10. **Глаголева Ю. П., Жмайло В. А. и др.** Образование кольцевого вихря при всплывании легкого газа в тяжелом // ЧММСС.— 1974.— Т. 5, № 1.
11. **Заславский Б. И., Сотников И. М.** Экспериментальное исследование движения всплывающих вихревых колец // ПМТФ.— 1983.— № 1.
12. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика.— М.: ГТТЛ, 1955.— Ч. 1.
13. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике.— М.: Наука, 1964.

Поступила 10/IV 1986 г.

УДК 532.59

КИНЕТИКА СЛАБОТУРБУЛЕНТНЫХ ВОЛН НА НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ

В. К. Качурин, В. С. Ярунин

(*Ленинград*)

Кинетическое уравнение для слаботурбулентного волнения получено и исследовано в [1, 2]. В [3] рассматривалось искажение такого волнения стационарным пространственно однородным течением. В [4] изучалось возмущение линейной системы поверхностных волн случайным полем скоростей с заданными характеристиками. В настоящей работе рассмотрено влияние слабого нестационарного течения на поверхностное волнение. В полученном кинетическом уравнении присутствуют аналог интеграла столкновений [1, 2], а также слагаемые, описывающие линейный и нелинейный нелокальный по времени отклики системы на возмущение.

Потенциальное движение жидкости допускает гамильтоново описание, гамильтонова функция которого при наличии течения со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x}, z, t)$ имеет вид [4]

$$H = \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\int\limits_{-\infty}^{\eta(\mathbf{x})} (\nabla\varphi - \mathbf{v})^2\,dz + \frac{g}{2}\int d\mathbf{x}\,\eta^2(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Здесь $\varphi(\mathbf{x}, z, t)$ — гидродинамический потенциал; $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ — уравнение поверхности. Каноническими переменными для гамильтониана (1) являются $\eta(\mathbf{x}, t)$, $\psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, z, t)|_{z=\eta}$. В случае слабонелинейных нераспадных волновых процессов удобно перейти к нормальным переменным $b_{\mathbf{k}}(t)$, $b^*_{\mathbf{k}}(t)$ [1, 2]. При слабом воздействии поля скорости $\mathbf{v}$ на невозмущенную систему первые члены разложения (1) по степеням $b^*_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{v}$ дают эффективный гамильтониан в виде суммы гамильтониана $H_2 + H_4$, исследованного в [1, 2], и добавки $H_{\mathbf{v}}$, линейной по $\mathbf{v}$:

$$H = H_2 + H_4 + H_{\mathbf{v}},\quad H_2 = \int \omega_{\mathbf{k}} b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}\,d\mathbf{k}, \tag{2}$$

$$H_4 = \frac{1}{2}\int T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} b^*_{\mathbf{k}} b^*_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_3}\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3,$$

$$H_{\mathbf{v}} = \int R_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} b^*_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2 + \int d\mathbf{k}_1\left[\left(P_{\mathbf{k}_1} b^*_{\mathbf{k}_1} + \int Q_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} b^*_{\mathbf{k}_1} b^*_{\mathbf{k}_2}\,d\mathbf{k}_2\right) + \text{к. с.}\right].$$

Здесь $H_{\mathbf{v}}$ описывает рассеяние поверхностной волны на поле скорости $\mathbf{v}$;

$$R_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{i}{2\pi}\sqrt{k_1 k_2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{1/2}\int [u^*_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) - u_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)]\,d\mathbf{k};$$

$$u_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{x}\,e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\int\limits_{-\infty}^{0} dz\,e^{kz}\,[i\mathbf{k}\mathbf{v}(\mathbf{x}, z, t) + kv_z(\mathbf{x}, z, t)].$$

Для функций P и Q могут быть получены аналогичные формулы, а формула для T есть в [5]. Уравнение движения для динамической переменной $f(b^*, b)$ имеет вид

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} = i\int d\mathbf{k}\left(\frac{\delta H}{\delta b_{\mathbf{k}}}\frac{\delta f}{\delta b^*_{\mathbf{k}}} - \frac{\delta H}{\delta b^*_{\mathbf{k}}}\frac{\delta f}{\delta b_{\mathbf{k}}}\right). \tag{3}$$

При статистическом описании волнения следует от (3) перейти к уравнениям для средних значений, которые получаются путем осреднения равенств типа (3) для последовательности все более усложняющихся комбинаций переменных. Замыкание этих уравнений с помощью расцепления средних приводит к кинетическим, из них наиболее интересно уравнение для величины $\langle b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}\rangle = M_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, связанной с амплитудным спектром поверхностного волнения, недиагональность ее по импульсу обусловлена наличием пространственно неоднородного поля скорости v. Осреднением (3) для $f = b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}$ получаем

$$(4) \qquad \frac{d}{dt} M_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \langle \{H, b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}\}\rangle = (\Omega_2 + R_2) M + T_2 S,$$

где $S_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}'_1\mathbf{k}'_2} = \left\langle b^*_{\mathbf{k}_1} b^*_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}'_1} b_{\mathbf{k}'_2}\right\rangle$, а операторы Ω_2, R_2 и T_2 порождены соответственно гамильтонианами H_2, H_v и H_4:

$$(\Omega_2 + R_2) M = i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) M_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + i \int d\mathbf{k}_1 \left(R_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}_1} - R_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'} M_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}\right),$$

$$T_2 S = i \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \,[T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} S_{\mathbf{k}'\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) -$$
$$- T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} S_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}\mathbf{k}_1} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)],$$

причем вклады членов с функциями P и Q, пропорциональными v^2, опущены. В (4) неизвестной является величина $T_2 S = \langle \{H_4, b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}\}\rangle$, для которой необходимо в свою очередь написать уравнение, аналогичное (4):

$$(5) \qquad \frac{d}{dt} T_2 S = \langle \{H, \{H_4, b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}\}\}\rangle = (\Omega_4 + R_4) T_2 S + T_4 T_2 Y,$$

$$Y_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}'_1\mathbf{k}'_2\mathbf{k}'_3} = \left\langle b^*_{\mathbf{k}_1} b^*_{\mathbf{k}_2} b^*_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}'_1} b_{\mathbf{k}'_2} b_{\mathbf{k}'_3}\right\rangle.$$

Решение уравнения (5) методом итераций с точностью до линейных по v членов дает

$$T_2 S = \left\langle \left(\frac{d}{dt} - \Omega_4\right)^{-1} \{H_4, \{H_4, b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}\}\} + \left(\frac{d}{dt} - \Omega_4\right)^{-1} \times\right.$$
$$\left.\times \left\{H_v, \left(\frac{d}{dt} - \Omega_4\right)^{-1} \{H_4, \{H_v, b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}\}\}\right\}\right\rangle =$$
$$= \left(\frac{d}{dt} - \Omega_4\right)^{-1} \left[1 + R_4 \left(\frac{d}{dt} - \Omega_4\right)^{-1}\right] T_4 T_2 Y.$$

Считая коррелятор Y медленно меняющейся функцией времени, запишем последнюю формулу в виде

$$(6) \qquad T_2 S = \left[1 + \left(\frac{d}{dt} - \Omega_4\right)^{-1} R_4\right] (-\Omega_4^{-1}) T_4 T_2 Y.$$

Подставим формулу (6) в равенство (4) и, следуя [1], расцепим Y на сумму трехлинейных по M членов. В результате получается кинетическое уравнение

$$(7) \qquad \frac{dM}{dt} = (\Omega_2 + R_2) M + (-\Omega_4^{-1}) T_4 T_2 Y + \left(\frac{d}{dt} - \Omega_4\right)^{-1} R_4 (-\Omega_4^{-1}) T_4 T_2 Y,$$

$$J_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4\mathbf{k}_5\mathbf{k}_6} = (M_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3} M_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_4} + M_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_4} M_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}) M_{\mathbf{k}_5\mathbf{k}_6},$$

в правой части которого второе слагаемое равно

$$(8) \qquad (-\Omega_4)^{-1} T_4 T_2 Y(M) = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}'_2 d\mathbf{k}'_3 \times$$
$$\times \left\{\frac{i}{\omega' + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - i0} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \times\right.$$
$$\times \left(T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}'_1\mathbf{k}'_2\mathbf{k}'_3} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_3) J_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_2\mathbf{k}'_3\mathbf{k}'_2\mathbf{k}'_1\mathbf{k}_1} +\right.$$

$$+ T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1'\mathbf{k}_2'\mathbf{k}_3'}\,\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_2' - \mathbf{k}_3')\, J_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_3'\mathbf{k}_2'\mathbf{k}_1'\mathbf{k}} -$$

$$- T_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1'\mathbf{k}_2'\mathbf{k}_3'}\,\delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_2' - \mathbf{k}_3')\, J^*_{\mathbf{k}'\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2'\mathbf{k}_3'\mathbf{k}_1'\mathbf{k}_3} -$$

$$- T_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1'\mathbf{k}_2'\mathbf{k}_3'}\,\delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_2' - \mathbf{k}_3')\, J^*_{\mathbf{k}'\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2'\mathbf{k}_3'\mathbf{k}_1'\mathbf{k}_2}\Big)\Big\} + \text{к. с.},$$

где через к. с. обозначены члены, получаемые из выписанных в фигурных скобках путем комплексного сопряжения и замены индексов $\mathbf{k} \rightleftarrows \mathbf{k}'$. В отсутствие поля $\mathbf{v}$ имеет место стационарное распределение с не зависящим от времени средним значением $M_{\mathbf{kk}'} \to N_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. В этом случае группировка слагаемых при произведениях функций T с одинаковыми индексами приводит к δ-функции по частотам, обеспечивая превращение (8) в интеграл столкновений [1, 2]. Структура последнего слагаемого в правой части (7) сходна со структурой предыдущего, но явный вид его не выписан ввиду громоздкости. Первое отличие этого слагаемого от (8) заключается в появлении интегрального оператора с ядром $R_{\mathbf{kk}'}$, действующего поочередно на каждую из функций T и Y с учетом симметризации по аргументам этих функций. Второе отличие состоит в появлении интеграла по времени от R, вычисляемого в пределах $-\infty < \tau' \leqslant t$.

Можно привести качественную оценку влияния возмущения поверхностного волнения полем скорости $\mathbf{v}$ в случае конечного времени t_0 этого действия. В правой части формулы (7) слагаемое R_2M равно нулю при $t > t_0$, а слагаемое (8) принимает вид интеграла столкновений [1, 2] при $t \gg t_0$, последнее содержит члены вида

$$\int d\mathbf{k}_{1\ldots 6} J \int\limits_{-\infty}^{t_0} d\tau R_4(\tau) \exp i\left[(t - \tau)\sum_{n=1}^{4} \omega_n\right] \Phi, \tag{9}$$

где Φ — сумма билинейных комбинаций матричных элементов и четырехкратный интеграл по импульсам волнового поля, оцененный при $t/\tau_0 \to \infty$, дает для (9) асимптотику $(\tau_0/t)^8$. Характеристическая постоянная τ_0 представляет собой наибольшее значение подынтегральной функции (9) в граничных точках $\mathbf{k}_{1,2}$ инерционного интервала волновых чисел $\mathbf{k}_1 \leqslant \mathbf{k} \leqslant \mathbf{k}_2$. В общем случае последнее слагаемое правой части (7) описывает взаимодействие четырех поверхностных волн с фурье-компонентой поля $\mathbf{v}$, наиболее эффективное при резонансе между ними. Это слагаемое, дополнительное к интегралу столкновений [1, 2], моделирует нелинейный механизм нелокального по времени отклика системы поверхностных волн на нестационарное неоднородное возмущение. Заметим, что если масштаб однородности течения значительно превышает длину волны, то влияние его можно учесть переходом в движущуюся систему координат [6]. В таком приближении не удается учитывать поправки к δ-коррелированности $M_{\mathbf{kk}'}$, которые могут быть существенны при $\mathbf{k} \simeq \mathbf{k}'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Захаров В. Е.** Гамильтоновый формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика.— 1974.— Т. 17, № 4.
2. **Захаров В. Е., Заславский М. М.** Кинетическое уравнение и колмогоровские спектры в слаботурбулентной теории ветровых волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1982.— Т. 18, № 9.
3. **Кац А. В., Канторович В. М.** Дрейфовые стационарные решения в теории слабой турбулентности // Письма в ЖЭТФ.— 1971.— Т. 14, вып. 6.
4. **Раевский М. А.** О распространении гравитационных волн на случайно-неоднородных нестационарных течениях // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1983.— Т. 19, № 6.
5. **Захаров В. Е.** Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ.— 1968.— № 2.
6. **Басович А. Я.** Трансформация спектра поверхностного волнения под действием внутренней волны // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1979.— Т. 15, № 6.

Поступила 24/III 1986 г.