О ТЕЧЕНИЯХ В КЛИНЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

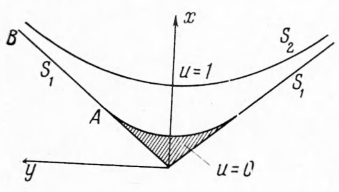
А. Д. Чернышов (Воронеж)

Изучению свойств вязко-пластической среды посвящены многочисленные исследования, из которых отметим [1-5].

Рассматривается задача о вязко-пластическом течении без перепада давления среды с нелинейной вязкостью при чистом сдвиге в области, клинообразной в плане, а также течение под действием перепада давления, когда одна из граней клина движется параллельно ребру.

1. Рассмотрим течение изотропной вязко-пластической среды с нелинейной вязкостью между двумя бесконечно длинными жесткими цилиндрами (фиг. 1). Поперечное сечение контура одного из цилиндров S_1 имеет клинообразную форму, поперечное сечение второго цилиндра S_2 имеет форму гладкой незамкнутой кривой, асимптотически приближающейся к контуру S_1 на бесконечности. Оба цилиндра имеют параллельные образующие. Первый цилиндр неподвижный, второй движется с постоянной скоростью u_0 параллельно образующим.

Пусть ось z направлена вдоль образующей цилиндров в сторону движения второго. Оси x и y расположим в плоскости сечения первого цилиндра. Скорость u (x, y) каждой частицы среды направлена вдоль оси z.



Фиг. 1

Нелинейную связь между касательным напряжением τ и скоростью сдвига γ возьмем в виде

$$\eta\gamma = (\tau - k)^{\mu} \qquad (\mu > 0) \tag{1.1}$$

где k — предел текучести, η, μ — коэффициент и показатель вязкости. Сохраняя прежние обозначения, перейдем к безразмерным величинам. Отнесем скорость u (x, y) к величине u_0, напряжение τ — к пределу текучести k, величины, имеющие размерность длины,— к величине k^{μ} / η. Соотношение (1.1) в безразмерной форме запишется в виде

$$\gamma = (\tau - 1)^{\mu} \tag{1.2}$$

Следуя идеям работы [2], от плоскости xy перейдем к ортогональной сетке координат u и v, образованной линиями равной скорости $u = \text{const}$ и линиями напряжений $v = \text{const}$, к которым вектор τ направлен по касательной.

Уравнение для функции u (τ, φ) имеет вид

$$\frac{\gamma\tau}{\gamma'}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{2\gamma - \tau\gamma'}{\gamma'}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad \gamma' = \frac{d\gamma}{d\tau} \tag{1.3}$$

Граничные условия

$$u = 0 \text{ на } S_1, \qquad u = 1 \text{ на } S_2, \qquad u = 0 \text{ при } \tau = 1 \tag{1.4}$$

Решение уравнения (1.3) с граничными условиями (1.4) будем искать в виде

$$u = T(\tau) \cos \lambda\varphi \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.3) и удовлетворяя второму из условий (1.4), получим

$$u(\tau, \varphi) = A_n (\tau - 1)^{1+\mu} \Phi_n \cos \lambda_n \varphi \tag{1.6}$$

где λ_n — собственные значения задачи, Φ_n $(2 - \alpha_n,\ 2 - \beta_n,\ 2 + \mu,\ 1 - \tau)$ — гипергеометрическая функция

$$\alpha_n = {}^1/_2 (1 - \mu) + [{}^1/_4(1 - \mu)^2 + \mu\lambda_n^2]^{1/2}, \quad \beta_n = {}^1/_2 (1 - \mu) - [{}^1/_4(1 - \mu)^2 + \mu\lambda_n^2]^{1/2} \tag{1.7}$$

Обозначим через ω угол раствора контура S_1. Если положить

$$\lambda_n = \frac{(2n + 1)\pi}{\pi - \omega} \tag{1.8}$$

то решение (1.6) будет удовлетворять первому и второму из граничных условий (1.4). Суммируя частные решения (1.5), получим общее решение

$$u = \sum_{n=1}^{m} A_n (\tau - 1)^{1+\mu} \Phi_n \cos \lambda_n \varphi \tag{1.9}$$

Третье из условий (1.4) будем использовать в качестве уравнения для определения подвижного контура S_2.

Вычисляя производные $\partial x/\partial\varphi$, $\partial x/\partial\tau$, $\partial y/\partial\varphi$ и $\partial y/\partial\tau$, найдем зависимости

$$x = x(\tau, \varphi) = \sum_{n=1}^{m} A_n (K_n \cos\varphi \cos\lambda_n\varphi + L_n \sin\varphi \sin\lambda_n\varphi)$$
$$y = y(\tau, \varphi) = \sum_{n=1}^{m} A_n (K_n \sin\varphi \cos\lambda_n\varphi - L_n \cos\varphi \sin\lambda_n\varphi) \tag{1.10}$$

$$K_n = \frac{\mu(\mu+1)}{(1-\alpha_n)(1-\beta_n)}(1-\Phi_n^*) - (1-\tau)\Phi_n + \frac{\mu+1}{\lambda_n^2-1} \tag{1.11}$$

$$L_n = \lambda_n [K_n + (1-\tau)\Phi_n]$$

Здесь A_n — произвольная постоянная, $\Phi_n^*(1-\alpha_n, 1-\beta_n, 1+\mu, 1-\tau)$ — гипергеометрическая функция. Уравнение для контура жесткого ядра $x_1(\varphi)$, $y_1(\varphi)$ получим из (1.10), положив $\tau = 1$ в этих выражениях

$$x_1(\varphi) = \sum_{n=1}^{m} A_n K_n(1)(\cos\varphi \cos\lambda_n\varphi + \lambda_n \sin\varphi \sin\lambda_n\varphi)$$
$$y_1(\varphi) = \sum_{n=1}^{m} A_n K_n(1)(\sin\varphi \cos\lambda_n\varphi - \lambda_n \cos\varphi \sin\lambda_n\varphi) \tag{1.12}$$

Вектор напряжения τ ортогонален к контурам S_1 и S_2, поэтому на AB угол $\varphi = -{}^1/_2(\pi - \omega)$. Если в (1.10) положить $\varphi = -{}^1/_2(\pi-\omega)$, то получим $y = x \operatorname{tg} {}^1/_2\omega$, т. е. уравнение линии AB. Полагая $\varphi = {}^1/_2(\omega - \pi)$ и $\tau = 1$ в (1.10), найдем положение точки A сопряжения контура ядра с линией AB

$$x = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n A_n K_n(1) \cos\frac{\omega}{2}, \quad y = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n A_n K_n(1) \sin\frac{\omega}{2} \tag{1.13}$$

При $\varphi = 0$ из (1.12) найдем координаты точки пересечения контура ядра с осью x

$$x = \sum_{n=1}^{m} A_n \frac{\mu+1}{\lambda_n^2-1} \tag{1.14}$$

Очевидно, при $\varphi = -{}^1/_2(\pi-\omega)$ из (1.12) найдем те же самые значения координат точки A. Для нахождения координат точки A и из (1.10) и из (1.12) следует брать одно и то же значение угла φ, поэтому контур ядра и контур S_1 сопрягаются в точке A плавно, имея общую касательную. В этом также можно убедиться, подсчитав тангенс угла наклона касательной в точке A к линии (1.12)

$$\lambda_n = (2n+1), \; y_A = 0, \; x_A = \sum_{n=1}^{m} A_n \frac{\lambda_n(\mu+1)}{\lambda_n^2-1} \qquad (\omega \to 0)$$
$$\lambda_n \to \infty, \quad x_A = z_A = 0 \qquad (\omega \to \pi)$$

При увеличении угла ω до развернутого застойная зона уменьшается до нуля.

На основании (1.9) и (1.10) не трудно убедиться, что все линии $u = \mathrm{const}$ на бесконечности асимптотически приближаются к контуру S_1.

2. Рассмотрим течение вязко-пластической среды в клине под действием перепада давления $P(r, \varphi)$, когда одна из его граней неподвижна, а другая движется с постоянной скоростью u_0 параллельно ребру.

Предположим, что течение внутри клина описывается функцией $u = u(\varphi)$. Связь напряжение — скорость сдвига запишем в виде

$$\tau = k + F(\gamma) \tag{2.1}$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = P(r, \varphi) \tag{2.2}$$

и из (2.1) находим, что в рассматриваемом случае

$$P(r, \varphi) = \frac{u''}{r^2}\frac{dF}{d\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{r}u', \quad \tau = k + F\left(\frac{1}{r}u'\right) \tag{2.3}$$

т. е. значения скорости сдвига и касательного напряжения при подходе к вершине клина зависят от направления подхода.

Граничные условия для функции u запишем в виде

$$u = 0 \text{ при } \varphi = 0, \quad u = u_0 \text{ при } \varphi = \omega \tag{2.4}$$

При $P(r, \varphi) = 0$ из (2.3) и (2.4) получаем

$$u = \varphi u_0 / \omega \tag{2.5}$$

т. е. частицы среды, находящиеся на луче, проведенном из вершины клина, движутся с равными скоростями.

Для заданной зависимости $P(r, \varphi)$ из (2.3) и (2.4) находится зависимость $u = u(\varphi)$.

Подсчитаем усилие T, приложенное к части грани клина $[0, r]$

$$T = \int_0^r \tau dr = kr - u' \int_\gamma^\infty \frac{F(\gamma)}{\gamma^2} d\gamma \tag{2.6}$$

Так как усилие T — конечная величина, то интеграл (26) накладывает ограничение на выбор зависимости $F(\gamma)$. Таким образом, в местах, где γ велико, зависимость $F(\gamma)$ должна быть такой, чтобы усилие T было конечной величиной.

Если принять $F(\gamma) = \eta\gamma^m$, то нетрудно видеть из (2.6), что необходимо выполнение неравенства $m = 1$, т. е. в местах, где γ неограниченно возрастает, вязкость не может быть линейной.

Поступила 27 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Oldrou*l* J. G. Rectelinear plastic flow of a Bingham Solid. Proc., Cambridg Philos. Soc., 1948, vol. 44 p. 2.
2. Нейбер Г. Теория концентрации напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвига, для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации. Механика и обз. ин. период. лит. Сб. перев., 1961, № 4.
3. Знаменский В. А., Ивлев Д. Д. Об уравнениях вязко-пластического тела при кусочно-линейных потенциалах. Изв. АН СССР, 1963, № 6.
4. Мясников В. П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязко-пластической среды. ПМТФ, 1961, № 2.
5. Мирзаджанзаде А. Х. Некоторые вопросы вязко-пластических жидкостей в применении к нефтедобыче. Изд. Азнефть, Баку, 1959.

РЕЛАКСАЦИЯ ТРУБ И ВЫПУЧИВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

А. М. Локощенко, С. А. Шестериков

(Москва)

Исследуется поведение двух элементов конструкций из нелинейно-вязкого идеально-пластического материала.

Впервые эта схема была предложена Одквистом [1] и использована В. И. Розенблюмом [2]. Модель Одквиста нашла хорошее экспериментальное подтверждение в работе Гарднера и Миллера [3], которые явно наблюдали предел текучести (до определенного уровня напряжений имеется нелинейная зависимость между напряжениями и скоростями установившейся ползучести, а при достижении критического напряжения («предел ползучести») наблюдается течение при произвольных скоростях деформации).

В ряде случаев пренебрежение упругими деформациями приводит к слишком грубой оценке реального поведения элементов конструкций. Так, исследование процесса релаксации напряжений обязательно требует учета мгновенной упругости.

В первой части решается задача о релаксации напряжений в посаженной на жесткий вал трубе, материал которой подчиняется следующим условиям (фиг. 1, *а*, *б*). Всюду, где не достигнут предел текучести, имеют место упругие деформации; кроме того, при напряжениях, больших некоторого значения, развиваются деформации ползучести (установившейся пли неустановившейся ограниченной). Предел текучести — максимально допустимое для материала напряжение; в областях, где достигнут предел текучести, деформациями упругости и ползучести можно пренебречь по сравнению с пластическими деформациями.

Во второй части исследуется процесс выпучивания стержней в условиях нелинейной ползучести.