использование спектрального распределения яркостной температуры и относительной излучательной способности при определении истинной температуры непрозрачных материалов

С.П. Русин

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

E-mail: sprusin@mail.ru

Представлен способ определения термодинамической (истинной) температуры непрозрачных материалов по зарегистрированному спектру теплового излучения в условиях, когда излучательная способность свободно излучающего тела неизвестна. В качестве входных данных использовалась специальная функция, представляющая собой произведение относительной излучательной способности вольфрама на длину волны излучения. Проведен анализ точности полученных результатов. Показано, что при использовании относительной излучательной способности предложенный алгоритм может быть использован как в пределах применимости приближения Вина, так и формулы Планка.

**Ключевые слова:** истинная температура, спектр теплового излучения, относительная излучательная способность.

### Введение

Определение термодинамической (истинной) температуры  $T$  непрозрачного свободно излучающего тела в лучепрозрачной среде обладает рядом преимуществ по сравнению с использованием контактных методов измерения температуры [1]. Прежде всего, это регистрация теплового излучения материала без непосредственного контакта с объектом измерения, а также высокое быстродействие. Эти свойства особенно важны при определении температуры в быстропротекающих процессах, например, при воздействии высокоэнергетических потоков на вещество. Кроме того, имеется возможность регистрации полей излучения путем изменения направления визирования с использованием только одного измерительного прибора.

Как известно, в соответствии с формулой Планка и законом Кирхгофа  $I_c(\lambda_i, s) = \varepsilon(\lambda_i, T, s) I_0(\lambda_i, T)$ , здесь  $\varepsilon(\lambda_i, T, s)$  — направленная спектральная излучательная способность места визирования при длине волны  $\lambda_i$  и температуре  $T$ ;  $I_0(\lambda_i, T)$  — спектральная интенсивность абсолютно черного тела (АЧТ) при тех же значениях  $\lambda_i$  и  $T$ ;

$$I_0(\lambda_i, T) = \frac{c_1 / \pi}{\lambda_i^5 \{ \exp[c_2 / (\lambda_i T)] - 1 \}}, \quad \text{где } c_1 = 3,74177 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2, \quad c_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К} —$$

первая и вторая постоянные излучения соответственно (см. [1], Приложение).

© Русин С.П., 2018

Однако чтобы перейти от зарегистрированного набора спектральных интенсивностей  $I_c(\lambda_i, s)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) к определению температуры  $T$ , необходимо знать хотя бы одно значение  $\varepsilon(\lambda_i, T, s)$  места визирования, которое, как правило, неизвестно. В этом случае имеем систему из  $m$  нелинейных уравнений вида

$$\varepsilon(\lambda_i, T)I_0(\lambda_i, T) = I_c(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

с  $m + 1$  неизвестными ( $T$  и  $\varepsilon(\lambda_i, T)$ ) (здесь и далее вектор  $s$  направления излучения и визирования для краткости записи не указывается, но подразумевается). Задача определения температуры  $T$  по зарегистрированному набору  $I_c(\lambda_i)$  является некорректно поставленной, т.к. система (1) имеет бесконечное множество решений [2]. Для того, чтобы сузить множество допустимых решений, обычно предполагаются различные ограничения, которые накладываются на зависимость  $\varepsilon$  от  $\lambda$ . Так, например, в работе [3] полагалось, что  $\ln \varepsilon$  — линейная функция от  $\lambda$ . В дальнейшем этот подход был обобщен на  $a_1, a_2, \dots, a_n$  параметров, т.е. полагалось, что при постоянной, но неизвестной температуре  $\varepsilon(\lambda, T) \approx \varepsilon(\lambda, a_1, a_2, \dots, a_n)$  [4, 5]. Можно показать, что при  $n + 1 < m$  система (1) имеет единственное решение при использовании, например, метода наименьших квадратов (МНК). Причем, как было показано в публикациях [6, 7], при  $n > 4$  решение системы (1) может стать неустойчивым, а задача будет некорректно поставленной уже в результате потери устойчивости [2]. Как показал вычислительный эксперимент, при подборе параметрической модели  $\varepsilon(\lambda, a_1, a_2, \dots, a_n)$  для  $\varepsilon(\lambda, T)$  всегда возникает методическая неопределенность. Таким образом, очевидно, что искомая температура  $T$  зависит от способа аппроксимации  $\varepsilon(\lambda, T)$  и выбранного спектрального интервала.

В работе [8] предлагалось почленно разделить каждое уравнение системы (1) на спектральную интенсивность  $I_0(\lambda, T_f)$  АЧТ, где  $T_f$  — температура отнесения. Тогда система (1) примет вид

$$\varepsilon(\lambda_i)f_p(\lambda_i, T, T_f) = I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_f) = \varepsilon_f(\lambda_i, T, T_f), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

где

$$f_p(\lambda_i, T, T_f) = \frac{I_0(\lambda_i, T)}{I_0(\lambda_i, T_f)} = \frac{\exp(c_2/(\lambda_i, T_f)) - 1}{\exp(c_2/(\lambda_i, T)) - 1} = \exp\left\{c_2 \left[ \frac{1}{\lambda_i} \left( \frac{1}{T_f} - \frac{1}{T} \right) \right]\right\} \alpha(\lambda_i, T, T_f),$$

$$\alpha(\lambda_i, T, T_f) = \frac{1 - \exp(-c_2/(\lambda_i, T_f))}{1 - \exp(-c_2/(\lambda_i, T))}.$$

На основании (2) возможно построение графика зависимости  $\varepsilon_f$  от  $\lambda$  при заданном значении  $T_f$ . Разумеется, чем ближе  $T_f$  к  $T$ , тем ближе зависимость  $\varepsilon_f(\lambda_i, T)$  к  $\varepsilon(\lambda_i, T)$  материала объекта. Это приближение можно осуществить, задавая различные значения  $T_f$  с определенным шагом из широкого температурного интервала  $[T_a, T_b]$ , к которому принадлежит искомая температура  $T$ . В работе [8] было показано, что при помощи анализа выпуклости (вогнутости) зависимостей  $\varepsilon_f$  от  $\lambda$  при различных значениях  $T_f$  можно сузить интервал возможных температур, а также выбрать спектральный интервал, в котором используемая аппроксимация имеет наибольшую точность.

В настоящей работе для определения термодинамической температуры объекта используется исходная система, преобразованная с помощью относительной излучательной способности с последующим логарифмированием. В результате выделено «температурное» слагаемое, которое содержит искомую температуру, и «спектральное» слагаемое, которое содержит зависимость излучательной способности от длины волны при данной температуре. Задача решается в два этапа. На первом этапе она рассматривается в пределах применимости формулы Вина. Показано, что в этом случае зависимости  $\ln \varepsilon_f$  от  $\lambda$  при различных  $T_f$  эквидистантны по отношению друг к другу. На втором этапе при незначительной модернизации данный алгоритм может быть использован при применении формулы Планка.

### Основные расчетные соотношения

Рассматривается непрозрачный изотермический объект, свободно излучающий в окружающее пространство. Полагается, что среда, разделяющая объект и измерительный прибор, прозрачна для излучения. Падающее излучение извне отсутствует или пренебрежимо мало. В процессе измерения температура объекта не меняется. В качестве исходных данных используется набор из спектральных интенсивностей  $I_c(\lambda_i)$ , зарегистрированных при  $m$  длинах волн  $\lambda_i$  в процессе эксперимента.

В качестве исходной системы уравнений использовалась система (2), которая, после логарифмирования, записывалась в виде

$$p / \lambda_i + \ln \varepsilon(\lambda_i) + \ln \alpha(\lambda_i, T, T_f) = \ln \varepsilon_f(i, T, T_f), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

где  $p = c_2 (1/T_f - 1/T)$ .

На первом этапе задача решалась в пределах применимости приближения Вина, согласно которому  $\ln \alpha(\lambda_i, T, T_f) \equiv 0$  при всех длинах волн. Каждое уравнение системы (3) почленно умножалось на  $\lambda_i$ . Тогда

$$p + \lambda_i \ln \varepsilon(\lambda_i) = \lambda_i \ln \varepsilon_f(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Отметим, что при неизвестной пока истинной температуре  $T$  первое слагаемое системы (4)  $p = \text{const}$  содержит искомую температуру и не зависит от длины волны, второе слагаемое зависит от  $\lambda$  и не содержит  $T$  в явном виде. Величина  $\ln \varepsilon(\lambda_i)$  была аппроксимирована с помощью алгебраических полиномов, т. е. полагалось, что

$$\ln \varepsilon(\lambda_i) = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_i^{j-1}. \quad (5)$$

В соответствии с (5), при увеличении  $n$  имеем иерархию моделей для  $\ln \varepsilon(\lambda_i)$ , где каждая последующая модель включает предыдущую. Согласно (4) и (5) получаем систему

$$p + \lambda_i \sum_{j=1}^n a_j \lambda_i^{j-1} = \lambda_i \ln \varepsilon_f(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

которую можно записать в более компактном виде

$$\sum_{j=0}^n a_j \lambda_i^j = \lambda_i \ln \varepsilon_f(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

где  $a_0 = p$ . Если величина  $a_0$  известна, то

$$T = 1 / (1/T_f - a_0 / c_2). \quad (7)$$

Итак, одна из основных задач — нахождение значения  $a_0$ , по которому затем рассчитывается искомое значение термодинамической температуры  $T$ .

Система (6) не может быть решена точно, т.к. входные значения  $I_c(\lambda_i)$ , а значит, и  $\lambda_i \ln \varepsilon_f(\lambda_i)$  получены экспериментально с некоторой неопределенностью. Кроме того, аппроксимация  $\ln \varepsilon(\lambda_i)$  имеет приближенный характер. Как правило, для каждого уравнения этой системы разность  $d_i = \lambda_i \ln \varepsilon_f(\lambda_i) - \sum_{j=0}^n a_j \lambda_i^j \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Как и в работе [6], относительная невязка системы (6) записывалась в виде

$$\delta = \|d\| / S = \left( \sum_{i=1}^m d_i^2 \right)^{1/2} / S, \quad (8)$$

где  $S = \|\lambda \ln \varepsilon_f(\lambda)\| = \left(\sum_{i=1}^m u_i^2\right)^{1/2}$ ,  $u_i = \lambda_i \ln \varepsilon_f(\lambda_i)$ . Величина  $S$  зависит от  $\ln \varepsilon_f$ , следовательно, и от  $T_f$ . Значение  $T_f$  может быть выбрано произвольно. Как правило, выбор делается на основании информации о предполагаемом интервале температур, к которому принадлежит искомая температура.

Полагалось, что неопределенностью измерения длин волн можно пренебречь. Тогда, в соответствии с правилами дифференциального исчисления, абсолютная неопределенность  $\Delta u = \left(\lambda \ln \varepsilon_f\right)'_{\varepsilon_f} \Delta \varepsilon_f = \lambda \Delta \varepsilon_f / \varepsilon_f = \lambda \delta_{\text{exp}}$ , где  $\delta_{\text{exp}}$  — относительная неопределенность измерения величины  $\varepsilon_f$ , индекс  $i$  не указан для упрощения записи. Параметр, характеризующий эту неопределенность, имеет вид [6]

$$\delta_{\text{ex}} = \|\Delta u\|/S = \left(\sum_{i=1}^m \{\Delta u_i\}^2\right)^{1/2} / S = \left(\sum_{i=1}^m \{\lambda_i \delta_{\text{exp},i}\}^2\right)^{1/2} / S. \quad (9)$$

Если измерения величин  $\varepsilon_{f,i}$  проводились с одной и той же относительной неопределенностью  $\delta_{\text{exp},i} = \delta_{\text{exp}}$ , то, в соответствии с (9),

$$\delta_{\text{ex}} = \delta_{\text{exp}} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\right)^{1/2} / S = \delta_{\text{exp}} \|\lambda\|/S. \quad (10)$$

Можно показать, что система (6) при  $n + 1 < m$  в выбранном диапазоне длин волн и температур имеет единственное решение. Для получения решения использовался МНК. Подбор моделей для  $\ln \varepsilon$  осуществлялся в соответствии с (5), начиная с самой простой, т.е. при  $n = 1$  ( $\ln \varepsilon = \text{const}$ ). Тогда если в результате решения системы (6) по МНК выполнялось неравенство  $\delta > \delta_{\text{ex}}$ , то число  $n$  увеличивалось на единицу и указанная процедура повторялась. Увеличение  $n$  происходило до тех пор, пока величина  $\delta$  не становилась меньше  $\delta_{\text{ex}}$  [9]. При выполнении этого условия и при  $n + 1 \ll m$  полагалось, что выбранная модель для  $\ln \varepsilon$  адекватна экспериментальным данным и расчетная температура соответствует истинной температуре материала. По полученным расчетным данным оценивалась неопределенность значения искомой температуры. На этом заканчивался первый этап расчета, в котором использовалось приближение Вина. Заметим, что на этом этапе в процессе вычислений  $T_f = \text{const}$ .

На втором этапе вместо приближения Вина использовалась формула Планка. На основании (3) исходная система записывается в виде

$$p + \lambda_i \ln \varepsilon(\lambda_i) = \lambda_i \ln \varepsilon_f(\lambda_i, T_{f,r-1}) - \lambda_i \ln \alpha(\lambda_i, T_{r-1}, T_{f,r-1}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

где  $r$  — номер итерации. В принципе, эта система может быть решена методом простой численной итерации. В качестве нулевого приближения могут быть использованы численные результаты первого этапа. Итерационный процесс заканчивается, когда значения  $T_r$  и  $T_{f,r-1}$  совпадают в пределах точности вычислений и

$$\alpha(\lambda_i, T_r, T_{f,r-1}) = \frac{1 - \exp(-c_2/(\lambda_i, T_{f,r}))}{1 - \exp(-c_2/(\lambda_i, T_{r-1}))} \cong 0. \quad (12)$$

### Результаты

В качестве входных данных использовался набор интенсивностей  $I_c(\lambda_i)$  собственного излучения образца из вольфрама, нагретого в вакууме при температуре  $T_W = 2200$  К. Этот набор был получен на основании экспериментальных данных по  $\varepsilon_W(\lambda_i)$ , опубликованных в работе [10], по известной формуле  $I_c(\lambda_i) = \varepsilon_W(\lambda_i)I_0(\lambda_i, T_W)$ . Согласно [10],

эти данные охватывают спектральный диапазон от 310 до 800 нм. Полагалось, что относительная среднеквадратичная неопределенность измерения  $I_c(\lambda_i)$  соответствует среднеквадратичной неопределенности измерения  $\varepsilon_W(\lambda_i)$  [10] и равна  $\pm 0,5\%$ . Неопределенность, вносимая неточностью определения длин волн, не учитывалась. В соотношениях (8), (9) величина  $S$  играет роль единицы измерения  $\delta$  и  $\delta_{\text{ex}}$ , которая зависит от  $T_f$ . Во всех расчетах значение  $S$  вычислялось при  $T_f = 2200$  К.

На рис. 1 представлена зависимость  $\ln I_c(\lambda)$  от  $\lambda$  в диапазоне длин волн от 310 до 800 нм. В этой зависимости содержится информация об истинной температуре  $T$  материала и о спектральном распределении излучательной способности, соответствующем этой температуре.

Обработка исходных данных начиналась с определения спектральных яркостных температур  $1/T_{\text{rad}}(\lambda_i)$  и  $T_{\text{rad}}(\lambda_i)$ , которые в соответствии с формулой Планка вычислялись по соотношению

$$1/T_{\text{rad}}(\lambda_i) = \frac{\lambda_i}{c_2} \ln \left\{ \frac{c_1/\pi}{\lambda_i^5 I_c(\lambda_i)} + 1 \right\}. \quad (13)$$

Как известно,  $T_{\text{rad}}(\lambda)$  — это псевдотемпература, полученная при условии  $I_c(\lambda) = I_0[\lambda, T_{\text{rad}}(\lambda)]$ , и, следовательно, при  $\varepsilon(\lambda, T) \equiv 1$  во всем спектральном диапазоне. Отметим, что в пределах применимости приближения Вина функция  $1/T_{\text{rad}}(\lambda_i)$  содержит информацию о зависимости  $\lambda_i \varepsilon(\lambda_i)$  от  $\lambda_i$  с точностью до константы. Также необходимо учитывать, что значения  $T_{\text{rad}}(\lambda_i)$  рассчитаны по экспериментальным данным, которые имеют ту или иную неопределенность. Относительная среднеквадратичная неопределенность  $\Delta T_{\text{rad}}(\lambda_i)/T_{\text{rad}}(\lambda_i)$  для яркостных температур вычислялась по относительной среднеквадратичной неопределенности  $\Delta I_c(\lambda_i)/I_c(\lambda_i) = 0,5\%$ . Как известно [11],

$$\frac{\Delta T_{\text{rad}}}{T_{\text{rad}}} = \frac{\lambda T_{\text{rad}}}{c_2} \cdot \frac{\exp(c_2/(\lambda T_{\text{rad}})) - 1}{\exp(c_2/(\lambda T_{\text{rad}}))} \cdot \frac{\Delta I_c(\lambda)}{I_c(\lambda)}. \quad (14)$$

В пределах применимости приближения Вина  $\exp(c_2/(\lambda T_{\text{rad}})) \gg 1$ , тогда [5]

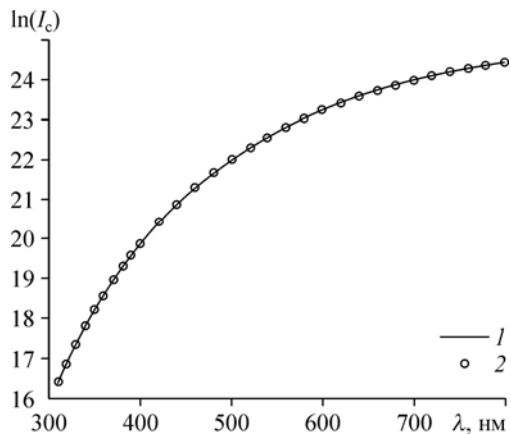
$$\frac{\Delta T_{\text{rad}}}{T_{\text{rad}}} = \frac{\lambda T_{\text{rad}}}{c_2} \cdot \frac{\Delta I_c(\lambda)}{I_c(\lambda)}. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует, что относительная неопределенность яркостной температуры в несколько раз меньше относительной неопределенности спектральной интенсивности  $I_c$ .

Данные расчета для зависимостей  $1/T_{\text{rad}}$  и  $T_{\text{rad}}$  от  $\lambda$  в виде графиков представлены на рис. 2. Из вычислений и графиков следует, что максимальное значение яркостной температуры достигается при  $\lambda = 310$  нм и равно 2124 К. С учетом

Рис. 1. Зависимость  $\ln I_c$  от  $\lambda$  образца вольфрама, нагретого в вакууме до искомой температуры.

1 — интерполяция сплайнами по данным [10],  
2 — экспериментальные данные [10].



неопределенности значений  $T_{\text{rad}}$  эта величина может быть уменьшена на 0,5–1 К. Вместе с тем, в связи с неполнотой излучения реального материала его истинная температура должна быть больше 2123–2124 К.

Отметим, что зависимость  $1/T_{\text{rad}}$  от  $\lambda$  на рис. 2а незначительно выпукла вниз. Если соединить крайние точки спектрального интервала представленного здесь графика прямой линией, то получим в том же спектральном интервале зависимость  $1/T_{\text{rad}}$  от  $\lambda$  в предположении, что  $\varepsilon = \text{const}$  (серое приближение) и, следовательно,  $\varepsilon(\lambda_1) = \varepsilon(\lambda_m)$ . Решая в приближении Вина соответствующую систему из двух уравнений, получим расчетную оценку температуры  $T_a = 2222,6$  К. Как и следовало ожидать, эта условная температура тождественна псевдотемпературе  $T_c$  спектрального отношения, рассчитанной по формуле [5] ( $\lambda_1 < \lambda_m$ )

$$T_c(\lambda_1, \lambda_m) = \frac{c_2(1/\lambda_1 - 1/\lambda_m)}{\ln[I_c(\lambda_m)/I_c(\lambda_1)] - 5 \ln(\lambda_1/\lambda_m)}. \quad (16)$$

Покажем, что при  $\varepsilon(\lambda_1)/\varepsilon(\lambda_m) > 1$  величина  $T_a = 2222,6$  К ограничивает истинную температуру  $T$  сверху. Для этого воспользуемся тем фактом, что для большинства металлов зависимость  $\varepsilon$  от  $\lambda$  монотонно убывает при увеличении  $\lambda$  в широких спектральных интервалах [12]. В этом случае  $\varepsilon(\lambda_1)/\varepsilon(\lambda_m) > 1$  и  $\ln[\varepsilon(\lambda_1)/\varepsilon(\lambda_m)] > 0$ . Тогда в соответствии с соотношением для  $T_c(\lambda_1, \lambda_m)$  [4] можно записать

$$1/T = 1/T_c(\lambda_1, \lambda_m) + \frac{\ln[\varepsilon(\lambda_1)/\varepsilon(\lambda_m)]}{c_2(1/\lambda_1 - 1/\lambda_m)}, \quad (17)$$

здесь  $1/T > 1/T_c(\lambda_1, \lambda_m)$  и  $T < T_c(\lambda_1, \lambda_m) = 2222,6$  К. Причем, чем меньше будет спектральный интервал  $[\lambda_1, \lambda_m]$ , тем меньше будет величина  $\ln[\varepsilon(\lambda_1)/\varepsilon(\lambda_m)]$  и тем меньше будет значение  $T_c(\lambda_1, \lambda_m)$  отличаться от  $T$ . Результаты расчета показывают, что при

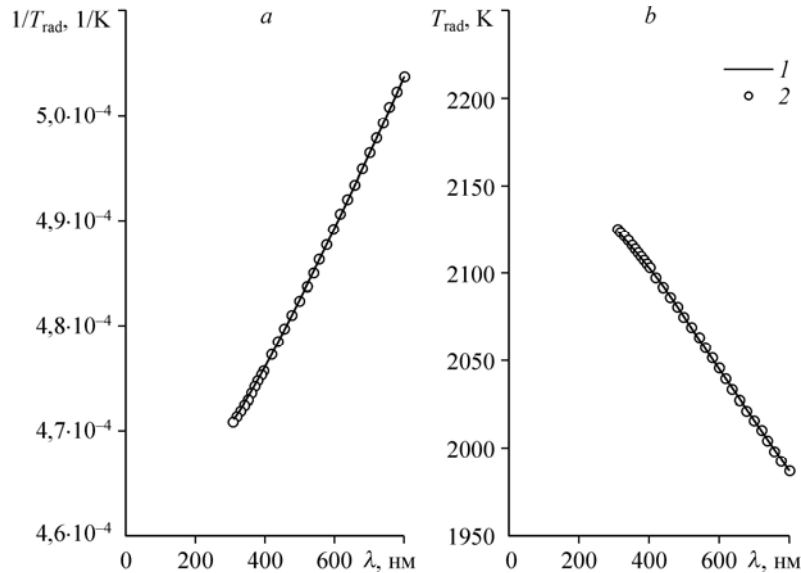


Рис. 2. Зависимость  $1/T_{\text{rad}}$  от  $\lambda$  (а) и  $T_{\text{rad}}$  от  $\lambda$  (б) вольфрама.

1 — расчет по спектральному распределению интенсивностей  $I_c$ ,  
2 — экспериментальные данные при  $T_f = 2200$  К [10].

уменьшении  $\lambda_m$  от 800 до 500 нм величина  $T_c$  уменьшается от 2222,6 до 2012,0 К. Относительная среднеквадратичная неопределенность значений  $\Delta T_c / T_c$  рассчитывалась по формуле [5]

$$\frac{\Delta T_c}{T_c} = \frac{T_c}{c_2(1/\lambda_1 - 1/\lambda_m)} \left\{ \left( \frac{\Delta I_c(\lambda_1)}{I_c(\lambda_1)} \right)^2 + \left( \frac{\Delta I_c(\lambda_m)}{I_c(\lambda_m)} \right)^2 \right\}^{1/2} = \frac{T_c \sqrt{2}}{c_2(1/\lambda_1 - 1/\lambda_m)} \delta_{I_c}, \quad (18)$$

где  $\delta_{I_c} = \Delta I_c(\lambda_1) / I_c(\lambda_1) = \Delta I_c(\lambda_m) / I_c(\lambda_m) = \text{const} = 0,005$ .

Как показали вычисления, для  $T_c = 2222,6$  К среднеквадратичная неопределенность составляет  $\pm 1,2$  К. Поэтому значение  $T_b$ , соответствующее верхнему пределу интервала, к которому принадлежит  $T$ , было увеличено до 2224 К. Разумеется, справедливость предположения, что  $\varepsilon(\lambda_1) / \varepsilon(\lambda_m) > 1$ , в дальнейшем должна быть проверена.

На рис. 3 представлены зависимости  $\ln \varepsilon_f$  и  $\varepsilon_f$  от  $\lambda$  для образца из вольфрама при изменении  $T_f$  от 2180 К (верхняя штриховая линия) до 2220 К (нижняя штриховая линия) с шагом 10 К. Символами отмечены экспериментальные данные при  $T_f = 2200$  К [10]. Из рисунка следует, что при уменьшении величины  $T_f$  от 2220 до 2180 К соотношение  $\varepsilon(\lambda_1) / \varepsilon(\lambda_m) > 1$  выполняется. Причем, при дальнейшем уменьшении  $T_f$  эта тенденция сохраняется.

Итак, на основании определения яркостной температуры и температуры спектрального отношения по исходному набору  $I_c(\lambda_i)$ , выявлен интервал [ $T_a = 2123$  К,  $T_b = 2224$  К], к которому принадлежит искомая температура  $T$ . Интервал в 100 К позволяет использовать систему (6) и МНК для более точного определения  $T$ .

На рис. 4–7 представлены зависимости излучательной способности  $\ln \varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_p$  от  $\lambda$ , рассчитанные по МНК для моделей  $\ln \varepsilon(\lambda_i) = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_i^{j-1}$  при  $n = 1, 2, 3$  и 4 соответственно. В результате вычислений для каждой модели были получены расчетные значения  $T_p$ .

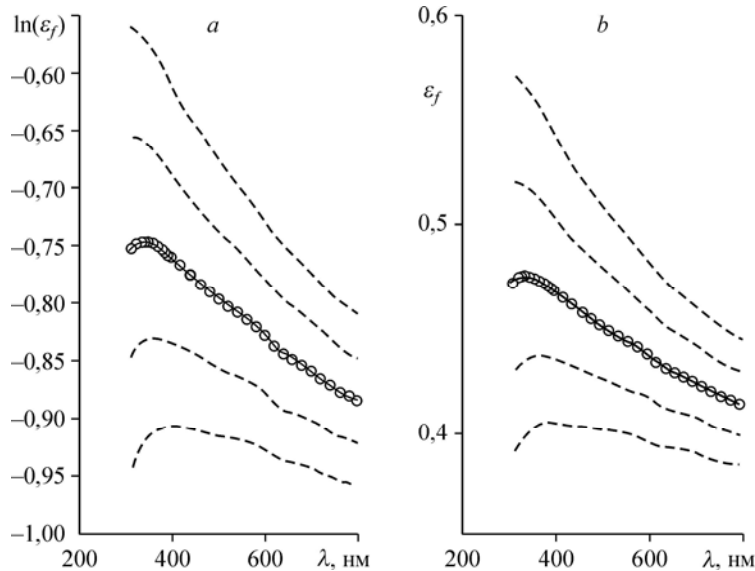


Рис. 3. Зависимости  $\ln \varepsilon_f$  и  $\varepsilon_f$  от  $\lambda$  вольфрама при изменении  $T_f$  от 2180 К (верхняя штриховая линия) до 2220 К (нижняя штриховая линия) с шагом 10 К при  $T_f = 2200$  К; символами обозначены экспериментальные данные при  $T_f = 2200$  К [10].

**Таблица**  
Значения  $T_p$ ,  $\delta_{\min}$ ,  $\gamma_\varepsilon$  при различных  $n$

$n$	$T_p$ , К	$\delta_{\min}$	$\gamma_\varepsilon$
1	2228,6	$1,32 \cdot 10^{-2}$	$-4,52 \cdot 10^{-2}$
2	2200,8	$3,94 \cdot 10^{-3}$	$-1,63 \cdot 10^{-2}$
3	2170,3	$2,06 \cdot 10^{-3}$	$-7,23 \cdot 10^{-3}$
4	2134,4	$1,80 \cdot 10^{-3}$	$-4,38 \cdot 10^{-3}$

Логично предположить, что если значения  $T_p$  в пределах точности исходных экспериментальных данных совпадают с искомым значением истинной температуры  $T$ , то значения  $\ln \varepsilon_p^* = \ln [I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_p)]$  также должны совпадать со значениями  $\ln \varepsilon_p$ , а значения  $\varepsilon_p^*$  — с соответствующими значениями  $\varepsilon_p$ , разумеется, в пределах своих интервалов неопределенности. В связи с этим для сравнения на рис. 4–7 позаны зависимости  $\ln \varepsilon_p^*$  и  $\varepsilon_p^*$  от  $\lambda$ , а также значения  $\ln \varepsilon$  и  $\varepsilon$ , полученные в работе [10] экспериментальным путем. Для количественной оценки различий  $\varepsilon_p^*$  и  $\varepsilon_p$  использовалось соотношение  $\gamma_\varepsilon = (\varepsilon_p^* - \varepsilon_p) / \varepsilon_p$ .

Зависимость  $\delta_{\min}$  от  $n$  представлена на рис. 8. Для наглядности расчетные точки соединены отрезками прямых линий.

Данные компьютерных вычислений сведены в таблицу. В первом столбце помещены значения степени  $n$  аппроксимирующих полиномов, во втором — значения  $T_p$ , в третьем — значения относительной невязки  $\delta_{\min}$ , в четвертом — значения  $\gamma_\varepsilon$  при  $\lambda = 310$  нм. Соответствующие значения были получены при  $T_f = 2200$  К,  $\delta_{\text{ex}} = 6,01 \cdot 10^{-3}$ .

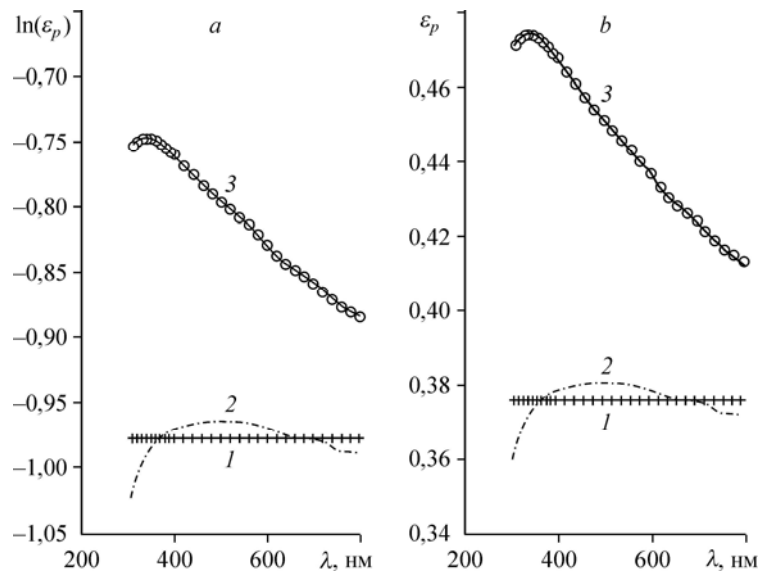


Рис. 4. Зависимость излучательной способности вольфрама от  $\lambda$  в спектральном диапазоне от 310 до 800 нм для модели  $\ln \varepsilon = \text{const}$  ( $T_p = 2228,6$  К).

$a$  —  $\ln \varepsilon_p$  (данные расчета по МНК) (1),  $\ln \varepsilon_p^* = \ln [I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_p)]$  (2), экспериментальные данные  $\ln \varepsilon$  [10] (3);

$b$  —  $\varepsilon_p = \exp(\ln \varepsilon_p)$  (1),  $\varepsilon_p^* = I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_p)$  (2), экспериментальные данные  $\varepsilon$  [10] (3).



Как следует из рис. 4 и данных таблицы, при  $n = 1$  зависимости  $\ln \varepsilon_p$  и  $\ln \varepsilon_p^*$  существенно различаются как по величине, так и по форме. Величина  $T_p = 2228,6$  К мало отличается от  $T_c = 2222,6$  К, при этом  $\delta > \delta_{\text{ex}}$ . Критерий  $\delta < \delta_{\text{ex}}$  не выполняется. Поэтому данная модель не адекватна экспериментальным данным.

На рис. 5 представлены данные расчета для полиномиальной модели при  $n = 2$ . В этом случае, по сравнению с моделью при  $n = 1$ , величина  $\delta_{\text{min}}$  уменьшается более чем в три раза, причем зависимости  $\ln \varepsilon_p$  и  $\ln \varepsilon_p^*$  различаются уже в пределах  $|\gamma_\varepsilon| = 1,63 \cdot 10^{-2}$ . Выполняется критерий  $\delta < \delta_{\text{ex}}$ . В связи с этим можно сделать вывод, что рассматриваемая модель адекватна экспериментальным данным и расчетное значение  $T_p = 2200,8$  К может быть принято за величину истинной температуры  $T$  объекта измерения.

При дальнейшем увеличении  $n$  величина  $\delta$  уменьшается, но уже не в несколько раз. Так, при  $n = 3$  величина  $\delta_{\text{min}}$ , по сравнению с соответствующим значением при  $n = 2$ , уменьшается на 47,8 %, а при  $n = 4$  она уменьшается уже на 12,6 % по сравнению с предыдущим значением при  $n = 3$ . Кроме того, при увеличении  $n$  значения  $\ln \varepsilon_p(\lambda_i)$  и  $\ln \varepsilon_p^*(\lambda_i)$  все меньше отличаются друг от друга. В результате вычислений по МНК получаем четыре значения температуры  $T_p(n)$ , каждое из которых зависит от  $n$ , причем сами значения существенно отличаются друг от друга.

Эта ситуация объясняется специфическими особенностями алгоритма. Дело в том, что при расчете минимизируется невязка суммы двух функций ( $a_0$  и  $\ln \varepsilon$ ), одна из которых ( $a_0$ ) явно зависит только от искомой температуры  $T$ , а другая ( $\ln \varepsilon$ ) — только от длины волны  $\lambda$ . При этом постоянный коэффициент  $a_0$  характеризует истинную температуру  $T$ , а постоянные коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — зависимость  $\ln \varepsilon$  от  $\lambda$ . Уменьшение невязки  $\delta_{\text{min}}$  в несколько раз при  $n = 2$  при условии  $\delta < \delta_{\text{ex}}$  показывает, что найденная модель для  $\ln \varepsilon$  адекватна экспериментальным данным. Дальнейшее увеличение  $n$  приводит к возникновению новых значений коэффициентов  $a_i$  и, как следствие, к изменению величин всех коэффициентов, в том числе коэффициента  $a_0$ , связанного с искомой температурой. При этом некоторые коэффициенты могут изменить свой знак. Так, например,

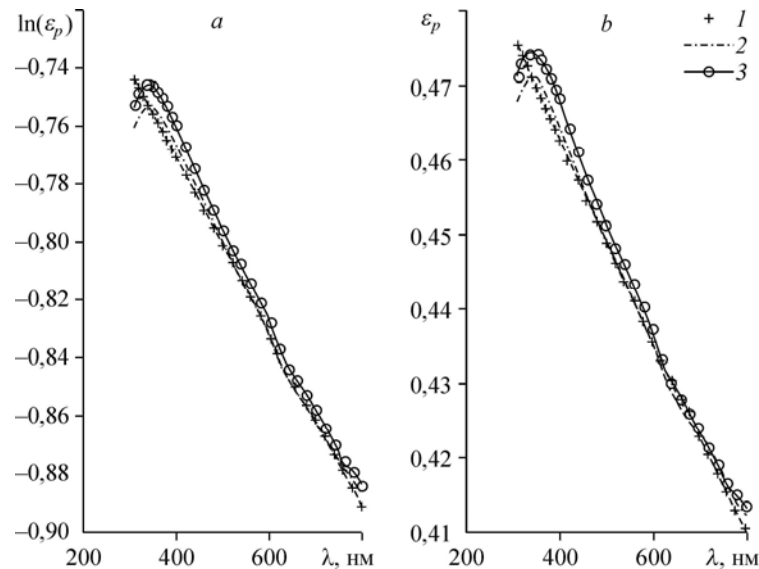


Рис. 5. Зависимость излучательной способности вольфрама от  $\lambda$  в спектральном диапазоне от 310 до 800 нм для модели  $\ln \varepsilon = a_1 + a_2 \lambda$  ( $T_p = 2200,8$  К). Обозначения см. на рис. 4.

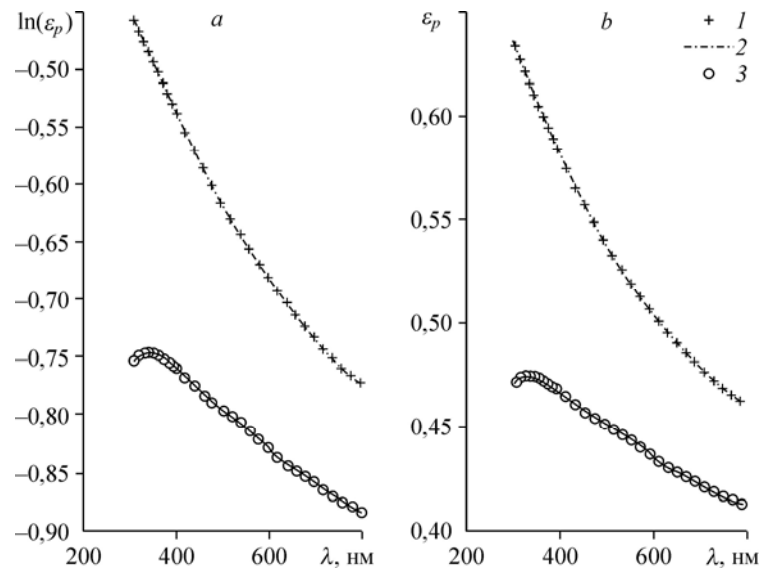


Рис. 6. Зависимость излучательной способности вольфрама от  $\lambda$  в спектральном диапазоне от 310 до 800 нм для модели  $\ln \varepsilon(\lambda_i) = \sum_{j=1}^{n=3} a_j \lambda_i^{j-1}$  ( $T_p = 2170,3$  К).  
Обозначения см. на рис. 4.

при  $n = 2$  коэффициенты  $a_1 < 0$ ,  $a_2 < 0$ . Причем, при  $a_2 < 0$  функция  $\varepsilon$  монотонно убывает при увеличении  $\lambda$ . Однако при  $n = 3$  и  $n = 4$  наряду с коэффициентами, принимающими отрицательные значения, появляются коэффициенты, принимающие положительные значения. Так, при  $n = 4$  знаки коэффициентов чередуются, причем  $a_1 > 0$ . Как следует из таблицы и рис. 7, значение температуры в этом случае более, чем на 65 К меньше действительной температуры, а значения  $\varepsilon$  на некоторых спектральных участках в разы больше,

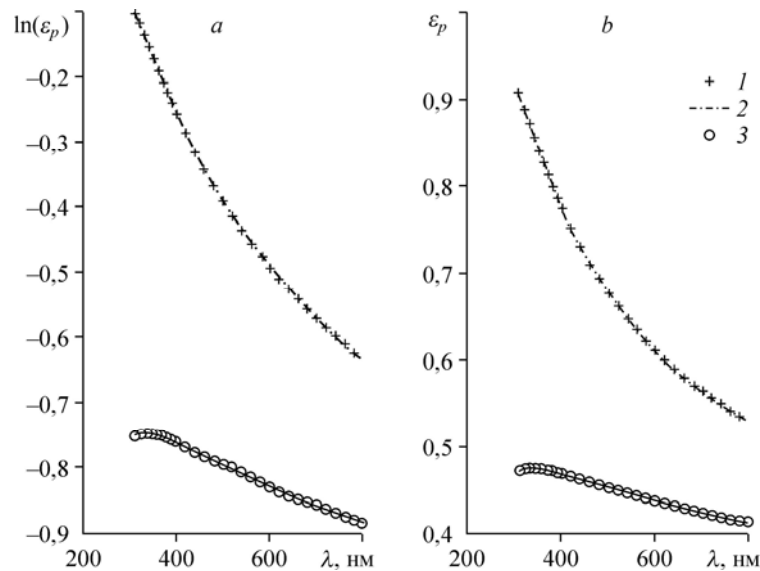


Рис. 7. Зависимость излучательной способности вольфрама от  $\lambda$  в спектральном диапазоне от 310 до 800 нм для модели  $\ln \varepsilon(\lambda_i) = \sum_{j=1}^{n=4} a_j \lambda_i^{j-1}$  ( $T_p = 2134,4$  К).  
Обозначения см. на рис. 4.

Рис. 8. Зависимость  $\delta_{\min}$  от  $n$  для моделей

$$\ln \varepsilon(\lambda_i) = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_i^{j-1} \quad (n = 1-4).$$

$$1 - \delta_{\min}, \quad 2 - \delta_{\text{ex}}.$$

чем соответствующие значения при  $T_p = 2200$  К, хотя  $\delta = 1,80 \cdot 10^{-3}$  — наименьшее значение из всех рассмотренных вариантов.

Если ввести ограничения на коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$  при  $n = 2, 3, 4$  в виде неравенств  $a_i < 0$ , то вычисления, проведенные по МНК, дадут одни и те же результаты, т.к. коэффициенты, начиная с  $i > 2$ , будут равны нулю (использовалась процедура nls системы MATLAB).

Как известно, МНК позволяет не только определить параметры полинома, но также оценить их точность. Причем чем больше  $n$ , тем менее точны такие оценки. С помощью программы TableCurve была выполнена оценка доверительного интервала для  $a_0$  при  $n = 2$  с вероятностью 95 %. По интервалу для  $a_0$  по формуле (7) был найден соответствующий доверительный интервал для искомой температуры. Было определено, что  $T$  принадлежит интервалу от 2197 до 2204 К. Были выполнены также оценки по трем точкам по алгоритму, представленному в работе [8]. Сравнение полученных данных показало совпадение результатов в пределах точности вычислений.

На первом этапе все результаты были получены в пределах применимости приближения Вина. На втором этапе использовалась формула Планка и модифицированный алгоритм первого этапа. Модификация алгоритма заключалась в том, что в отличие от первого этапа величина  $T_f$  не оставалась постоянной в процессе вычислений, а изменялась при итерационном счете по (11). Такие расчеты были выполнены для параметрической модели  $\ln \varepsilon = a_1 + a_2 \lambda$ . Было получено, что при  $T_f = 2200$  К результаты счета по обоим алгоритмам совпали в пределах точности вычислений и  $\ln a \cong 0$ . Итерации быстро сходились, т.к. в нашем случае приближение Вина мало отличается от формулы Планка.

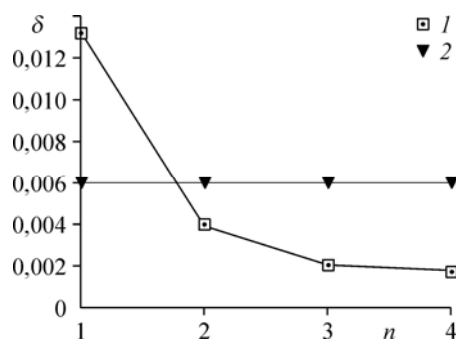
### Обсуждение и выводы

Показано, что использование относительной спектральной излучательной способности  $\varepsilon_f(\lambda)$  позволяет определять термодинамическую температуру свободно излучающего объекта по зарегистрированному спектру теплового излучения как в приближении Вина, так и в соответствии с формулой Планка. Исходные данные — это либо спектральное распределение интенсивностей собственного излучения, либо спектральное распределение яркостных температур.

В пределах применимости приближения Вина зависимости  $\lambda \varepsilon_f(\lambda)$  от  $\lambda$  при различных температурах отнесения  $T_f$  эквидистантны друг другу. Причем эти зависимости могут быть аппроксимированы полиномами с достаточной степенью точности.

Показано, что зависимость  $\varepsilon_f$  от  $\lambda$  при изменении значений  $T_f$  меняет не только величину, но также может изменить характер убывания (возрастания) функции. Поэтому важное значение имеет предварительная информация о характере возрастания (убывания) зависимости  $\varepsilon_f$  от  $\lambda$ .

На примере полиномиальной аппроксимации  $\varepsilon(\lambda)$  проиллюстрировано важное правило: аппроксимацию исходной зависимости необходимо начинать с простейших параметрических моделей. Причем при первой параметрической модели, адекватной экспериментальным данным, следует прекращать поиск более сложных моделей, даже если эти модели дают меньшие значения невязки. Этот принцип объясняется тем, что при усложнении параметрической модели для  $\varepsilon(\lambda)$  существенно изменяются значения и знаки



искомых параметров, в том числе того параметра, по которому вычисляется температура. В связи с этим важна информация о знаках некоторых параметров используемой модели.

По результатам решения задачи первоначальные допущения, сделанные при формировании параметрической модели для  $\varepsilon(\lambda)$ , должны быть проверены. Так, например, по значению искомой температуры  $T_p$  должна быть получена зависимость  $\varepsilon_p^* = I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_p)$ , которая затем сопоставляется с модельной зависимостью  $\varepsilon_p(\lambda_i)$ . По результатам решения задачи исходный данный спектральный интервал может быть сужен и принята новая параметрическая модель. В этом случае задача решается снова в полном объеме.

При уменьшении уровня измеряемых температур при неизменном спектральном интервале неточность параметрической модели  $\ln\varepsilon(\lambda)$  меньше влияет на величину искомой температуры. Этот вывод следует, например, из приближения Вина, записанного для обратной величины яркостной температуры в логарифмической форме. В общем случае чем меньше произведение  $\lambda T$ , тем точнее может быть определена искомая температура по спектру теплового излучения, конечно, при прочих равных условиях. Основная трудность заключается здесь в точном определении спектральной интенсивности излучающего объекта.

В качестве иллюстративного примера была выбрана зависимость  $\ln\varepsilon$  от  $\lambda$ , которая в данном спектральном диапазоне близка к линейной. Этим объясняется сравнительно высокая точность определения искомой температуры.

#### Список литературы

1. **Radiometric** temperature measurements. I. Fundamentals (Experimental Methods in the Physical Sci. Vol. 42 / Eds. Zhand Z.M., Tsai B.K., Mashin G.) Elsevier. 2009. 343 p.
2. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.
3. **Nutter G.D.** General considerations influencing the design of a high accuracy pyrometer // Temperature: Its Measurement and Control in Science and Industry. N.Y.: Reynolds Publishing Corporation, Chapman & Hall, 1962. Vol. 3. Part 1. P. 537–550.
4. **Свет Д.Я.** Оптические методы измерения истинных температур. М.: Наука, 1982. 295 с.
5. **Снопко В.Н.** Основы методов пирометрии по спектру теплового излучения. Минск: Ин-т физики им. Б.И. Степанова НАН Белоруси, 1999. 224 с.
6. **Леонов А.С., Русин С.П.** О решении обратной задачи определения температуры по спектру теплового излучения нагретых тел // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8, № 3. С. 475–486.
7. **Русин С.П.** Восстановление истинной температуры нагретого тела по интегроспектральным характеристикам теплового излучения // Теплофизика и аэромеханика. 2006. Т. 13, № 1. С. 129–139.
8. **Русин С.П.** Восстановление температуры непрозрачных тел по спектру теплового излучения: использование относительной излучательной способности для выбора оптимального спектрального участка // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20, № 5. С. 643–659.
9. **Калиткин Н.Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
10. **Larrabee R.D.** Spectral emissivity of tungsten // J. Opt. Soc. Am. 1959. Vol. 49, No. 6. P. 619–625.
11. **Куинн Т.** Температура. М.: Мир, 1985. 448 с.
12. **Латыев Л.Н., Петров В.А., Чеховской В.Я., Шестаков Е.Н.** Излучательные свойства твердых материалов: справочник / под ред. А. Е. Шейндлина. М.: Энергия, 1974. 472 с.

*Статья поступила в редакцию 15 мая 2017 г.*