РЕЛАКСАЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРИ ГОРЕНИИ ПОРОХА В ПОЛУЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ

Г. Н. Гусенков

(Пущино-на-Оке)

О возможности колебательных явлений при горении пороха указывалось в работах [1–4]. В [2–3] в приближении, близком к гармоническому, рассматривался вопрос об автоколебаниях при постоянном давлении и вынужденных колебаниях при переменном давлении. Однако результаты этих работ применимы лишь для таких режимов горения, когда соответствующая задача слабо нелинейна. При сильных нелинейных зависимостях, т. е. режимах, особенно характерных для процессов нестационарного горения, аналогичная задача решена не была. Ниже делается попытка в какой-то мере восполнить этот пробел для случая, когда горение пороха происходит в полузамкнутом объеме, а колебания близки к разрывным.

В безразмерной форме уравнения горения пороха в полузамкнутом объеме в предположении линейной зависимости скорости стационарного горения от начальной температуры имеют вид [5]

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\omega\theta\right),\qquad \gamma\frac{d\pi}{d\tau}=\omega-\mu\pi$$

$$\omega=\pi^{\nu}\frac{1+\beta}{2}\left[1+\left(1-\frac{4\beta}{\pi^{\nu}(1+\beta)^2}\left|\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}\right)^{1/2}\right]$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$\pi=1,\quad \omega=1,\quad \theta=e^{-\xi}\quad \text{при}\quad \tau=0$$

$$\theta(0,\tau)=1,\qquad \theta(\infty,\tau)=0,\qquad \left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=\infty}=0$$

Здесь θ, π, ω, ξ, τ — соответственно безразмерные температура, давление, скорость горения, пространственная координата и время; β — параметр, характеризующий степень нагретости пороха; γ — отношение времени истечения ко времени релаксации твердой фазы при начальном давлении; μ — отношение массовой скорости истечения газа при данном сечении сопла и начальном давлении к массе газа, выделяемого в единицу времени всей поверхностью пороха в стационарном режиме при том же давлении; ν — показатель степени в выражении для скорости стационарного горения в зависимости от начальной температуры и давления.

При решении уравнения теплопроводности воспользуемся методом интегральных соотношений [6–9]. Будем искать $\theta(\xi,\tau)$ в форме

$$\theta(\xi,\tau)=[1-f(\tau)]\,e^{-\xi}+f(\tau)\,e^{-\omega(\tau)\xi}$$

целесообразность которой, например, очевидна при достаточно медленном изменении скорости и давления. Здесь $f(\tau)$ — некоторая ограниченная функция. После обычных для метода интегральных соотношений выкладок [6] исходная задача сводится к решению системы уравнений вида

$$\gamma\frac{dy}{d\tau}=\frac{B}{A}-y,\qquad \frac{d\pi}{d\tau}=y \tag{1}$$

$$A=(\gamma y+\pi)^2-\pi^{\nu}\beta,\qquad B=(\gamma y+\pi)^3(\nu\pi^{-1}y-\gamma y+\pi^{\nu}-\pi)$$

Система (1) имеет два стационарных состояния

$$y_1^\circ=0,\quad \pi_1^\circ=0;\quad y_2^\circ=0,\quad \pi_2^\circ=1$$

Предположим, что $\gamma\ll 1$. Тогда получим два дифференциальных уравнения с малым параметром при производной. Известно [10], что в такой системе могут возникать релаксационные колебания. Поведение изображающей точки в фазовом пространстве, характерное для релаксационных процессов, можно представить следующим образом. Если изображающая точка находится вдали от кривой стационарных состояний S первого уравнения в (1)

$$B/A-y=0 \tag{2}$$

то переменная y изменяется быстро, так как

$$\frac{dy}{d\tau}=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{B}{A}-y\right)$$

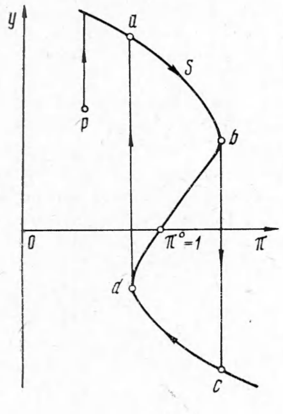
В то же время переменная π остается в первом приближении неизменной. Действительно, вводя замену $t = \tau / \gamma$, получаем вместо (1)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{B}{A} - y, \qquad \frac{d\pi}{dt} = \gamma y \tag{3}$$

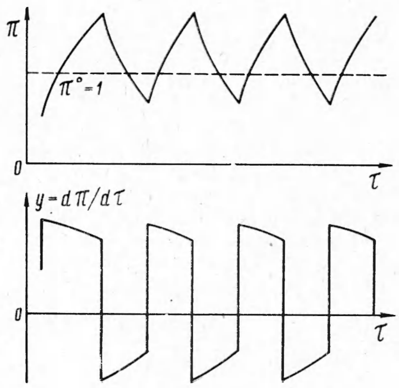
Иными словами, в то время как производная dy / dt является существенно отличной от нуля величиной (изображающая точка находится вдали от кривой S), производная $d\pi / dt \approx 0$. Такой характер изменения y и π будет иметь место до тех пор, пока функция $B / A - y$ не станет близкой к нулю, т. е. пока изображающая точка не попадет в γ-окрестность одного из устойчивых стационарных состояний уравнения быстрого движения. Как только это произойдет переменные y и π начинают меняться со сравнимыми скоростями. В результате стационарное состояние, определяемое уравнением (2), перемещается и изображающая точка системы (1) движется, сопровождая это перемещающееся в фазовом пространстве стационарное состояние. Характер движения резко изменяется при достижении точки срыва [11], в которой

$$\partial (B/A) / \partial y - 1 = 0$$

Переменная y вновь станет быстро изменяться, пока изображающая точка не приблизится к новому устойчивому стационарному состоянию уравнения (2). Один из возможных вариантов фазового изображения представлен на фиг. 1, где P — начальное положение изображающей точки, b и d — точки срыва. Соответствующие этому случаю временные зависимости для π и y показаны на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для существования в нашей системе предельного цикла (контур a, b, c, d на фиг. 1) достаточно выполнения следующих условий.

1. При переходе кривой S через стационарное состояние системы (1) y должно менять знак.
2. Стационарное состояние должно быть неустойчивым.
3. Прямая $\pi = \pi^\circ$ должна:

   а) либо пересекать кривую S помимо особой точки еще по крайней мере в двух точках, в которых y имеет разные знаки. Причем производные $\partial (B / A) / \partial\pi$ в этих точках должны быть строго меньше нуля;

   б) либо пересекать кривую S по крайней мере в одной точке (в этой точке $\partial (B / A) / \partial\pi < 0$), а стационарное состояние должно быть двукратно вырожденным.

Условие б) является предельным для случая а), когда особая точка является точкой возврата первого рода.

Стационарное состояние $\pi^\circ = 0$ соответствует отсутствию горения в камере, поэтому в дальнейшем исследования следует проводить в окрестности особой точки $\pi^\circ = 1$.

Нетрудно найти соотношения между параметрами β и ν, при выполнении которых возникают колебательные (периодические) решения. Будем считать, что при $\tau = 0$ система находится в неустойчивом стационарном состоянии $\pi^\circ = 1$. Пренебрегая членами с γ^4 и γ^3, из уравнения (2) находим

$$y^3\gamma^2 (1 - 3\nu) + y^2\gamma (2\pi + 3\nu\pi + 6\gamma\pi^2 - 3\gamma\pi^{\nu+1}) + \tag{4}$$
$$+ y (\pi^2 - \pi^\nu\beta + 4\gamma \pi^3 - 3\gamma\pi^{\nu+2} - \nu\pi^2) + \pi^4 - \pi^{\nu+3} = 0$$

Условия 1—3 будут удовлетворены, если после подстановки $\pi = 1$ в уравнение (4) оно имеет либо два действительных корня различных знаков, либо двукратный нулевой корень. В первом случае должно выполняться (с точностью до членов с γ) $\nu + \beta > 1$ и $\nu < 1/3$, во втором $- \beta + \nu = 1$ при любых ν. Максимальные и минимальные значения амплитуды колебаний могут быть определены либо из условия равенства нулю детерминанта приведенного уравнения (4), либо из условия [11]

$$\frac{\partial B / A}{\partial y} = 1, \qquad \frac{B}{A} - y = 0$$

Период колебаний T в пренебрежении временем быстрых движений определяется из соотношения [10]

$$T = \int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{d\pi}{y} + \int\limits_{-y_{\min}}^{-y_{\max}} \frac{d\pi}{y}$$

Здесь y — корень уравнения (4), а $\pm y_{\max}$ и $\pm y_{\min}$ находятся из этого же уравнения при подстановке $\pi = \pi_{\max}$ и $\pi = \pi_{\min}$.

Полученные здесь результаты необходимо рассматривать как качественные и вот почему:

1) в качестве функционального соотношения между ω, π и $\partial\theta / \partial\xi$ взято выражение, отвечающее линейной зависимости скорости стационарного горения от начальной температуры, что не всегда отвечает действительности;

2) решение исходной системы уравнений проводится в обычных предположениях относительно процесса горения, при постоянной температуре на поверхности пороха, что справедливо лишь в грубом приближении;

3) применяемый в ходе исследования метод интегральных соотношений является приближенным. Оценка его точности может быть получена только на ЭВМ.

Отметим, что допущения 1) и 2) могут быть устранены путем соответствующих усложнений в выкладках.Пункт 3) также в принципе можно обойти,так как приближенное решение можно в каждом конкретном случае сделать практически точным посредством синтеза подходящей зависимости для θ. И наконец, последнее замечание. Было бы ошибкой считать, что вследствие малости γ этот параметр играет малосущественную роль в характеристике процесса. Дело в том, что критическое значение γ_* [1], в свою очередь, может быть малым и, следовательно, несмотря на условие $\gamma \ll 1$, параметр γ будет по-прежнему определяющим фактором при установлении устойчивости и неустойчивости горения.

Поступила 22 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Об устойчивости режима горения пороха в полузамкнутом объеме. ПМТФ, 1963, № 1.
2. Новожилов Б. В. Горение пороха при гармонически меняющемся давлении. ПМТФ, 1965, № 6.
3. Новожилов Б. В. Нелинейные колебания скорости горения пороха. ПМТФ, 1966, № 5.
4. Истратов А. Г., Либрович В. Б. Об устойчивости горения пороха. ПМТФ, 1964, № 5.
5. Новожилов Б. В. Переходные процессы при горении порохов. ПМТФ, 1962, № 5.
6. Истратов А. Г., Либрович В. В., Новожилов Б. В. О приближенном методе в теории нестационарной скорости горения пороха. ПМТФ, 1964, № 3.
7. Либрович В. Б. О воспламенении порохов и взрывчатых веществ. ПМТФ, 1963, № 6.
8. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.
9. Баренблатт Г. И. О приближенном решении задач одномерной нестационарной фильтрации в пористой среде. ПММ, 1954, т. 18, вып. 3.
10. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3, М., Физматгиз, 1963.
11. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1957, т. 21, № 5.