

УДК 532.51.013.4:536.25

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СЛОЕВ СЛАБОСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск
E-mails: andr@icm.krasn.ru, bekezhanova@mail.ru

Исследована конвективная устойчивость системы двух несмешивающихся жидкостей с близкими плотностями. Плотности жидкостей нелинейно зависят от температуры и давления. Показано, что состояние механического равновесия является неустойчивым. Построены нейтральные кривые и найдены критические значения числа Рэлея. В расчетах использовались значения физических параметров, характерные для различных зон озера Байкал: северной, центральной и южной.

Ключевые слова: неустойчивость, поверхность раздела, нейтральная кривая.

Введение. Одним из основных условий обновления глубинных вод является стратификация вод по температуре и плотности. Для глубоких водоемов (глубиной более 200 м) необходимо учитывать сжимаемость воды. Особенностью озера Байкал, помимо его глубин (максимальная глубина 1637 м, средняя глубина 730 м), является понижение температуры максимальной плотности по мере увеличения глубины. Этот эффект обуславливает мезотермический максимум температуры и является важным фактором при анализе процессов обмена в озере за счет плотностной стратификации [1].

Согласно экспериментальным данным [1, 2] профиль температуры воды в озере Байкал является нелинейным. В данной работе координата точки излома профиля температуры рассматривается как координата поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей. При этом нелинейный профиль температуры аппроксимируется двумя линейными функциями, являющимися точными решениями уравнения энергии в каждой из областей жидкости. Такая интерпретация поверхности раздела с учетом нелинейной зависимости плотности от температуры и давления с малыми коэффициентами теплового расширения и изотермической сжимаемости позволяет считать слои жидкостей слабосжимаемыми средами [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим гравитационную тепловую конвекцию в системе двух несмешивающихся жидкостей с общей границей раздела, ограниченных снизу твердой стенкой и сверху свободной поверхностью (рис. 1). Оси x и y находятся в плоскости нижней границы слоя, а ось z направлена вертикально вверх. Точка $z = 0$ соответствует нижней границе слоя (твердая стенка), $z = z_*$ — поверхности раздела, $z = l$ — свободной поверхности. Значение z_* определяется из экспериментальных данных [2] как точка излома в распределении температуры (для месяцев с мезотермическим распределением

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (грант № 15G262), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00836-а) и в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 2.15.

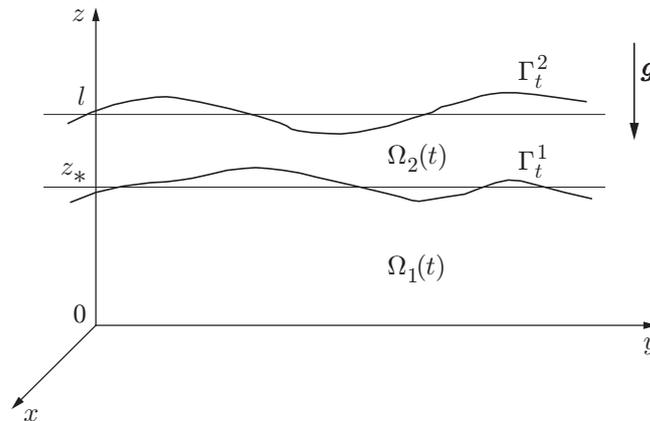


Рис. 1. Схема течения:

Γ_t^1 — поверхность раздела, Γ_t^2 — свободная поверхность

температуры z_* — точка мезотермического максимума). Поверхности Γ_t^1 и Γ_t^2 определяются уравнениями $f_{1,2}(\mathbf{x}, t) = 0$, где $\mathbf{x} = (x, y, z)$; в частности, для рассматриваемого ниже случая $f_1 = z - z_*$, $f_2 = z - l$. Выражение для плотностей ρ_j имеет вид

$$\rho_j = \rho_0(1 - \beta_j(\theta_j - \theta_{*j})^2). \quad (1)$$

Здесь индекс $j = 1$ соответствует нижнему слою жидкости, $j = 2$ — верхнему; ρ_0 — максимальное значение плотности, которое достигается при температуре θ_0 , называемой температурой инверсии или температурой аномалии теплового расширения жидкости; β_j — коэффициент теплового расширения; θ_j — температура; $\theta_{*j} = \theta_0(1 - \delta_0 p_j)$; p_j — давление; ρ_0 , θ_0 , δ_0 — постоянные положительные величины. Для воды характерное значение $\rho_0 = 999,972$ кг/м³, температура инверсии $\theta_0 = 3,98$ °С, $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ Па⁻¹.

Уравнение (1) является упрощенным вариантом уравнения состояния

$$\rho(\theta, p) = \rho_m(p)[1 - \varphi(p)(\theta - \theta_m(p))^2].$$

Вид функций $\rho_m(p)$, $\varphi(p)$, $\theta_m(p)$ и обоснование выбора такого уравнения состояния указаны в [4]. В (1) вместо функций $\rho_m(p)$ и $\theta_m(p)$ оставлены нулевые члены разложения в ряд Тейлора ρ_0 и θ_0 соответственно. Постоянная δ_0 определяется из выражения для $\theta_m(p)$. При заданных значениях физических параметров (для воды в озере Байкал) погрешность определения плотности по уравнению (1) составляет менее 1 %.

Рассматриваемое моделирование для озера Байкал означает, что вместо слоя однородной жидкости анализируется система двух разных жидкостей с близкими физическими характеристиками (температурой, плотностью и др.), соответствующими экспериментальным данным. Подход, применяемый в данной работе, позволяет учесть сезонные особенности устойчивости байкальских вод, обусловленные вертикальным распределением температуры [1].

В каждой области Ω_j справедлива система уравнений Обербека — Буссинеска

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_j &= 0, & \frac{\partial \theta_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla \theta_j &= \chi_j \Delta \theta_j, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \nabla \mathbf{v}_j \right) &= -\nabla p_j + \mu_j \Delta \mathbf{v}_j + \rho_j \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{v}_j = (u_j, v_j, w_j)$ — вектор скорости j -й жидкости; χ_j — температуропроводность; μ_j — вязкость; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$; g — ускорение свободного падения.

На твердой стенке задаются температура и условие прилипания:

$$\theta_1 = \Theta_1, \quad \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (3)$$

Граничные условия:

— на поверхности раздела Γ_t^1

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \mathcal{P}_1 \mathbf{n} = \mathcal{P}_2 \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = V_n^1, \quad k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{n}} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{при } z = z_*; \end{aligned} \quad (4)$$

— на свободной поверхности Γ_t^2

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} = V_n^2, \quad \mathcal{P}_2 \cdot \mathbf{n} + p_g \cdot \mathbf{n} = 0, \\ k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{n}} + b(\theta_2 - \theta_g) = Q \quad \text{при } z = l. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь \mathbf{n} — нормаль к поверхности Γ_t^j ; V_n^j — скорость Γ_t^j в направлении нормали; $\mathcal{P}_j = -p_j + 2\mu_j D_j$ — тензор напряжений в жидкости; D_j — тензор скоростей деформации векторного поля \mathbf{v}_j ; p_g — давление газа; k_j — теплопроводность жидкости; b — коэффициент межфазного теплообмена; θ_g — температура газа; Q — заданный поток тепла через свободную поверхность.

2. Равновесное состояние. В состоянии механического равновесия $\mathbf{v}_j^e = 0$ и производные по времени равны нулю: $\theta_{jt}^e = p_{jt}^e = 0$. Из уравнения энергии следует, что θ_j^e — линейные функции z вида

$$\theta_j^e(z) = A_j z + B_j, \quad (6)$$

где константы A_1 и B_1 определяются из граничных условий на поверхности раздела и твердой стенке соответственно:

$$A_1 = k_2 A_2 / k_1, \quad B_1 = \Theta_1,$$

а постоянные A_2 и B_2 находятся из условий на свободной поверхности и поверхности раздела соответственно:

$$A_2 = \frac{Q - bB_2 + b\theta_g}{k_2 + bl}, \quad B_2 = \frac{\Theta_1(k_2 + bl) + (Q + b\theta_g)z_*(k_2/k_1 - 1)}{k_2 + bl + bz_*(k_2/k_1 - 1)}.$$

Такое распределение температуры в слоях (рис. 2) хорошо согласуется с данными натурных наблюдений, проводимых на озере Байкал [2, 5]. (На рис. 2 Θ_b — температура

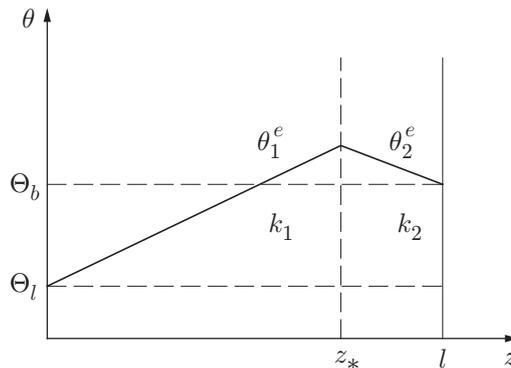


Рис. 2. Распределение равновесной температуры θ_j^e в слоях жидкости

свободной поверхности.) Сложный профиль температуры аппроксимируется двумя прямыми $\theta_1^e(z)$ и $\theta_2^e(z)$ в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Из уравнения импульса определяются давления p_1^e, p_2^e :

$$p_1^e = \frac{1}{\sqrt{|C_1|}} \frac{C_3 H(z) - 1}{C_3 H(z) + 1} - Dz - E - \rho_0 g z,$$

где

$$C_1 = \frac{C}{D}, \quad C = \rho_0 g \alpha \theta_0^2 \delta_0^2, \quad D = \frac{A_1 - \theta_0 \delta_0 \rho_0 g}{\theta_0 \delta_0}, \quad H(z) = \exp(2\sqrt{|C_1|}(Dz + E)),$$

$$E = \frac{B_1 - \theta_0}{\theta_0 \delta_0}, \quad C_3 = \frac{1 + \sqrt{|C_1|} G}{H(z_*)(1 - \sqrt{|C_1|} G)}, \quad G = p_2(z_*) + Dz_* + E + \rho_0 g z_*,$$

и

$$p_2^e = \frac{1}{\sqrt{|C_4|}} \frac{C_5 H_2(z) - 1}{C_5 H_2(z) + 1} - D_2 z - E_2 - \rho_0 g z,$$

где

$$C_4 = \frac{C_2}{D_2}, \quad C_2 = \rho_0 g \alpha \theta_0^2 \delta_0^2, \quad D_2 = \frac{A_2 - \theta_0 \delta_0 \rho_0 g}{\theta_0 \delta_0}, \quad H_2(z) = \exp(2\sqrt{|C_4|}(D_2 z + E_2)),$$

$$E_2 = \frac{B_2 - \theta_0}{\theta_0 \delta_0}, \quad C_5 = \frac{1 + \sqrt{|C_4|} G_2}{H_2(l)(1 - \sqrt{|C_4|} G_2)}, \quad G_2 = p_g + D_2 l + E_2 + \rho_0 g l.$$

Профили p_j^e выпуклы вниз и близки к линейным.

Итак, получено стационарное решение p_j^e, θ_j^e краевой задачи (2)–(5), соответствующее состоянию механического равновесия $\mathbf{v}_j^e = 0$.

3. Задача о малых возмущениях равновесия. Сформулируем задачу об устойчивости механического равновесия по отношению к малым возмущениям. Для этого введем определяющие безразмерные параметры. В качестве характерного масштаба длины выберем ширину l_* нижнего слоя, в качестве масштаба температуры — разность $\Theta = \theta_1 - \theta_0$, в качестве масштаба скорости — скорость конвективного всплытия нагретой частицы жидкости $v_* = \sqrt{g l_* \beta \Theta^2}$. Для плотности и давления используем масштабы ρ_0 и $\rho_0 v_*^2$ соответственно. Температуру будем отсчитывать от температуры нижней границы Θ_1 , а давление — от гидростатического давления.

Введем безразмерные переменные $\xi = (\xi, \eta, \zeta), \tau$, такие что

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = \xi l_*, \quad t = \frac{l_*}{v_*} \tau, \quad l_* = \frac{l}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{\Theta_1 - \Theta_b}{\Theta},$$

$$p_j = \rho_0 v_*^2 p'_j, \quad \mathbf{v}_j = v_* \mathbf{v}'_j, \quad \theta_j = \Theta \theta'_j.$$

Здесь λ — параметр инверсии; Θ_b — температура свободной поверхности, вычисляемая по формуле (6) с постоянными $A_2, B_2; p'_j, v'_j, \theta'_j$ — безразмерные функции давления, скорости и температуры соответственно.

В качестве масштабов для коэффициентов ν, χ, β и равновесных градиентов температуры A примем их средние арифметические значения

$$\nu_* = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \quad \chi_* = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}, \quad \beta_* = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \quad A_* = \frac{A_1 + A_2}{2}.$$

Задача (2)–(5) определяется следующими безразмерными параметрами: $\varepsilon = \beta \Theta^2$, $\varepsilon_T = (\theta_0 \delta_0 \rho_0 v_*^2) / \Theta$, $R = 2 / (\mu_* \delta_*)$ — число Рэлея, $\mu_* = \nu_* / (l_* v_*)$ — параметр кинематической вязкости (величина, обратная числу Рейнольдса), $\delta_* = \chi_* / (l_* v_*)$ — число Фурье.

Пусть $\mathbf{v}_{dj}(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \mathbf{v}_j(\boldsymbol{\xi}, \tau) + \delta_* \mathbf{V}_j(\boldsymbol{\xi}, \tau)$, $p_{dj}(\boldsymbol{\xi}, \tau) = p_j(\boldsymbol{\xi}, \tau) + \mu_* \delta_* P_j(\boldsymbol{\xi}, \tau)$, $\theta_{dj}(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \theta_j(\boldsymbol{\xi}, \tau) + T_j(\boldsymbol{\xi}, \tau)$, где $\mathbf{V}_j = (U_j, V_j, W_j)$, P_j, T_j — возмущения; $\mathbf{v}_j, p_j, \theta_j$ — основное решение. Вид функций $\mathbf{v}_d, p_d, \theta_d$, описывающих возмущенное движение, выбран для упрощения последующих преобразований. Линеаризуя полную задачу, для возмущений скорости, температуры и давления в каждой из жидкостей получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} U_{j\xi} + V_{j\eta} + W_{j\zeta} &= 0, & T_{j\tau} + \delta_* h_1 W_j &= \delta_* \Delta T_j, \\ U_{j\tau}/\mu_* &= -P_{j\xi} + \Delta U_j, & V_{j\tau}/\mu_* &= -P_{j\eta} + \Delta V_j, \end{aligned} \quad (7)$$

$$W_{j\tau}/\mu_* = -P_{j\zeta} + \Delta W_j + \text{R}(\theta_j - \gamma + \varepsilon_T p_j) T_j + 2(\theta_j - \gamma + \varepsilon_T p_j) \varepsilon_T P_j,$$

где $h_1 = A_* l_* / \Theta$; $\gamma = \theta_0 / \Theta$.

Граничные условия:

— на твердой стенке

$$\zeta = 0: \quad U_1 = V_1 = W_1 = 0, \quad T_1 = 0; \quad (8)$$

— на поверхности раздела

$$\begin{aligned} \zeta = 1: \quad U_1 = U_2, \quad V_1 = V_2, \quad W_1 = W_2, \quad T_1 = T_2, \quad T_{1\zeta} &= k T_{2\zeta}, \\ U_{1\zeta} + W_{1\xi} = U_{2\zeta} + W_{2\xi}, \quad V_{1\zeta} + W_{1\eta} = V_{2\zeta} + W_{2\eta} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$P_1 - P_2 + 2(\rho_2 - \rho_1)(\nu_2 - \nu_1)(W_{2\zeta} - W_{1\zeta}) = [p_{2\zeta} - p_{1\zeta} - (\rho_2 - \rho_1)/\varepsilon] R_1 R_2 / 2.$$

Здесь $k = k_2/k_1$, ρ_j, ν_j — безразмерные относительные значения теплопроводности, плотности и кинематической вязкости соответственно; $R_1 = R_1(\xi, \eta, \tau)$ — локальное отклонение поверхности раздела от ее невозмущенного состояния по нормали.

Условия на свободной границе имеют вид

$$\begin{aligned} \zeta = \lambda: \quad -R_{2\tau} + \delta_* W_2 = 0, \quad U_{2\zeta} + W_{2\xi} = 0, \quad V_{2\zeta} + W_{2\eta} = 0, \\ -\mu_* \delta_* P_2 + 2\mu_* \delta_* W_{2\zeta} = h_2 R_2, \quad \Theta_{2\zeta} + \text{Bi}(T_2 + h_1 R_2) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $h_2 = \partial p_2 / \partial \zeta$; $R_2 = R_2(\xi, \eta, \tau)$ — возмущение свободной границы; $\text{Bi} = b l_* / k_2$ — число Био.

Рассмотрим нормальные возмущения, пропорциональные $\exp[i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta - Ct)]$, где $C = C_r + iC_i$ — комплексный декремент; α_1, α_2 — волновые числа вдоль осей x и y соответственно. Для амплитуд нормальных возмущений получим спектральную краевую задачу, к которой применимо преобразование Сквайра $Z_j = i\alpha_1 U_j + i\alpha_2 V_j$. После преобразований система (7) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_j + W_j' &= 0, & -iCT_j + \delta_* h_1 W_j &= \delta_* (T_j'' - \alpha^2 T_j), \\ -iCZ_j/\mu_* &= \alpha^2 P_j + Z_j'' - \alpha^2 Z_j, \end{aligned} \quad (11)$$

$$-iCW_j/\mu_* = -P_j' + W_j'' - \alpha^2 W_j + \text{R}(\theta_j - \gamma + \varepsilon_T p_j) T_j + 2\varepsilon_T (\theta_j - \gamma + \varepsilon_T p_j) P_j$$

($\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ — модифицированное волновое число).

Граничные условия (8)–(10) принимают вид

$$\zeta = 0: \quad Z_1 = 0, \quad W_1 = 0, \quad T_1 = 0,$$

$$\zeta = 1: \quad Z_1 = Z_2, \quad W_1 = W_2, \quad T_1 = T_2, \quad R_1 = iW_1/C,$$

$$\begin{aligned}
P_1 - P_2 + 2(\rho_2 - \rho_1)(\nu_2 - \nu_1)(W'_2 - W'_1) &= [p'_2 - p'_1 - (\rho_2 - \rho_1)/\varepsilon]R_1R/2, \\
Z'_2 - \alpha^2 W_2 &= Z'_1 - \alpha^2 W_1, \quad T'_2 = kT'_1, \\
\zeta = \lambda: \quad -P_2 + 2W'_2 &= \frac{R}{2} h_2 \frac{i\delta_*}{C} W_2, \quad Z'_2 - \alpha^2 W_2 = 0, \quad T'_2 + \text{Bi} \left(T_2 + h_1 \frac{i\delta_*}{C} W_2 \right) = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Краевая задача (11), (12) является задачей на собственные значения относительно комплексного декремента C . Для устойчивости равновесного состояния p_j^e, θ_j^e по отношению к малым возмущениям заданного вида необходимо и достаточно, чтобы у всех собственных значений C мнимая часть C_i была отрицательной.

4. Асимптотика длинных волн. Неизвестные функции Z_j, W_j, P_j, T_j, C представим в следующем виде (при $\alpha \rightarrow 0$):

$$(Z_j, W_j, P_j, T_j, C) = (Z_{j0}, W_{j0}, P_{j0}, T_{j0}, C_0) + \alpha(Z_{j1}, W_{j1}, P_{j1}, T_{j1}, C_1) + \dots$$

После подстановки указанного разложения в систему (11) запишем полученные уравнения в нулевом приближении

$$Z''_{j0} = -iC_0 Z_{j0} / \mu_* \tag{13}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
Z_{10} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \quad Z'_{20} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \lambda, \\
Z_{10} = Z_{20}, \quad Z'_{10} = Z'_{20} \quad \text{при} \quad \zeta = 1.
\end{aligned} \tag{14}$$

Умножая каждое из уравнений (13) на комплексно-сопряженную величину Z_{j0}^* , интегрируя при $j = 1$ по отрезку $[0, 1]$, а при $j = 2$ — по отрезку $[1, \lambda]$ и складывая полученные уравнения, имеем

$$\int_0^1 |Z'_{10}|^2 d\zeta + \int_1^\lambda |Z'_{20}|^2 d\zeta = \frac{iC_0}{\mu_*} \left(\int_0^1 |Z_{10}|^2 d\zeta + \int_1^\lambda |Z_{20}|^2 d\zeta \right).$$

Отсюда следует, что $iC_0/\mu_* > 0$. Так как $\mu_* > 0$, то $iC_0 > 0$. Следовательно, $C_0 = iC_i$ — чисто мнимое число и $C_i < 0$. Это означает, что длинноволновые возмущения затухают монотонно.

Уточним вид C_0 . Обозначим $iC_0/\mu_* = \mu$. Тогда (13) можно записать в виде

$$Z''_{j0} + \mu Z_{j0} = 0.$$

Так как $\mu > 0$, то $Z_{j0} = c_{j1} \cos \sqrt{\mu} \zeta + c_{j2} \sin \sqrt{\mu} \zeta$. В последнем выражении постоянные c_{j1} и c_{j2} определяются из граничных условий (14). При этом $c_{11} = 0$, $\mu = (\pi n + \pi/2)^2 / \lambda^2$ (n — натуральное число) и

$$C_0 = -i\mu_*(\pi n + \pi/2)/\lambda^2. \tag{15}$$

5. Численное решение. Полученная спектральная задача (11), (12) решается методом ортогонализации [6]. Для нахождения собственного значения C необходимо знать начальное приближение C_0 , которое выбирается из условия (15).

Исследовалась устойчивость системы горизонтальных слоев слабосжимаемых жидкостей с общей поверхностью раздела при следующих значениях параметров: $\theta_g = 287$ К, $p_g = 101300$ Па, $\nu_* = 1,57 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\chi_* = 1,323 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\beta_1 = 8,41 \cdot 10^{-6}$ К⁻², $\beta_2 = 8,73 \cdot 10^{-6}$ К⁻², $k_1 = 0,556$ Вт/(м·К), $k_2 = 0,562$ Вт/(м·К). Данные значения соответствуют значениям параметров для воды в озере Байкал. При указанных значениях физических параметров найдена зависимость $C_i = \text{Im } C$ от волнового числа α .

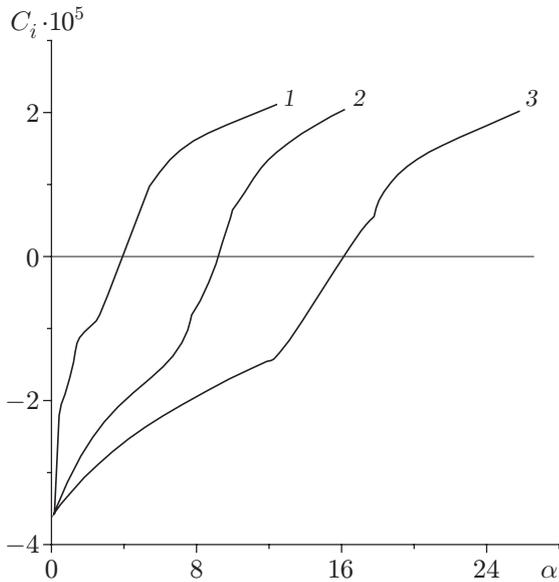


Рис. 3

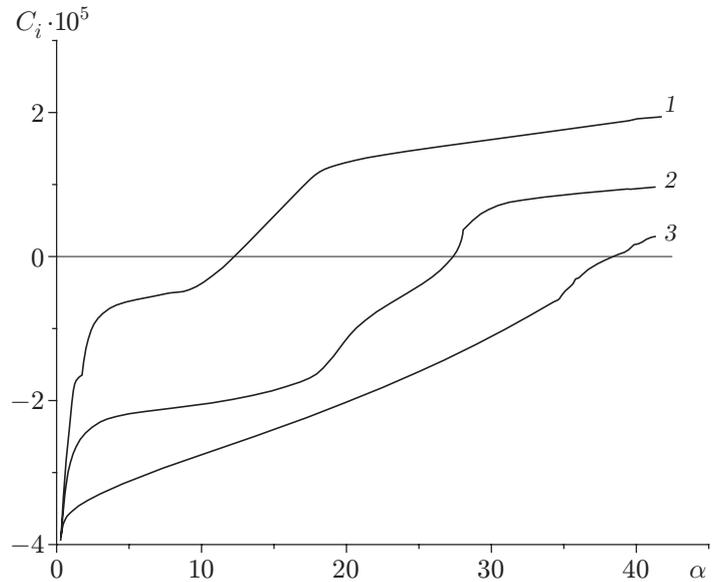


Рис. 4

Рис. 3. Комплексные декременты $C_i(\alpha)$, вычисленные для средних глубин:

1 — северная зона озера Байкал ($\alpha_* = 3,91$, $l_* = 339$ м, $Bi = 0,54$); 2 — южная зона ($\alpha_* = 9,01$, $l_* = 610$ м, $Bi = 0,76$); 3 — центральная зона ($\alpha_* = 16,6$, $l_* = 553$ м, $Bi = 0,98$)

Рис. 4. Комплексные декременты $C_i(\alpha)$, вычисленные для максимальных глубин:

1 — северная зона озера Байкал ($\alpha_* = 12,3$, $l_* = 765$ м, $Bi = 1,23$); 2 — южная зона ($\alpha_* = 26,94$, $l_* = 1243$ м, $Bi = 1,54$); 3 — центральная зона ($\alpha_* = 38,61$, $l_* = 1387$ м, $Bi = 2,47$)

Расчеты проводились для средних и максимальных глубин l южной, центральной и северной зон озера Байкал. При этом учитывались значения потоков тепла Q , характерных для данных зон. На рис. 3, 4 представлены зависимости $C_i(\alpha)$ соответственно для средних и максимальных глубин южной, центральной и северной зон озера Байкал (α_* — критические значения волнового числа). Средняя глубина l южной зоны составляет 810 м, центральной — 803 м, северной — 564 м. Максимальная глубина южной зоны озера Байкал составляет 1443 м, центральной — 1637 м, северной — 990 м. Полученным значениям α_* соответствуют следующие размерные значения критической длины волны $\lambda = 2\pi/\alpha_*$: для северной зоны озера Байкал $\lambda_1 = 544,5$ м для средних глубин, $\lambda_2 = 390,6$ м для максимальных глубин, для центральной зоны $\lambda_1 = 209,01$ м, $\lambda_2 = 225,6$ м, для южной зоны $\lambda_1 = 425,2$ м, $\lambda_2 = 289,76$ м. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о стабилизирующем влиянии теплообмена на устойчивость равновесия.

Проведены также расчеты для случая, когда коэффициенты теплового расширения β_1 и β_2 одинаковы. При этом отличие результатов от результатов, полученных в данной работе при $\beta_1 \neq \beta_2$, составило порядка 10^{-11} для значений $C_i(\alpha)$ и порядка 10^{-2} для значений $R(\alpha)$.

Граница устойчивости определяется из соотношения $C_i(R) = 0$. Случаю $C_i = 0$ соответствуют нейтральные возмущения. Полагая в задаче (11), (12) $C = 0$, получим нейтральные кривые устойчивости. При проведении расчетов изменялись значения числа Био, а значение l во всех случаях полагалось равным 1000 м. На рис. 5 представлена зависимость числа Рэлея от волнового числа (нейтральные кривые). Для различных значений числа Био указаны критические значения числа Рэлея R_* , которые являются минимальными

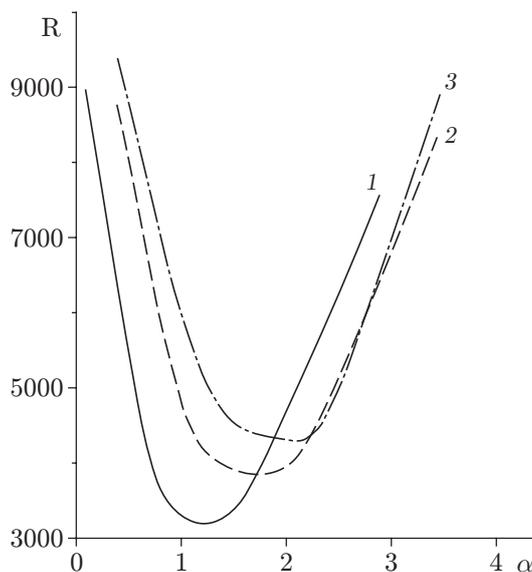


Рис. 5. Нейтральные кривые $R(\alpha)$:

1 — $Bi = 0,2$, $R_* = 3111,24$, $\alpha_* = 1,21$; 2 — $Bi = 1$, $R_* = 3771,2$, $\alpha_* = 1,8$; 3 — $Bi = 2$, $R_* = 4266,17$, $\alpha_* = 2,1$

ми значениями на соответствующих нейтральных кривых, и критические значения волнового числа α_* , при которых достигаются значения R_* . Видно, что при уменьшении числа Био критические значения числа Рэлея уменьшаются, а область неустойчивости смещается в область больших значений волнового числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шимараев М. Н., Гранин Н. Г. К вопросу о стратификации и механизме конвекции в Байкале // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 2. С. 381–385.
2. Physical limnology of lake Baikal: a review / M. N. Shimaraev, V. I. Verbolov, N. G. Granin, P. P. Sherstyankin. Irkutsk; Okayama: S. n., 1994.
3. Мосеенков В. Б. Качественные методы исследования задач конвекции вязкой слабосжимаемой жидкости. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998.
4. Бочаров О. Б., Васильев О. Ф., Овчинникова Т. Э. Приближенное уравнение состояния пресной воды вблизи температуры максимальной плотности // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35, № 4. С. 556–558.
5. Шимараев М. Н. Элементы теплового режима озера Байкал. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
6. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.

Поступила в редакцию 8/XI 2005 г.,
в окончательном варианте — 24/V 2006 г.