

О НЕКОТОРЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ ПОЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДАВЛЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

А. В. Смольяков

(Ленинград)

Приведены результаты расчетов пространственных корреляций случайного поля давлений, действующих на поверхность плоской пластины со стороны развитого турбулентного пограничного слоя. Вычисления опираются на известные экспериментальные данные о взаимном спектре турбулентных флуктуаций давления. Установлено, что пространственно-временные корреляции обладают ярко выраженным подобием формы, и на этой основе выведено простое приближенное соотношение между модулем нормированного взаимного спектра, спектром энергии и максимумами коэффициента пространственно-временных корреляций. Показано, что результаты элементарных расчетов при помощи полученного соотношения почти не отличаются от результатов вычислений на ЭЦВМ по точным формулам.

1. Для решения множества проблем необходима информация о различных статистических характеристиках турбулентного пограничного слоя, и в том числе о характеристиках поля турбулентного давления. К числу таких проблем относятся: аэродинамический шум, излучаемый пограничным слоем при движении летательных аппаратов [1,2]; возбуждение вибраций в упругих конструкциях, обтекаемых потоком [3,4]; генерирование ветровых волн на свободной поверхности жидкости [5] и многие другие. Знание статистических характеристик поля давлений, кроме того, способствует лучшему пониманию структуры турбулентного пограничного слоя.

Очень часто объектом теоретических и экспериментальных исследований в пограничном слое несжимаемой жидкости является комплексная функция — взаимный спектр пульсаций давления на поверхности пластины

$$P(\xi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi, \tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (1.1)$$

Здесь $R(\xi, \tau) = \langle p(x, t) p(x + \xi, t + \tau) \rangle$ — пространственно-временная корреляция пульсаций давления p в стационарном по времени t и однородном по пространству x поле, ξ — пространственный (в плоскости пластины) и τ — временной интервалы между точками наблюдения, ω — круговая частота пульсаций. То обстоятельство, что из всех статистических характеристик взаимный спектр (1.1) пользуется у исследователей особой популярностью, объясняется возможностью его измерения с минимальными искажениями [6].

При решении же конкретных задач, связанных с турбулентными давлениями, иногда удобнее располагать сведениями не о взаимном спектре $P(\xi, \omega)$, а о корреляциях $R(\xi, \tau)$. В принципе, всегда можно по известной функции $P(\xi, \omega)$ вычислить $R(\xi, \tau)$, воспользовавшись фурье-преобразованием, обратным (1.1)

$$R(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi, \omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (1.2)$$

но такие расчеты чрезвычайно трудоемки, и если требуется знать $R(\xi, \tau)$ для широкого диапазона изменения параметров ξ и τ , то применение вычислительных машин на этом пути неизбежно.

Однако существует другой путь, позволяющий построить очень несложные приближенные выражения, точность которых тем не менее достаточно высока. Ниже будет показано, что такая возможность обусловлена специфическим соотношением между спектром энергии и модулем взаимного спектра турбулентных давлений.

2. В дальнейшем будет использоваться следующая форма представления взаимного спектра, предложенная Коркосом [7]:

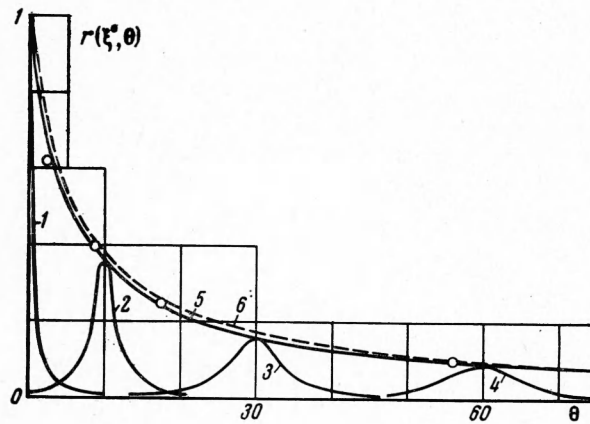
$$\frac{P(\xi, \omega)}{P(0, \omega)} = A\left(\frac{\xi\omega}{U_0}\right) B\left(\frac{\eta\omega}{U_0}\right) \exp\left(-i\frac{\varepsilon\omega}{U_0}\right) \quad (2.1)$$

Здесь $P(0, \omega)$ — спектральная плотность энергии турбулентных пульсаций давления, или взаимный спектр при нулевом пространственном интервале; ξ и η — компоненты вектора ξ , соответственно параллельная и перпендикулярная направлению осредненной скорости течения в пограничном слое; A и B — модули нормированных продольного и поперечного взаимных спектров; U_0 — фазовая скорость соответствующей частотной компоненты поля давления.

Большое количество измерений, выполненных различными экспериментаторами [8-10], подтверждает справедливость представления (2.1), во всяком случае, для широких интервалов изменения параметров ξ и ω . При этом измеренные модули A и B удовлетворительно аппроксимируются экспоненциальными функциями

$$A = \exp\left(-\alpha \frac{|\xi| \omega}{U_0}\right), \quad B = \exp\left(-\beta \frac{|\eta| \omega}{U_0}\right) \quad (2.2)$$

и хотя в разных опытах значения α , β и U_0 несколько различны, разброс данных, однако, невелик, и можно считать, что результаты группируются около $\alpha = 0.08 \div 0.10$, $\beta = 0.55 \div 0.60$ и $U_0 = (0.7 \div 0.8) U_1$, где U_1 — осредненная скорость течения на внешней границе пограничного слоя.



Фиг. 1. Коэффициент продольных пространственно-временных корреляций; кривые 1, 2, 3, 4, 5 — точный расчет на ЭЦВМ по формуле (1.2) при $\xi^* = 0, 10, 30, 60$ и $\xi^* = \theta$ соответственно; точки о — приближенный расчет по формуле (3.4), спектр (2.3); кривая 6 — приближенный расчет по формуле (4.2), спектр (4.1)

Очень тщательные измерения спектра энергии $P(0, \omega)$ пульсаций давления на плоской пластине выполнены, в частности, Виллмартом и Вулдриджем [11] и Виллмартом и Рузом [8]. Данные о спектре энергии, приведенные в работе [8], расцениваются специалистами как весьма достоверные. Аналитическое выражение

$$\Pi(\Omega) = \frac{P(0, \Omega) U_1}{\langle p^2 \rangle \delta^*} = \frac{1.27}{1 + \exp(1.237 \Omega^{0.625})} \Omega = \frac{\omega \delta^*}{U_1} \quad (2.3)$$

хорошо аппроксимирует опытные данные [8].

Здесь δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя; $\langle p^2 \rangle$ — дисперсия турбулентных пульсаций давления на поверхности пластины.

Спектр энергии (2.3) и взаимный спектр (2.1) при $\alpha = 0.088$ были использованы для вычисления продольных ($\eta = 0$) пространственно-временных корреляций по формуле (1.2) на ЭЦВМ «Проминь». Был запрограммирован автоматический выбор (для каждого из значений ξ и τ) такого шага интегрирования, при котором погрешность правила трапеций не превышала 0.5%. Верхний и нижний пределы интегрирования выбирались из условия достижения машинного нуля для взаимного спектра. Часть результатов расчета представлена графически на фиг. 1. Из графиков видно, что величина максимумов коэффициентов корреляции

$$L(\xi^*) = \frac{1}{\langle p^2 \rangle} R\left(\xi, \tau = \frac{\xi}{U^*}\right), \quad \xi^* = \frac{\xi U_1}{\delta^* U_0} \quad (2.4)$$

сначала очень быстро, а затем медленно убывает с увеличением расстояния ξ^* между точками наблюдения, при этом функции корреляции становятся все более и более пологими. Все это хорошо согласуется с данными прямых измерений корреляций [11]. То, что площади под кривыми $r(\xi, \tau) = \langle p^2 \rangle^{-1} R(\xi, \tau)$ оказались одинаковыми, не является удивительным, потому что это — прямое следствие формы (2.1) представления взаимного спектра [7]. Значительно более неожиданным оказалось подобие формы пространственно-временных корреляций для любых ξ^* и $\theta = \tau U_1 / \delta^*$. И хотя этот факт от

четливо виден на фиг. 2, его нельзя было предсказать заранее. В чем состоит причина этого неожиданного результата будет объяснено ниже, а пока целесообразно отметить его чрезвычайную полезность. Она состоит в том, что для построения всего семейства кривых $R(\xi, \tau)$, по-видимому, нет необходимости производить фурье-преобразования (1.2) в полном объеме для всех возможных комбинаций ξ и τ . Достаточно положить $\tau = \xi / U_0$ и тем самым определить форму кривой $L(\xi^0)$ для максимумов семейства $\langle p^2 \rangle^{-1} R(\xi, \tau)$; любую же кривую этого семейства нетрудно получить из автокорреляции¹

$$R(0, \tau) = \int_0^\infty P(0, \omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (2.5)$$

аффинным преобразованием координат при помощи масштаба $L(\xi)$

$$R(\xi, \tau) = LR[0, L(\tau - \xi / U_0)] \quad (2.6)$$

3. Формула спектральных отношений. Подобие (2.6) корреляций ниоткуда не следует, и для того чтобы понять, почему оно выполняется, лучше всего рассмотреть обратную задачу: предположить, что это подобие существует, и попытаться вывести отсюда возможные следствия.

На основании (1.1), (2.1) и (2.6) можно записать

$$\begin{aligned} P(0, \omega) A(\xi\omega / U_0) \exp(-i\omega\xi / U_0) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty LR[0, L(\tau - \xi / U_0)] \exp(-i\omega\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.1)$$

После замены переменных $\vartheta = L\tau$, $\chi = \omega / L$ правая часть (3.1) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R(0, \vartheta - L\xi / U_0) \exp(-i\chi\vartheta) d\vartheta \quad (3.2)$$

Интеграл (3.2) можно рассматривать как спектр функции, запаздывающей на время $\Delta\vartheta = L\xi / U_0$. Как известно [12], спектр $P_\Delta(\chi)$ запаздывающей функции $R(\vartheta - \Delta\vartheta)$ связан со спектром $P(\chi)$ функции $R(\vartheta)$ соотношением

$$P_\Delta(\chi) = P(\chi) \exp(-i\chi\Delta\vartheta) \quad (3.3)$$

Сопоставление (3.1), (3.2) и (3.3) и возвращение к прежним переменным дает зависимость

$$\frac{P(0, \omega / L)}{P(0, \omega)} = A\left(\frac{\omega\xi}{U_0}\right) \quad (3.4)$$

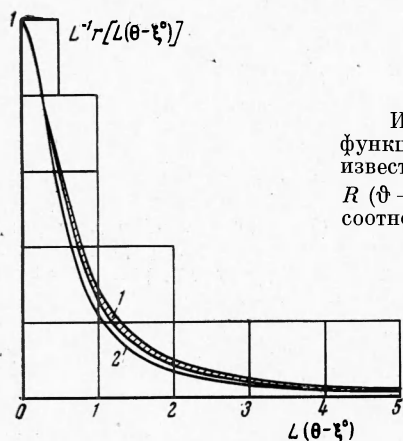
которую можно назвать формулой спектральных нормированных отношений. Она показывает, что модуль нормированного продольного взаимного спектра равен отношению спектра энергии, транспонированного по частоте в L^{-1} раз, к действительному спектру энергии.

Структура полученной зависимости требует, однако, чтобы при фиксированных ξ , U_0 и L зависимость от частоты правой и левой части (3.4) была одинаковой. Ясно, что при произвольных функциях $P(0, \omega)$ и $A(\omega\xi / U_0)$ это требование не всегда может быть выполнено. Если, например, модуль A задан в форме экспоненты (2.2), то строго удовлетворить соотношению (3.4) можно только в том случае, если спектр энергии будет иметь аналогичную форму

$$P(0, \omega) \sim \exp(-\gamma\omega), \quad \gamma = \text{const} \quad (3.5)$$

В данном случае на основании опытных данных были приняты зависимости (2.3) и (2.2), для которых формула (3.4) не может быть абсолютно верной. Следовательно, в

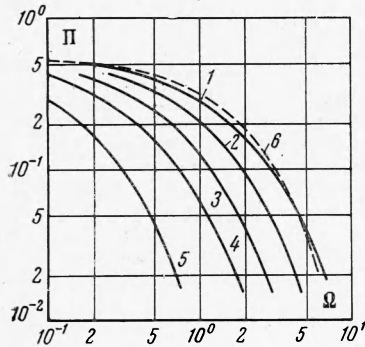
¹ Величина нижнего предела интеграла (2.5) учитывает, что экспериментально определяемый спектр $P(0, \omega)$ — «односторонний», т. е. вся энергия считается распределенной только в области $\omega \geq 0$.



Фиг. 2. Подобие пространственно-временных корреляций; кривая 1 — точный расчет на ЭЦВМ для диапазона $\xi^0 = 0 \div 120$; кривая 2 — приближенный расчет по формуле (4.3)

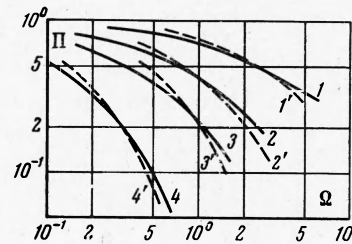
отношении данных, представленных на фиг. 2, теперь можно определенно утверждать, что, несмотря на убедительность произведенного совмещения кривых $R(\xi, \tau)$, вычисленных на ЭЦВМ, их подобие не было строгим. Тем не менее нетрудно видеть (фиг. 3), что спектры (2.3) и (3.5) не сильно отличаются один от другого. Именно в этом и кроется причина того, что вычисленные корреляционные функции хорошо описываются соотношением подобия (2.6). Обнаруженный расчетами удивительный результат, таким образом, теперь имеет объяснение.

Возможно, что наблюдаемое в опытах сходство функциональных зависимостей от частоты для спектра энергии и модуля нормированного взаимного спектра — не простая случайность, а явление, обусловленное какими-то внутренними закономерностями развитого турбулентного пограничного слоя. Но теоретически доказать или опровергнуть необходимость такого сходства не удается, и пока его следует воспринимать как опытный факт.



Фиг. 3

Фиг. 3. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют $L = 1.0, 0.63, 0.40, 0.25, 0.10$; 6 — экспоненциальный спектр (4.1)



Фиг. 4

Фиг. 4. Кривые 1, 2, 3, 4 — левая часть (3.4) при $L = 0.63, 0.40, 0.25$ и 0.10 ; кривые 1', 2', 3', 4' — $\exp(-0.088 \Omega |\xi^0|)$ при $\xi^0 = 2.5, 9.0, 17.5$ и 56.0

Незначительность отклонений экспериментально наблюдаемого спектра (2.3) от экспоненциальной формы (3.5) дает основание надеяться, что для поля пристеночных давлений в турбулентном пограничном слое плоской пластины формула спектральных отношений окажется верной с достаточной степенью точности. На фиг. 3 и 4 показана процедура графического решения уравнений (3.4) для четырех значений $L = 0.63, 0.40, 0.25$ и 0.10 . Видно, что при подходящих значениях ξ^0 правая и левая части (3.4) зависят от частоты примерно одинаково. На фиг. 1 сравниваются значения функции $L(\xi^0)$, определенной таким способом, со значениями этой же функции, вычисленной на ЭЦВМ по точным формулам. Можно видеть, что точность формулы (3.4) вполне удовлетворительна.

4. Другие приближенные зависимости. Если считать, что спектр энергии имеет форму (3.5), то условие нормировки

$$\int_0^\infty P(0, \omega) d\omega = \langle p^2 \rangle$$

а также требование наилучшего приближения к спектру (2.3) дают возможность определить постоянные и записать

$$\frac{P(0, \Omega) U_1}{\langle p^2 \rangle \delta^*} = 0.548 \exp(-0.548\Omega) \quad (4.1)$$

Подстановка (4.1) в (3.4) при

$$A\left(\frac{\omega \xi}{U_0}\right) = \exp\left(-\alpha \frac{|\xi| \omega}{U_0}\right) = \exp(-\alpha \Omega |\xi^0|)$$

приводит к простому аналитическому выражению для величины максимумов коэффициента продольной пространственно-временной корреляции

$$L(\xi^0) = \left(1 + \frac{\alpha |\xi^0|}{0.548}\right)^{-1} \quad (4.2)$$

На фиг. 1 показано, что зависимость (4.2) очень близка к точной зависимости, если, как и прежде, $\alpha = 0.088$.

Не представляет труда получить выражение и для продольных пространственно-временных корреляций

$$\frac{1}{\langle p^2 \rangle} R(\xi, \tau) = \frac{0.548\delta^*}{U_1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\Omega (0.548 + \alpha |\xi^\circ|) - i\omega \left(\frac{\xi}{U_0} - \tau \right) \right] d\omega =$$

$$= \frac{0.548 (0.548 + \alpha |\xi^\circ|)}{(0.548 + \alpha |\xi^\circ|)^2 + (\theta - |\xi^\circ|)^2} \quad (4.3)$$

отсюда коэффициент автокорреляции равен

$$\frac{1}{\langle p^2 \rangle} \bar{R}(0, \tau) = \left[1 + \left(\frac{\theta}{0.548} \right)^2 \right]^{-1} \quad (4.4)$$

Легко убедиться, что (4.3) может быть получено из (4.4) путем аффинного преобразования (2.6) при помощи масштаба (4.2). На фиг. 2 сравниваются точные значения пространственно-временных корреляций с приближенными (4.3). Сравнение свидетельствует о том, что различия между точными и приближенными результатами весьма невелики.

На ЭЦВМ не вычислялись функции $R(\xi, \tau)$ для векторных интервалов $\xi(\xi, \eta)$ при $\eta \neq 0$. Но если удовлетвориться точностью аналитических выражений, основанных на использовании спектра энергии (4.1), то трудоемких вычислений и не требуется. На основании (2.1) и (2.2) зависимость (4.3) легко обобщается

$$\frac{1}{\langle p^2 \rangle} R(\xi, \eta, \tau) = \frac{0.548 (0.548 + \alpha |\xi^\circ| + \beta |\eta^\circ|)}{(0.548 + \alpha |\xi^\circ| + \beta |\eta^\circ|)^2 + (\theta - |\xi^\circ|)^2} \quad (4.5)$$

$$(\bar{\eta}^\circ = \eta U_1 / \delta^* U_0)$$

Это дает возможность довольно просто охарактеризовать в корреляционных терминах статистические свойства случайного поля турбулентных давлений на плоской пластине. Точность зависимости (4.5) такая же, как и в частном случае (4.3), поскольку в обоих случаях использовались одни и те же предпосылки.

Автор считает приятным долгом поблагодарить Ю. Г. Блюдзе за полезное обсуждение результатов данной работы.

Поступила 21 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. L i g h t h i l l M. J. On sound generated aerodynamically. pt 11: Turbulence as a source of sound. Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 1954, vol. 222, No. 1148.
2. Random vibration. vol. 2, Massachusetts. 1963. (Рус. перев. «Случайные колебания». М., «Мир», 1967.)
3. D y e r J. Response of plates to a decaying and convecting random pressure field. J. Acoust. Soc. America, 1959, vol. 31, No. 7.
4. M a e s t r e l l o L. Use of turbulent model to calculate the vibration and radiation responses of a panel, with practical suggestions for reducing sound level. J. Sound and Vibrat., 1967, vol. 5, No. 3.
5. P h i l l i p s O. M. On the generation of waves by turbulent wind. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, No. 5.
6. C o r c o s G. M. The structure of the turbulent pressure field in boundary — layer. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, No. 3.
7. C o r c o s G. M. Resolution of pressure in turbulence. J. Acoust. Soc. Amer., 1963, vol. 35, No. 2.
8. W i l l m a r t h W. W., R o o s F. W. Resolution and structure of the wall pressure field beneath a turbulent boundary layer. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, No. 1.
9. B u l l M. K. Wall — pressure fluctuations associated with subsonic turbulent boundary layer flow. J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, No. 4.
10. C a r e y G. F., C h l u p s a J. E., S c h l o e m e r H. H. Acoustic turbulent water — flow tunnel. J. Acoust. Soc. America, 1967, vol. 41, No. 2.
11. W i l l m a r t h W. W., W o o l d r i d g e C. E. Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer. Fluid Mech., 1962, vol. 14, No. 1.
12. Х а р к е в и ч А. А. Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1962.