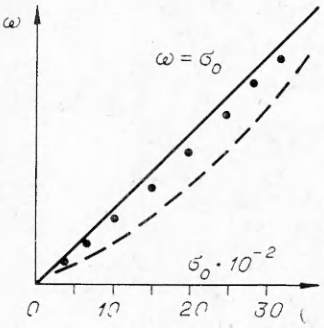
их роста будет максимальной. Численные расчеты по уравнению (9) для определения таких возмущений показаны штриховой кривой на фиг. 2 (сплошная линия отделяет область неустойчивости ($\omega < \sigma_0$) от области устойчивости); точками показано положение границы области неустойчивости, полученное совместным численным решением систем (8), (9), т. е. с учетом изменения по времени коэффициентов T_0, σ_0 в уравнении (9).



Фиг. 2

Полученные результаты показывают, что с увеличением скорости деформирования (или уменьшением температуры) расстояние между плоскостями локализации деформации уменьшается (что соответствует опытным данным).

Существенно, что полученные выводы носят качественный принципиальный характер и справедливы только для больших скоростей деформации. В частности, вывод о существовании неустойчивых возмущений при любых малых скоростях деформирования не является физическим, так как в этом случае требуется иная модель среды.

Кроме того, в общем случае требуется решать краевую задачу, что может внести существенные изменения. Полученные здесь выводы могут быть справедливыми только для областей, характерный размер в которых существенно больше характерного размера неустойчивых возмущений

Поступила 19 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рехт Р. Ф.** Разрушающий термопластический сдвиг.—«Труды Амер. об-ва инж.-механиков. Прикладная механика», 1964, № 2, с. 34—39.
2. **Браун А. Ф.** Поверхностные явления при пластической деформации металлов.—«Усп. физ. наук», 1957, т. 62, № 3, с. 305—357.

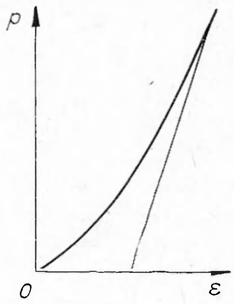
УДК 539.374 : 534.231 .1

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Н. Мамадалиев, Ш. Маматкулов

(*Москва, Ташкент*)

Приводятся аналитические решения задач о распространении одномерной и двумерной стационарной ударной волны в идеальной нелинейно-сжимаемой среде при воздействии интенсивных кратковременных нагрузок в виде взрывного импульса. Рассматриваются одномерные нестационарные задачи о плоском и сферическом слое, а в двумерной постановке решается задача о воздействии подвижной нагрузки на полуплоскость неупругой среды в случае, когда скорость D движущейся вдоль ее границы нагрузки превышает скорость распространения ударной волны в материале полуплоскости. Во всех задачах предполагается, что среда на фронте мгновенно нагружается нелинейным образом, а за фронтом в возмущенной области происходит линейная необратимая нагрузка (фиг. 1). Такая постановка задач позволяет решить их обратным способом, т. е. задаться определенной формой (скоростью) поверхности фронта ударной волны и определить на границе слоя или полуплоскости соответствующий профиль нагрузки. В этом случае движение среды в области разгрузки описывается волновым уравнением относительно двух переменных, для него формулируется задача Коши, решение которой, как известно [1], существует и единственно. На конкретном примере рассмотрен случай, когда уравнение поверхности фронта волны задано в виде полинома второй степени относительно ξ и результаты расчетов сопоставлены с результатами, полученными на основе метода характеристик [2], которые дали удовлетворительное совпадение всех параметров среды.



Фиг. 1

Случай линейного нагружения и разгрузки среды для двумерной задачи рассмотрен в работах [3, 4]. Решение задачи о распространении сходящейся сферической и цилиндрической ударной волны в идеальной неупругой среде, обладающей жесткой разгрузкой, приводится в [5]. Рассматриваемые задачи могут иметь практические приложения при изучении интенсивных воздействий в водонасыщенных грунтах, а также в водоемах.

1. Распространение одномерной плоской и сферической ударной волны в нелинейно-сжимаемой среде. Пусть на границе слоя приложена монотонно убывающая нагрузка $p_0(t)$. Тогда в среде будет распространяться ударная волна с фронтом $r = R(t)$, за которым происходит разгрузка. В этом случае для возмущенной области имеем уравнения движения, неразрывности и состояния в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu u}{r}\right) = 0, \tag{1.1}$$

$$p(r, t) = p^* + E(\varepsilon - \varepsilon^*),$$

где $\varepsilon = 1 - \frac{\rho_0}{\rho}$; $E = c_p^2\rho$.

На фронте $r = R(t)$ имеем соотношения вида

$$u^*(t) = \varepsilon^*\dot{R}, \quad p^* = \rho^*\varepsilon^*\dot{R}^2, \quad p^*(t) = \alpha_1\varepsilon^* + \alpha_2\varepsilon^{*2} \quad (\dot{R} = dR/dt). \tag{1.2}$$

К системе (1.1), (1.2) следует добавить граничное условие при $r = R_0$

$$p = p_0(t). \tag{1.3}$$

Здесь u — массовая скорость; ρ — плотность; p — давление; ε — объемная деформация; $\nu = 0$; 2 относятся соответственно к плоскому и сферическому слою; параметры среды, относящиеся к фронту, обозначены сверху звездочкой.

В случае плоской одномерной волны, т. е. при $\nu = 0$, из системы (1.1) можно получить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0, \tag{1.4}$$

имеющее решение вида

$$u(r, t) = f_1(r - c_p t) + f_2(r + c_p t), \tag{1.5}$$

где неизвестные функции $f_i(\xi)$ $(i = 1, 2)$ определяются из граничного условия (1.3) с учетом (1.2). Как сказано выше, для решения этой задачи применяется обратный метод, т. е. считается заданным закон распространения ударной волны $r = R(t)$. Тогда все параметры среды, в том числе $u^*(t)$ и $\varepsilon^*(t)$ на фронте Σ с учетом (1.2), являются известными и имеют вид

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{2} - \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2}{4} - \frac{\rho_0 \dot{R}^2 - \alpha_1}{\alpha_2}}, \tag{1.6}$$

$$u^*(t) = \dot{R}(t)\varepsilon^*(t).$$

Таким образом, для волнового уравнения (1.4) в секторе $BA\Sigma$ (фиг. 2) получаем видоизмененную задачу Коши с заданными параметрами (1.6) на кривой $A\Sigma$, в которой первое равенство как бы заменяет условие для градиента скорости $u^*(t)$. Тогда из (1.6) с учетом (1.1), (1.5) для нахождения f_1' и f_2' имеют место формулы

$$f_1'[R(t) - c_p t] = -\frac{\ddot{R}}{2c_p}\left[\Delta_1(t) + \frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2} c_p \dot{R}}{\Delta_2(t)}\right], \tag{1.7}$$

$$f_2'[R(t) + c_p t] = \frac{\ddot{R}}{2c_p}\left[\Delta_1(t) - \frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2} c_p \dot{R}}{\Delta_2(t)}\right],$$

где

$$\Delta_1(t) = \frac{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{2} - \Delta_2(t);$$

$$\Delta_2(t) = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2}{4} - \frac{\rho_0 \dot{R}^2 - \alpha_1}{\alpha_2}}.$$

Теперь с учетом (1.7), подставляя (1.5) в первое уравнение (1.1) и интегрируя по r от $r = R_0$ до $r = R(t)$ для определения нагрузки $p_0(t)$, получим

$$p_0(t) = p^*(t) + \frac{\rho_0}{2}\left\{\int_{R_0}^{R(t)} \ddot{R}[F(z_1)]\left[\Delta_1(F(z_1)) + \frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2} c_p \dot{R}(F(z_1))}{\Delta_2(F(z_1))}\right] dr + \right.$$

$$\left. + \int_{R_0}^{R(t)} \ddot{R}[F(z_2)]\left[\Delta_1(F(z_2)) - \frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2} c_p \dot{R}(F(z_2))}{\Delta_2(F(z_2))}\right] dr\right\},$$

где $z_{1,2} = r \mp c_p t$; $F(z_{1,2})$ — корень уравнения $R(t) \mp c_p t = z_{1,2}$ относительно времени t.

В случае сферической волны, т. е. при $\nu = 2$, из (1.1) имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2c_p^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) = 0,$$

которое допускает решение вида

$$u(r, t) = \frac{\psi'(r - c_p t) + \Phi'(r + c_p t)}{r} - \frac{\psi(r - c_p t) + \Phi(r + c_p t)}{r^2}, \tag{1.8}$$

где штрих сверху означает производную по аргументу.

После некоторых преобразований из (1.6) с учетом (1.8) для нахождения $\psi''(z_1)$ и $\Phi''(z_2)$ получим

$$\psi''(z_1) = \psi''(R_0) + \int_{R_0}^{z_1} \Phi(\xi_1)\, d\xi_1,$$

$$\Phi''(z_2) = -\psi''[R(F(z_2)) - c_p F(z_2)] + 2\dot{R}(F(z_2))\,\Delta_1(z_2) - \tag{1.9}$$
$$- \frac{\rho_0}{\alpha_2} \frac{\dot{R}(F(z_2))\,\ddot{R}(F(z_2))}{\Delta_2(z_2)},$$

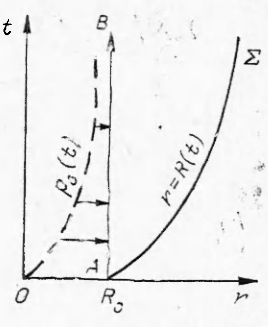
где

$$\Phi(z_1) = -\frac{\dot{R}^3(F(z_1))\,\Delta_1(F(z_1))}{2c_p R(\dot{R} - c_p)}\left[1 + \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}\left(6 + \frac{R\dot{\ddot{R}}}{\dot{R}\,\ddot{R}}\right)\right] -$$
$$- \frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2}\dot{R}^3\ddot{R}}{2c_p(\dot{R} - c_p)\,\Delta_2(F(z_1))}\left[2 + \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} - \frac{c_p(\dot{R} + c_p)}{\dot{R}^2}\right] -$$
$$- \frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2} R\dot{R}\ddot{R}^2}{2c_p(\dot{R} - c_p)\,\Delta_2^2(F(z_1))}\left\{\Delta_2^2(F(z_1))\left[2 + \frac{(2\dot{R} + c_p)}{\dot{R}}\left(1 + 2\frac{\dot{R}^2}{R\ddot{R}} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{\dot{R}\dddot{R}}{\ddot{R}^2}\right)\right] + \frac{\rho_0}{\alpha_2}\dot{R}(2\dot{R} + c_p)\right\};$$

$\psi'(R_0)$, $\psi''(R_0)$, $\Phi'(R_0)$ определяются из условий (1.2) при $t \to 0$.

Получение формулы для нагрузки $p_0(t)$ в случае сферической волны с учетом (1.9) аналогично случаю плоской волны.

2. О распространении двумерной волны в нелинейно-сжимаемой среде. Рассматривается плоская задача о движении со сверхзвуковой скоростью D монотонно убывающей нагрузки по границе полуплоскости, материал которой моделируется идеальной средой, обладающей нелинейным и пластическим свойством (см. фиг. 1). Тогда в полуплоскости будет распространяться ударная волна с криволинейной поверхностью Σ_p, по предположению среда на ней мгновенно нагружается, а за фронтом происходит разгрузка. В этом случае на поверхности Σ_p из условия сохранения массы и импульса получим



Фиг. 2

$$\rho_0 a = \rho^* \left(a - \overset{*}{v}_n\right), \quad \rho_0 a \overset{*}{v}_n = p^*, \quad \overset{*}{v}_\tau = 0 \quad (a = D \sin\alpha). \tag{2.1}$$

Так как профиль нагрузки по мере распространения волны считается неменяющимся, то задача является стационарной и в области разгрузки в подвижной системе координат $\xi = Dt + x$, $\eta = y$ имеем уравнения

$$D\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad D\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \tag{2.2}$$

$$D\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Граничное условие имеет вид

$$\text{при } \eta = 0, \ \xi \geqslant 0 \ p = f(\xi), \tag{2.3}$$

где $f(\xi)$ — известная монотонно убывающая функция; $\overset{*}{v}_\tau$, $\overset{*}{v}_n$ — касательная и нормальная составляющие скорости среды к фронту Σ_p; u, v — проекции скорости на оси ξ и η; α — угол наклона фронта Σ_p к границе полуплоскости.

Для получения решения задачи подставим первое уравнение (2.2) в третье. Тогда для потенциала скорости φ получаем волновое уравнение

$$\mu^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 \quad \left(\mu^2 = \frac{D^2}{c_p^2} - 1\right), \tag{2.4}$$

которое при $D > c_p$ имеет решение вида

$$\varphi(\xi, \eta) = f_3(\xi - \mu\eta) + f_4(\xi + \mu\eta).$$

Если задаться определенной формой Σ_p, то составляющие скорости среды u, v при $\eta = \eta(\xi)$ с учетом (2.1) представляются в виде

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -D \sin^2\alpha(\xi)\left[\frac{\rho_0 D^2}{\alpha_2}\sin^2\alpha(\xi) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right], \tag{2.5}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = D \sin\alpha(\xi)\cos\alpha(\xi)\left[\frac{\rho_0 D^2}{\alpha_2}\sin^2\alpha(\xi) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right],$$

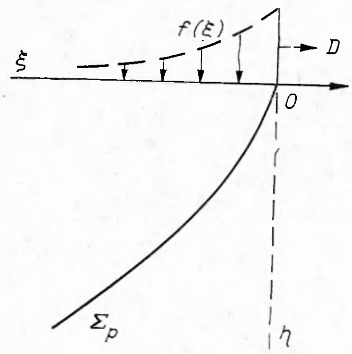
где $\eta(\xi)$ — уравнение поверхности фронта Σ_p. Значит, в случае двумерной волны внутри криволинейного сектора $\xi O \Sigma_p$ (фиг. 3) для (2.4) с учетом (2.5) так же, как в п. 1, получаем задачу Коши и для определения $f_i(z_i)$ имеем формулы

$$f_i(z_i) = \mp \frac{D}{2\mu}\int_0^{z_i} \frac{\operatorname{tg}\alpha[F_i(z_i)]\{1 \pm \mu \operatorname{tg}\alpha[F_i(z_i)]\}\Phi_i(z_i)}{\{1 + \operatorname{tg}^2\alpha[F_i(z_i)]\}^2}\,dz_i, \tag{2.6}$$

где

$$\Phi_i(z_i) = \left(\frac{\rho_0 D^2}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\operatorname{tg}^2\alpha[F_i(z_i)] - \frac{\alpha_1}{\alpha_2};$$

$F_i(z_i)$ ($i = 3, 4$) — корень уравнения $\xi + \mu\eta(\xi) = z_i$ относительно ξ, причем в случае $i = 3$ в (2.6) принимается верхний знак. Отметим, что в обратной постановке задачи, т. е. при заданной поверхности фронта ударной волны, условие (2.3) служит формулой для определения профиля нагрузки $f(\xi)$.



Фиг. 3

Таким образом, с учетом (2.5), (2.6) получено решение задачи о распространении двумерной нелинейной волны в полуплоскости. Если подставить это решение в (2.3), то в принципе должны получить убывающий профиль нагрузки с резким фронтом в начале координат и в возмущенной области должен осуществляться процесс разгрузки среды.

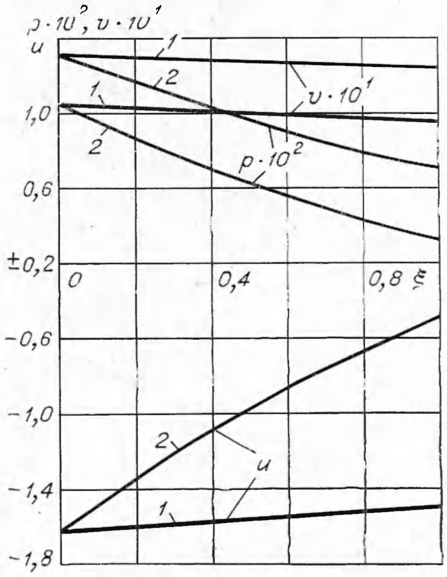
Анализ получаемых формул скорости и давления, а также результаты расчетов показывают, что процесса разгрузки можно достичь, если скорость фронта волны будет затухать с глубиной полуплоскости.

Отметим, что аналогичный обратный метод применен в задаче о волне разгрузки [6].

В качестве иллюстрации метода рассмотрен случай, когда Σ_p задана в виде полинома второй степени, т. е.

$$\eta(\xi) = \operatorname{tg}\alpha_0\,\xi - \frac{b}{2}\xi^2. \tag{2.7}$$

Результаты расчетов аналитического метода с учетом (2.7) при $\operatorname{tg}\alpha_0 = 0{,}1255$, $b = 0{,}86\cdot 10^{-3}$ и метода характеристик [2] представлены в таблице, где I — численный метод характеристик, II — аналитический метод. На фиг. 4 приводятся кривые изменения давления и скорости вдоль фронта Σ_p полуплоскости для случаев $b = 0{,}86\cdot 10^{-3}$; $0{,}86\cdot 10^{-2}$ (кривые *1*, *2* соответственно). Из таблицы видно, что результаты, полученные при помощи обоих способов, согласуются взаимно удовлетворительно и найденный обратным методом профиль нагрузки $f(\xi)$ является монотонно убывающим вдоль ξ. Из фиг. 4 заметно, что давление p^* и компоненты скорости u^*, v^* вдоль фронта Σ_p убывают с глубиной полуплоскости по линейному закону, причем в случае $b = 0{,}86\cdot 10^{-2}$ спад вышеуказанных величин становится более интенсивным, чем при $b = 0{,}86\cdot 10^{-3}$. Расчеты показывают, что все параметры среды, в том числе давление при $\eta = 0$ вдоль ξ (на границе полуплоскости), падают в зависимости от значений коэффициента b различным образом. В случае $b = 0{,}86\cdot 10^{-2}$ этот процесс получается более интенсивным и нелинейным. Значит, если скорость фронта волны с глубиной полуплоскости затухает сравнительно быстро, то параметры среды, в частности давление, вдоль границы полуплоскости убывают также интенсивно. Но процесс затухания параметров среды вдоль границы $\eta = 0$ происходит быстрее, чем на фронте.



Фиг. 4

В целом в данной работе приводится обратный аналитический метод решения одномерной и двумерной

ξ	u		v		p	
	I	II	I	II	I	II
0	—1,644	—1,644	13,100	13,100	105	105
0,1	—1,628	—1,628	13,025	13,020	103,956	103,937
0,2	—1,610	—1,613	12,944	12,940	102,921	102,979
0,3	—1,597	—1,597	12,861	12,860	101,896	101,958
0,4	—1,581	—1,581	12,780	12,780	100,882	100,937
0,5	—1,565	—1,566	12,699	12,700	99,880	99,978
0,6	—1,550	—1,551	12,621	12,620	98,888	99,021
0,7	—1,535	—1,535	12,543	12,540	97,904	98,000
0,8	—1,519	—1,520	12,466	12,470	96,928	97,042
0,9	—1,505	—1,505	12,390	12,390	95,966	96,085
1,0	—1,490	—1,490	12,314	12,320	95,009	95,127

стационарной задачи при кратковременных интенсивных воздействиях с учетом нелинейного пластического деформирования идеальной неупругой среды. В случае $\alpha_2 = 0$ результаты п. 2 совпадают с результатами [4], полученными на основе применения преобразования Меллина.

Поступила 1 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Михлин С. Г.** Курс математической физики. М., «Наука», 1968.
2. **Рахматулин Х. А., Мамадалиев Н.** Распространение нелинейных волн в грунтовом полупространстве, вызванных бегущей по его границе нагрузкой.— В кн.: Труды симпозиума «Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах». Таллин — Горький, 1973.
3. **Скобеев А. М., Флитман Л. М.** Подвижная нагрузка на неупругой полуплоскости.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 1, с. 189—192.
4. **Капустянский С. М.** Распространение и отражение двумерных пластических волн.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1973, № 1, с. 60—68.
5. **Симонов И. В.** О сходящейся ударной волне в идеально неупругой среде и устойчивости кумуляции.— ПМТФ, 1975, № 5, с. 82—92.
6. **Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.** Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.

УДК 534.222.22

О ПОСТРОЕНИИ УПРУГИХ СКАЧКОВ НА ПРОФИЛЕ УДАРНЫХ ВОЛН ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

Н. С. Козин

(Красноярск)

В работе [1] исследована структура ударных волн в упруговязкой среде, характеризуемой временем τ релаксации касательных напряжений и уравнением упругой энергии среды специального вида. В работе [2] сформулированы ограничения типа неравенств для упругой энергии, которые являются достаточ-