ПМТФ, № 3, 1969

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Р. З. Сагдеев, А. М. Фридман

(Москва, Новосибирск)

Исследуется устойчивость вращающегося пылевого цилиндра относительно возмущений, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Показано, что однородный вращающийся цилиндр со слабой неоднородностью устойчив относительно таких возмущений. Слабо неоднородный цилиндр со встречными пучками одинаковой плотности неустойчив при росте плотности от центра для моды $l = 2$, возмущение выбирается в виде $\sim e^{i(l\varphi-\omega t)}$. Получена неустойчивость системы, состоящей из однородного вращающегося пылевого цилиндра в горячей однородной среде. Показано, что максимум инкремента соответствует $l = 2$, когда плотность холодного цилиндра не является пренебрежимо малой по сравнению с плотностью среды. В противном случае максимум инкремента смещается к $l = 3$. Существование максимума инкремента при $l = 2$ связывается с наличием у большинства спиральных галактик двух спиральных ветвей.

Показано, что при наличии достаточно большой продольной температуры ограниченный по радиусу вращающейся цилиндр устойчив относительно произвольных возмущений.

Гравитационная неустойчивость однородной среды была рассмотрена впервые Джинсом [1]. Впоследствии было отмечено [2-3], что рассмотрение Джинса не совсем корректно, так как в однородной гравитирующей среде нет равновесия. В этих же работах [2-3] было сделано корректное рассмотрение однородной среды с учетом нестационарности. Результаты оказались близкими к результатам Джинса — в однородной среде происходит нарастание возмущений с длиной волны, больше критической

$$\lambda > \lambda_* = 8\pi c \,/\, \sqrt{4\pi G\rho}$$

(ρ — плотность, c — скорость звука, G — гравитационная постоянная).

Невозмущенное решение зависит от времени, и возмущения возрастают не экспоненциально, а по более сложному закону приблизительно как $\exp\left(\int\omega(t)\,dt\right)$. Невозмущенная система может быть выбрана равновесной (стационарной) за счет конечного размера и градиента давления, уравновешивающего тяготение. Однако при этом в простейшем случае оказывается, что гравитирующие тела имеют в равновесии размер порядка критической длины волны, поэтому джинсовская неустойчивость в них не имеет места.

Среда, равновесие и устойчивость которой рассматриваются, может представлять собой газ с определенным уравнением состояния, с малой длиной свободного пробега, обусловленной негравитационным взаимодействием атомов, ионов и электронов между собой.

Однако если в системе между частицами имеет место только гравитационное взаимодействие, то попарное взаимодействие оказывается в равновесной системе, грубо говоря, в N раз (точнее $N / \ln N$) слабее коллективного взаимодействия. Следовательно, в первом приближении задача сводится к движению частиц в коллективном самосогласованном гравитационном поле [1]. Такое бесстолкновительное движение описывается кинетическим уравнением Больцмана — Власова [4-14]. Подобная ситуация характерна, например, для звезд в нашей Галактике и других похожих галактиках.

Соответственно, и в задачах об устойчивости следует рассматривать возмущения функции распределения, т. е. плотности в пространстве скоростей и координат.

Устойчивость зависит от начальной функции распределения.

Для начального максвелловского распределения результаты мало отличаются от гидродинамического случая [5-9,11].

---

[1] Эта оценка не применима, когда имеются прямые неупругие столкновения звезд. В дальнейшем будут рассматриваться системы, в которых неупругие столкновения настолько редки, что ими можно пренебречь.

Полученная в этих работах гравитационная неустойчивость, связанная с критической длиной волны Джинса, возникает только в отсутствие равновесного состояния.

Поскольку гравитационная и кулоновская силы взаимодействия между частицами одинаково зависят от расстояния между ними, можно ожидать появления в гравитирующей среде неустойчивостей, аналогичных кинетическим плазменным; пучковой и анизотропной.

Действительно, для немаксвелловских функций распределения эти неустойчивости появляются в равновесном состоянии: анизотропная — для анизотропного максвелловского распределения [12], пучковая [4] — при наличии «горбов» на одномерной функции распределения $f(v)$ скорости v, т. е. участков с $\partial f / \partial v > 0$, $v > 0$.

Равновесие гравитирующей среды в однородном состоянии невозможно: для существования равновесия необходима неоднородность или анизотропия.

Это может привести к подавлению пучковой неустойчивости в равновесном состоянии при наличии двух встречных потоков, которые в плазме всегда неустойчивы (см. п. 4). Таким образом, критерии пучковой неустойчивости, выведенные для плазмы, нельзя непосредственно обобщать на гравитирующую среду.

Ниже исследована устойчивость нескольких точных решений равновесного вращающегося цилиндра. Исследована устойчивость вращающегося пылевого цилиндра относительно возмущений в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Для пылевого вещества кинетическое рассмотрение полностью эквивалентно гидродинамическому. В цилиндре со встречными вращающимися потоками имеет место пучковая неустойчивость при наличии неоднородности, когда плотность возрастает от оси вращения.

Рассмотрена задача о вращении пылевого цилиндра в горячей неподвижной среде. Показано, что при этом возникает пучковая неустойчивость [1], максимум инкремента которой лежит при $l = 2$ также, как и в предыдущем случае неоднородного вращающегося цилиндра со встречными потоками. На основании этого обсуждается наблюдательный факт наличия у большинства спиральных галактик двух ветвей (см. в п. 6 о работах Линя, Марочника и др.).

Показано, что вращающийся, ограниченный по радиусу бесконечно длинный цилиндр устойчив относительно любых возмущений при наличии продольной температуры $T_{\parallel}$ больше некоторой $T_0 < T_{\parallel}$.

1. **Однородный цилиндр.** Рассмотрим пылевой (давление $P = 0$) цилиндр, находящийся в равновесии, когда сила гравитации уравновешивается центробежной силой вращения. Задача предполагается двумерной (но гравитация трехмерная), рассматривается зависимость только от r и φ в цилиндрической системе координат. В стационарном состоянии

$$v_{r0} = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi_0}{dr}\right) = 4\pi G\rho_0, \qquad \frac{v_{\varphi 0}^2}{r} = \frac{d\Phi_0}{dr} \tag{1.1}$$

Здесь v_r, v_φ — скорости по радиусу и окружности, Φ — гравитационный потенциал. Для однородного цилиндра

$$v_{\varphi 0}^2 = 2\pi G\rho_0 r^2 \tag{1.2}$$

Исследуем устойчивость стационарного состояния относительно малых возмущений. Возмущенное решение, мало отличающегося от стационарного состояния, будем искать в виде

$$v_r = V_r(r)\, e^{i(l\varphi-\omega t)}, \qquad v_\varphi = V_\varphi(r)\, e^{i(l\varphi-\omega t)} \tag{1.3}$$

Линеаризованные уравнения плоского движения пыли в цилиндрической системе координат с учетом (1.3) имеют вид

$$-i\left(\omega - l\frac{v_{\varphi 0}}{r}\right)v_r - 2\frac{v_{\varphi 0}}{r}v_\varphi = -\frac{d\Phi}{dr} \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{v_{\varphi 0}}{r} + \frac{dv_{\varphi 0}}{dr}\right)v_r - i\left(\omega - l\frac{v_{\varphi 0}}{r}\right)v_\varphi = -i\frac{l}{r}\Phi$$

$$\left(\frac{\rho_0}{r} + \frac{d\rho_0}{dr}\right)v_r + i\rho_0\frac{l}{r}v_\varphi - i\left(\omega - l\frac{v_{\varphi 0}}{r}\right)\rho + \rho_0\frac{dv_r}{dr} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right) - \frac{l^2}{r^2}\Phi = 4\pi G\rho$$

---

[1] Возмущения везде выбираются в виде $\sim \exp\,[i\,(l\varphi - \omega t)]$.

В однородном случае $r^{-1}v_{\varphi 0} = \Omega = \text{const}$, первые три уравнения сводятся к следующему:

$$\frac{\rho}{\rho_0}[4\Omega^2 - (\omega - l\Omega)^2] = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right) - \frac{l^2}{r^2}\Phi \tag{1.5}$$

Сравнивая (1.5) с последним уравнением (1.4), получим, что система уравнений (1.4) имеет решение при условии, которое сводится к следующему дисперсионному уравнению:

$$4\Omega^2 - (\omega - l\Omega)^2 = \omega_0^2, \quad \Omega^2 = 2\pi G\rho_0 \tag{1.6}$$
$$\omega = l\Omega \pm \omega_0, \quad \omega_0^2 = 4\pi G\rho_0$$

Таким образом, стационарное состояние однородного вращающегося цилиндра устойчиво относительно малых возмущений указанного типа, а полученное дисперсионное уравнение является аналогом соответствующего уравнения для плазменных колебаний (только во вращающейся системе отсчета).

2. **Неоднородный цилиндр.** Покажем как построить собственные функции для колебаний «плазменного» типа (1.6) в более общем случае неоднородного цилиндра.

Система уравнений (1.4), описывающая малые колебания вращающегося неоднородного цилиндра, может быть приведена к следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\left(1 + \frac{y^2}{\omega_0^2}\right)\Delta\Phi + A_1\Phi' + \frac{2l\Omega}{rx}\left(A_1 + \frac{\Omega'}{\Omega}\right)\Phi = 0 \tag{2.1}$$

Здесь

$$y^2 = x^2 - 2\alpha\Omega, \qquad \alpha = 2\Omega + r\Omega', \qquad x = l\Omega - \omega,$$
$$k_0 = \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr}, \qquad A_1 = k_0 + 2\,\frac{\Omega(\alpha + \alpha'\Omega/\Omega' - lx)}{x^2 - 2\alpha\Omega}\,\frac{\Omega'}{\Omega} \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) наиболее просто решается в ВКБ-приближении в случае малой неоднородности. Разлагая плотность ρ_0, вблизи значения постоянной плотности ρ_c имеем

$$\Omega = \Omega_c + \frac{2\pi G\rho_c - \Omega_c}{r_c}(r - r_c), \quad \Omega_c^2 = \int_0^{r_c} \frac{4\pi G\rho r\,dr}{r_c^2} \tag{2.3}$$

$$\mu = 2\pi\int_0^{r_c}\rho r\,dr, \quad \bar\rho = \frac{\mu}{\pi r_c^2}, \quad \Omega_c^2 = 2\pi G\bar\rho$$

Подстановка (2.3) в (2.1) при условии $|kr| \gg 1$ (ВКБ) приводит к устойчивому решению. При $l = 0$ цилиндр устойчив при произвольной неоднородности из-за сохранения момента каждой частицы [15].

При анализе уравнения (2.1) следует убедиться, что найденное решение есть собственная функция уравнения. Уравнение (2.1) имеет полюса в точках

$$r = 0, \quad \omega_0^2(r) + y^2(r) = 0, \quad x(r) = 0, \quad y^2(r) = 0$$

Особенности в уравнении могут привести к тому, что среди его решений могут быть сингулярные (см., например обзор [16]). Однако все физические величины должны быть конечны. Таким образом, доказательство того что решение уравнения является собственной функцией, сводится к доказательству финитности решения в любой точке r.

Рассмотрим случай малых отклонений от однородности

$$[\rho\ (R) - \rho\ (0)]\,/\,\rho\ (r) \ll 1$$

В этом случае уравнение (2.1) сводится к следующему:

$$\Phi'' = \left(\frac{1}{r} + \alpha_1\right)\Phi' - \left(\frac{l^2}{r^2} + \frac{\beta}{r}\right)\Phi = 0 \quad \left(\frac{d\Omega}{dr} = \mathrm{const}\right) \tag{2.4}$$

Здесь α_1, β — постоянные, связанные с k, ω.

Решение уравнения (2.4) выражается через функцию Уитеккера [17]

$$\Phi = r^{-1/2} e^{-1/2\alpha_1 r} W_{\lambda,\,l}\,(\alpha_1 r), \quad \lambda = -\frac{\alpha_1 + 2\beta}{2\alpha_1} \tag{2.5}$$

Ограниченное при $r \to 0$ и $r \to \infty$ решение (2.5) уравнения (2.4) существует при $\lambda - k - {}^1/_2 = n$, где $n + 1$ натуральное число [17], что определяет действительные значения ω. Это решение экспоненциально убывает при $r \to \infty$ и $\sim r^l$ при $r \to 0$, $l \geqslant 1$. Таким образом, решение уравнения (2.1) является финитным.

3. Вращающийся цилиндр со встречными потоками. Рассмотрим теперь однородный пылевой цилиндр, состоящий из двух взаимно проникающих пучков со скоростями $v_{\varphi 0}$ и $-v_{\varphi 0}$ с одинаковой плотностью ${}^1/_2\rho_0$, для того чтобы найти аналог плазменной пучковой неустойчивости. Момент вращения такого цилиндра в отличие от рассматриваемого выше однородного вращения равен нулю, в стационарном состоянии справедливы уравнения (1.1) и (1.2). Дисперсионное соотношение для этого случая можно получить, если записать уравнение (1.5) для каждого из пучков с плотностью ${}^1/_2\,\rho_0$ и сопоставить его с последним уравнением (1.4) для возмущенного потенциала. В результате имеем

$$\frac{1}{4\Omega^2 - (\omega - l\Omega)^2} + \frac{1}{4\Omega^2 - (\omega + l\Omega)^2} = \frac{1}{\Omega^2} \tag{3.1}$$

Для ω^2 получаем выражение

$$\omega^2 = {}^1/_2\omega_0^2\,(l^2 + 3 \pm 2\sqrt{3l^2 + {}^1/_4}) \tag{3.2}$$

Величина ω^2 имеет минимум при $l = 2$, когда $\omega^2 = 0$, т. е. безразличное равновесие; $\omega^2 > 0$ при $l \neq 2$. Если плотности двух взаимно проникающих пучков разные, дисперсионное уравнение усложняется, однако можно показать, что оно имеет только действительные корни. Таким образом, рассматриваемый случай отличается от плазмы, где встречные потоки всегда неустойчивы.

В случае, когда неоднородный цилиндр состоит из двух одинаковых встречных вращающихся потоков, вместо уравнения (2.1) имеем

$$2\,\frac{\Delta\Phi}{\omega_0^2} = K_+ + K_-, \qquad K_+ = -\frac{1}{y^2}\left[\Delta\Phi + A_1\Phi' + \frac{2l\Omega}{rx}\left(A_1 + \frac{\Omega'}{\Omega}\right)\Phi\right] \tag{3.3}$$

Величина K_- получается из K_+ заменой Ω на $-\Omega$ во всех выражениях (2.2). При $l\,/\,kr \ll 1$ из (3.3) получаем

$$\frac{1}{2\alpha\Omega - (\omega - l\Omega)^2} + \frac{1}{2\alpha\Omega - (\omega + l\Omega)^2} = \frac{2}{\omega_0^2} \tag{3.4}$$

Легко убедиться, что (3.4) переходит в уравнение (3.1) при $\rho_0' = \Omega' = 0$. Воспользовавшись (2.2), получаем из (3.4) дисперсионное уравнение в виде

$$\omega^4 - 2\omega^2\,[(4 + l^2)\Omega^2 - {}^1/_2\omega_0^2 + 2r\Omega\Omega'] + [(4 - l^2)\Omega^2 + 2\Omega\Omega' r]^2 -$$
$$- \omega_0^2[(4 - l^2)\Omega^2 + 2\Omega\Omega' r] = 0 \tag{3.5}$$

Детерминант биквадратного относительно частоты ω уравнения (3.5) положителен, поэтому неустойчивость, описываемая этим уравнением, может быть только апериодической, т. е. инкремент $\gamma = i\omega$. Проведенное исследование устойчивости однородного цилиндра со встречными пучками показывает, что максимум инкремента в случае неоднородного цилиндра следует искать при $l = 2$. Действительно, при условии малости градиента плотности неустойчивость имеет место только в случае $l = 2$

$$\omega^2 = - r\Omega\Omega' \frac{\omega_0^2}{8\Omega^2 - {}^1/_2\omega_0^2} \tag{3.6}$$

$$8\Omega^2 > {}^1/_2\omega_0^2 \quad \text{при малых } \rho_0' \text{ и } \Omega'$$

Как видно из (3.6), необходимым условием пучковой неустойчивости в данном случае является условие роста угловой скорости вращения от центра цилиндра. Равновесные состояния пылевого гравитирующего цилиндра с движением частиц по некруговым орбитам рассматривались в монографии [18].

4. Неустойчивости при вращении пылевого цилиндра в горячей среде. Исследуем теперь спектр колебаний, образующийся при вращении однородного пылевого гравитирующего цилиндра в горячей среде. Как показано выше, собственные частоты колебаний вращающегося однородного цилиндра действительны. В горячей среде эти колебания могут раскачиваться в результате резонансного взаимодействия волны с частицами среды. Линеаризованное кинетическое уравнение горячего газа имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \nabla\Phi \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{4.1}$$

Член $\nabla\Phi_0\, \partial f / \partial \mathbf{v}$ опущен в силу условия $\nabla\Phi_0\, \partial f / \partial \mathbf{v} \ll \mathbf{v}\partial f / \partial \mathbf{r}$, которое можно переписать в виде

$$kr \frac{\Omega^2}{k^2 v_T^2} \ll 1, \quad v_T^2 = \frac{2T}{m} \tag{4.2}$$

Представляя возмущенную функцию распределения в виде

$$f = Fe^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$$

находим возмущенную плотность горячей среды

$$\rho^* = - im\nabla\Phi \int \frac{\partial f_0 / \partial \mathbf{v} d^2 v}{\omega - \mathbf{kv}} \tag{4.3}$$

Здесь m — масса одной частички горячей среды (предполагается, что горячая среда состоит из одинаковых частиц).

С учетом (1.4), (1.5) и (4.3) линеаризованное уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{A}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \frac{l^2}{r^2} B\Phi = 0 \tag{4.4}$$

$$A = 1 - \frac{4\pi Gimr}{1 - \omega_0^2\Delta} J_r, \quad B = 1 - \frac{4\pi Grm}{(1 - \omega_0^2\Delta)\, l} J_\varphi$$

$$J_r = \int \frac{(\partial f_0 / \partial v_r)\, d^2 v}{\omega - kv_r - lv_\varphi / r}, \quad J_\varphi = \int \frac{(\partial f_0 / \partial v_\varphi)\, d^2 v}{\omega - kv_r - lv_\varphi / r} \tag{4.5}$$

$$f_0 = \frac{n_0}{\pi v_T^2} \exp\left(- \frac{v_r^2 + v_\varphi^2}{v_T^2}\right), \quad \Delta = \frac{1}{4\Omega^2 - (\omega - l\Omega)^2}$$

Для интегралов (4.5), пользуясь правилом обхода полюсов [19, 20], имеем

$$J_r = \begin{cases} \vartheta\,(1 + i\sqrt{\pi}\,\theta), & l\,/\,kr \ll 1 \\ i\vartheta\,\sqrt{\pi}\,\theta kr\,/\,l, & l\,/\,kr \gg 1 \end{cases} \qquad \left(\vartheta = \frac{2n_0}{kv_T{}^2}\right) \tag{4.6}$$

$$J_\varphi = \begin{cases} i\vartheta\,\sqrt{\pi}\,\theta kr\,/\,l, & l\,/\,kr \ll 1 \\ \vartheta\,(1 + i\sqrt{\pi}kr\,\theta\,/\,l)\,kr\,/\,l, & l\,/\,kr \gg 1 \end{cases} \qquad \left(\theta = \frac{\omega}{kv_T}\right) \tag{4.7}$$

Рассмотрим случай $l\,/\,kr \ll 1$

$$A = 1 - \frac{2ikr}{1 - \omega_0^2\,\Delta}\left(1 + \frac{i\sqrt{\pi}\,\omega}{kv_T}\right)\frac{\omega_0{}^{*2}}{k^2 v_T{}^2} \tag{4.8}$$

$$B = 1 - \frac{2i\,\sqrt{\pi}\,k^2r^2}{1 - \omega_0{}^2\Delta}\,\frac{\omega\omega_0{}^{*2}}{k^3 l^2 v_T{}^3} \qquad (\omega_0{}^{*2} = 4\pi G\rho_0{}^*) \tag{4.9}$$

Представим частоту в виде

$$\omega = \omega_1 + i\gamma \tag{4.10}$$

При этом $\gamma \ll \omega_1$. Из (4.4), (4.9) имеем тогда, пренебрегая единицей в выражении для A, т. е. используя неравенство (приближение ВКБ)

$$kr \gg kv_T\,/\,\Omega \tag{4.11}$$

следующее выражение для ω_1:

$$\omega_1 = \omega_0\left[\frac{l}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\omega_0{}^{*2}}{\omega_0{}^2}\right)^{1/2} \pm \left(1 + 2\,\frac{\omega_0{}^{*2}}{\omega_0{}^2}\right)^{1/2}\right] \tag{4.12}$$

Условие совместимости неравенств (4.11) и (4.2) при учете $kr \gg 1$ есть

$$\Omega\,/\,kv_T \ll 1 \tag{4.13}$$

Неравенство (4.13) определяет допустимый нижний предел температуры горячей среды при фиксированных k и Ω.

При написании (4.12) было учтено неравенство (4.13) и использовалось выражение для Ω, вытекающее из условия равновесия

$$\Omega^2 = \frac{1}{2}\,(\omega_0{}^2 + \omega_0{}^{*2}) \tag{4.14}$$

Учитывая $\gamma \ll \omega_1$, знаменатель коэффициентов A и B из (4.8) и (4.9) приближенно равен

$$1 - \frac{\omega_0{}^2}{4\Omega^2 - (\omega - l\Omega)^2} = -\frac{2i\gamma\,(\omega_1 - l\Omega)}{\omega_0{}^2} + 1 - \frac{\omega_0{}^2}{4\Omega^2 - (\omega_1 - l\Omega)^2} \tag{4.15}$$

Подставляя (4.15) в (4.4) — (4.9), находим выражение для γ

$$\gamma_{1,2} = -2\sqrt{\pi}\,\frac{\omega_0{}^{*2}\omega_0{}^2}{k^3 v_T{}^3}\left[1 \pm \frac{l}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega_0{}^2 + \omega_0{}^{*2}}{\omega_0{}^2 + 2\omega_0{}^{*2}}\right)^{1/2}\right] \tag{4.16}$$

При $l = 0{,}1$ выражение (4.16) представляет собой декремент затухания $\gamma_{1,2} < 0$. При $l \geqslant 2$ в случае, когда в круглых скобках формулы (4.16) выбирается знак минус, получаем $\gamma_2 > 0$ и раскачку колебаний, получающуюся в результате резонансного взаимодействия волн с частицами горячей среды (пучковая неустойчивость).

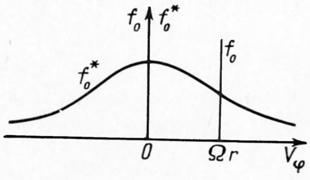
Как видно из (4.16), величина $\gamma \sim l\,/\,(kr)^3$ в основном определяется параметром kr и достигает максимума при $kr \to 1$. Поскольку в данном случае l/kr является малым параметром задачи, максимум инкремента достигается при минимальном значении l, т. е. при $l = 2$. Для $\omega_0^* \gg \omega_0$ максимум инкремента смещается к $l = 3$.

Пусть теперь $l/kr \gg 1$. В этом случае, используя (4.6), (4.7) и проводя вычисления, аналогично предыдущим, имеем

$$\gamma_{1,2} = -2\sqrt{\pi}\left(\frac{kr}{l}\right)^3 \frac{\omega_0^{*2}\omega_0^2}{k^3 v_T^3}\left[1 \pm \frac{l}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega_0^2 + \omega_0^{*2}}{\omega_0^2 + 2\omega_0^{*2}}\right)^{1/2}\right] \tag{4.17}$$

Физический смысл полученной в этом пункте неустойчивости иллюстрирует фигура. Функция распределения пылевых частиц цилиндра по скоростям представляется в виде горба на функции распределения частиц горячей среды. Это объясняет наличие пучковой неустойчивости, вызванной резонансным механизмом Ландау (подробнее см., например, [20]).

5. Устойчивость ограниченного по радиусу вращающегося цилиндра. Рассмотрим однородный вращающийся цилиндр бесконечно длинный, но ограниченный по радиусу, у которого центробежная сила уравновешивает силу тяжести в плоскости.



Фиг. 1

Такой цилиндр, ограниченный по r, находится в равновесии, но в пыли это равновесие неустойчиво относительно возмущений с $k_z \neq 0$ причем для малых значений k_z, квадрат частоты $\omega_d^2 \sim -(k_z R)^2\omega_0^2$, где R — радиус цилиндра, $\omega_0^2 = 4\pi G\rho_0$. При больших k_z, как в однородной среде $\omega^2 = -\omega_0^2$. Если имеется некоторая продольная температура $T_\parallel$, то произойдет стабилизация, причем из соображений размерности при любых k_z изменение квадрата частоты за счет появления $T_\parallel$ есть $\Delta\omega^2 \sim k_z^2 v_T^2$.

При любой $T_\parallel$ возмущения с достаточно большими k_z будут стабилизированы. Но в силу одинаковой зависимости ω_d^2 и $\Delta\omega^2$ от k_z для малых k_z при температуре больше некоторой $T_\parallel > T_0$ будут стабилизированы также и возмущения с малыми k_z.

Поэтому при температуре $T_\parallel$ такой что $v_T > v_{T0} \sim R\omega_0$ цилиндр полностью устойчив.

Покажем это строго и найдем точно величину T_0. Как показано в работе [12], при $T_\parallel > T_\perp$ анизотропная неустойчивость отсутствует, здесь $T_\perp = 0$, поэтому рассматриваемый цилиндр устойчив и в кинетике.

В случае анизотропного давления, как в рассматриваемом цилиндре с продольной температурой, нельзя написать уравнение состояния в виде $P = P(\rho)$.

Воспользуемся уравнениями для продольной $P_\parallel$ и перпендикулярной $P_\perp$ компонент тензора давлений, выведенных в [21]. Из линеаризованных уравнений Эйлера, непрерывности, тяготения и уравнений для $P_\parallel$ и $P_\perp$ получаем для возмущения потенциала Φ следующее уравнение:

$$\Phi'' + \frac{\Phi'}{r} - \Phi\left(\frac{l^2}{r^2} + \nu\right) = 0, \quad r < R \tag{5.1}$$

$$\Phi'' + \frac{\Phi'}{r} - \Phi\left(\frac{l^2}{r^2} + k^2\right) = 0, \quad r < R$$

$$\nu = \frac{k^2(4\Omega^2 - x^2)(x^2 - k^2c^2 + \omega_0^2)}{(x^2 - k^2c^2)(4\Omega^2 - x^2) - \omega_0^2(x^2 - {}^2/_3 k^2c^2)}$$

$$c^2 = \frac{3p_0}{\rho_0} = 3\,\frac{kT_\parallel}{m}, \quad \Phi \sim \exp(l\varphi + kz - \omega t)$$

Решение уравнений (5.1) должно быть везде конечным, обращаться в нуль на бесконечности и быть непрерывным вместе с первой производной.

Решение, удовлетворяющее этим условиям, имеет вид

$$\Phi = AJ_l(qr), \quad r < R, \quad \nu = -q^2 \qquad (5.2)$$

$$BK_l(kr), \quad r > R,$$

Здесь J_l — функция Бесселя первого рода, K_l — функция Макдональда [22]. Из условия непрерывности решения (5.2) с первой производной при $r = R$ имеем

$$AJ_l(qR) - BK_l(kR) = 0$$

$$Aq\left[J_{l-1}(qR) - \frac{l}{qR}J_l(qR)\right] + Bk\left[K_{l-1}(kR) + \frac{l}{kR}K_l(kR)\right] = 0 \qquad (5.3)$$

Условие существования нетривиального решения дает дисперсионное уравнение

$$\frac{qJ_{l-1}(qR)}{J_l(qR)} = -\frac{kK_{l-1}(kR)}{K_l(kR)} \qquad (5.4)$$

Здесь $q(k, \omega)$ определено в (5.1), (5.2) Из соотношения (5.4), следует, что величина q имеет минимум $q_{\min} > 0$, причем $q_{\min} R = 2.4$ — первый нуль функции $J_0(x)$. Найдем теперь $\omega(k, q)$; из (5.1) (5.2) имеем

$$x^2 = (\omega - l\Omega)^2 = \frac{\omega_0^2 + k^2c^2}{2} \pm \left[\frac{(3\omega_0^2 - k^2c^2)^2}{4} - \frac{2}{3}\omega_0^2(3\omega_0^2 - k^2c^2)\frac{q^2}{k^2 + q^2}\right]^{1/2} \qquad (5.5)$$

Из (5.5) следует, что

$$x^2 > 0 \quad \text{при } c^2 > \frac{\omega_0^2}{k^2 + {}^2/_3 q^2} \qquad (5.6)$$

При $c^2 > {}^3/_2\omega_0^2 / q_{\min}^2$ цилиндр устойчив для всех k и l. Используя выражения для c^2 и $q_{\min}$, получим, что ограниченный по r цилиндр устойчив относительно любых возмущений при

$$\frac{T_{\parallel}}{m} > 0.087\omega_0^2 R^2$$

6. **Заключение.** Основным результатом работы является вывод об устойчивости вращающегося цилиндра относительно произвольных возмущений, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и нахождение кинетической пучковой неустойчивости вращающегося цилиндра в горячем газе, имеющей максимум инкремента при $l = 2$ для $\omega_0^{*2} \gg \omega_0^2$.

Последнюю неустойчивость можно было бы связать с наличием у большинства галактик двух спиральных рукавов [23], эти рукава могут являться следствием неустойчивости, возникающей при вращении газа, который можно рассматривать гидродинамически, на фоне бесстолкновительных звезд. Образование рукавов как следствие гравитационной неустойчивости рассматривалось в [24]. Влияние кинетической неустойчивости на образование спиральных рукавов в диске рассматривалось в работе [25].

Рассмотренная здесь модель бесконечно длинного цилиндра не имеет отношения к галактике, представляющей собой сильно сплюснутый эллипсоид. Однако вполне возможно, что наличие максимума инкремента при $l = 2$ для пучковой неустойчивости сохранится и для более сложных, чем бесконечный цилиндр, конфигураций.

Поступила 26 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Jeans J. H. Astronomy and Cosmology, Cambridge, Univ. Press, 1928.
2. Bonnor W. B. Jeans formula for gravitational instability. In: «Relativity theory and astrophysics». Prov. Amer. Math. Soc., 1967, vol. 1.
3. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика, М., «Наука», 1967.
4. Sweet P. Cooperative phenomena in stellar dynamics. Month. Not. Roy. Astron. Soc., 1963, vol. 125, No. 3—4, p. 285.

5. Lynden — Bell D. The stability and vibrations of a gas of stars. Month. Not. Roy. Astron. Soc., 1962, vol. 124, No. 4, 279.
6. Максумов М. Н., Марочник Л. С. Критическая длина волны в бесстолкновительных гравитирующих системах. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 5, стр. 1019.
7. Лебедев В. И., Максумов М. Н., Марочник Л. С. Коллективные процессы в гравитирующих системах. I. Астрон. ж., 1965, т. 42, № 4, стр. 709.
8. Максумов М. Н., Марочник Л. С. Коллективные процессы в гравитирующих системах II. Астрон. ж., 1965, т. 42, № 6, стр. 1261.
9. Марочник Л. С. Вопросы динамики бесстолкновительных гравитирующих систем. В сб. «Проблема многих тел и физика плазмы», Тр. Международного симпозиума, Новосибирск, «Наука», 1967.
10. Марочник Л. С., Птицына Н. Т. Гравитационная устойчивость вращающихся анизотропных звездных систем. Астрон ж., 1968, т. 45, № 3, стр. 516.
11. Lee E. P. Suppression of Jeans instability in collisionless media. Astrophys. J., 1967, vol. 148, No. 1, p. 185.
12. Wu C. S. Stability of density waves in a selfgravitating stellar system with uniform rotation. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 3, p. 545.
13. Lynden — Bell D. Cooperative phenomena in stellar dynamics in «Relativity theory and astrophysics». Prov. Amer. Math. Soc., 1967, vol. 2.
14. Антонов В. А. Замечания к проблеме устойчивости в звездной динамике. Астрон. ж., 1960, т. 37, № 5, стр. 918.
15. Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б., Фридман А. М. Об устойчивости тел вращения относительно радиальных возмущений. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 4.
16. Тимофеев А. В. Резонансные явления в течениях плазмы и жидкости. Препринт Ин-та атомной энергии АН СССР, 1968, № 1570.
17. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
18. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехтеоретиздат, 1965.
19. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы. ЖЭТФ, 1946, т. 16, вып. 7, стр. 574; Успехи физ. наук, 1967, т. 93, № 3, стр. 527.
20. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», М., Атомиздат, 1963, т. 3.
21. Марочник Л. С. К гидродинамике вращающихся звездных систем. Астрон. ж., 1966, т. 43, № 5, стр. 919.
22. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М., «Наука», 1964.
23. Струве О., Зебергс В., Астрономия XX века. М., «Мир», 1968.
24. Lin C. C., Shu F. H. On the spiral structure of disk galaxies. Astrophys. J., 1964, vol. 140, No. 2, p. 646.
25. Марочник Л. С., Сучков А. А. О волновой природе спиральной структуры галактик. Препринты № 1—4 Ин-та астрофизики АН ТаджССР, 1968 Астрон. ж., 1969, т. 46, № 2, стр. 319.