УДК 532.592

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Н. И. Макаренко, Ж. Л. Мальцева, А. А. Черевко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: makarenko@hydro.nsc.ru, maltseva@hydro.nsc.ru, cherevko@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача о внутренних волнах в двухслойной стратифицированной жидкости с плотностью, экспоненциально зависящей от глубины внутри слоев и имеющей скачок на поверхности раздела. Выведено уравнение второго длинноволнового приближения, описывающее уединенные волны. Исследованы спектральные свойства уравнений малых возмущений горизонтального кусочно-постоянного течения и охарактеризованы возможные механизмы возникновения сдвиговой неустойчивости расслоенного течения.

Ключевые слова: двухслойная жидкость, слабая стратификация, сдвиговая неустойчивость.

DOI: 10.15372/PMTF20220615

Введение. Модель двухслойной жидкости под крышкой является общепринятой математической моделью при исследовании внутренних волн в стратифицированной среде с резко выраженным пикноклином [1–3]. Длинноволновое приближение, описывающее уединенные волны в системе с постоянными плотностями в слоях, рассматривалось в работах [3–6]. Различные версии приближенных моделей, одновременно учитывающих скачок плотности на границе раздела и непрерывную стратификацию внутри слоев, предложены в работах [7–10]. В [7] такая гибридная гидродинамическая схема названа 2,5-слойной моделью. Уединенные волны в двухслойной жидкости с кусочно-постоянным профилем плотности и линейным сдвигом скорости внутри слоев рассматривались в работе [11], а влияние свободной границы на стационарные волновые структуры изучалось в [12–15]. В настоящей работе в рамках нелинейных уравнений Эйлера предлагается асимптотический вывод модели второго приближения теории мелкой воды с кусочно-экспоненциальной стратификацией. При выводе этой модели, включающей приближения [3–10] в качестве подмоделей, используется частичное разложение по малому параметру Буссинеска, характеризующему градиент плотности внутри слоев. Семейство приближенных подмоделей возникает в результате использования дополнительного малого параметра, характеризующего скачок плотности в пикноклине. С использованием указанного подхода рассматриваются дисперсионные свойства исходной волновой модели и анализируется спектральная устойчивость стационарных режимов стратифицированного течения с кусочно-постоянным профилем скорости.

1. Исходные уравнения. Рассматривается двумерное течение двухслойной жидкости в области, ограниченной снизу горизонтальным дном $y = -h_1$, сверху — непрони-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-71-20039).

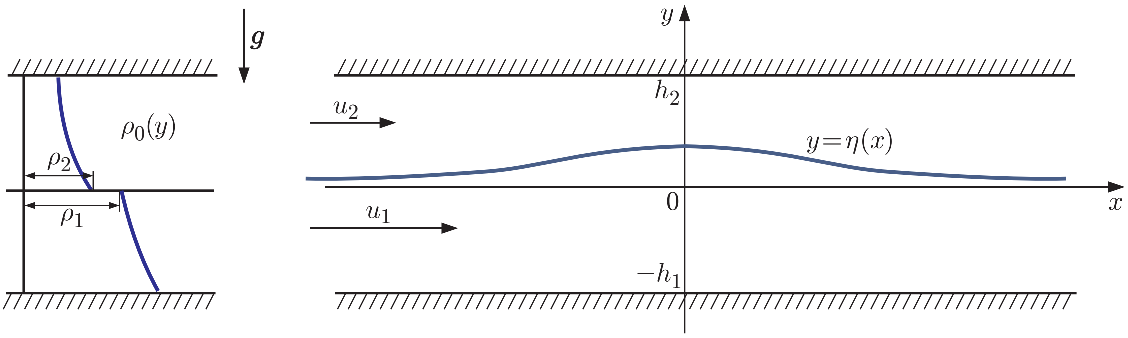

Рис. 1. Схема движения жидкости

цаемой крышкой $y = h_2$ (рис. 1). Уравнения Эйлера, описывающие движения невязкой неоднородной жидкости, имеют вид

$$\rho(u_t + uu_x + vu_y) + p_x = 0, \qquad \rho(v_t + uv_x + vv_y) + p_y = -\rho g; \tag{1}$$

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y = 0, \qquad u_x + v_y = 0, \tag{2}$$

где u, v — компоненты вектора скорости; p — давление; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения. Условия непротекания на дне и крышке записываются следующим образом:

$$v = 0\big|_{y=-h_1,\ y=h_2}, \tag{3}$$

на искомой поверхности раздела слоев $y = \eta(x, t)$ должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия

$$(\eta_t + u\eta_x = v)\big|_{y=\eta\pm 0}, \qquad [p] = 0\big|_{y=\eta}. \tag{4}$$

В невозмущенном течении граница раздела слоев находится в состоянии равновесия: $y = 0$, а вектор скорости жидкости (u, v) в j-м слое ($j = 1, 2$) является кусочно-постоянным вектором $(u_j, 0)$. Выражение для плотности жидкости в основном течении задается в виде

$$\rho_0(y) = \begin{cases} \rho_1\,\mathrm{e}^{-N_1^2 y/g}, & -h_1 < y < 0, \\ \rho_2\,\mathrm{e}^{-N_2^2 y/g}, & 0 < y < h_2. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь N_j — частота Брента — Вяйсяля, постоянная внутри j-го слоя; величины $\rho_2 < \rho_1$ являются предельными (сверху и снизу) значениями плотности на поверхности раздела. Кусочно-экспоненциальная стратификация (5) определяется безразмерными параметрами Буссинеска $\sigma_j = N_j^2 h_j/g$ ($j = 1, 2$), характеризующими вертикальный градиент плотности внутри слоев, и параметром $\mu = (\rho_1 - \rho_2)/\rho_2$, нормирующим скачок плотности между слоями (величина μ является аналогом числа Атвуда $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$). Фазовая скорость c возмущения, бегущего по заданному двухслойному течению, характеризуется плотностными числами Фруда

$$F_j^{(c)} = \frac{u_j - c}{\sqrt{g_j h_j}}, \qquad j = 1, 2, \tag{6}$$

где $g_1 = g(\rho_1 - \rho_2)/\rho_1$, $g_2 = g\mu$ — приведенные гравитационные ускорения для каждого слоя. Исходное горизонтальное течение помимо чисел Фруда $F_j \overset{\mathrm{def}}{=} F_j^{(0)}$ характеризуется также числами Лонга $\lambda_j = N_j h_j/(\pi u_j)$ $(j = 1, 2)$, которые устанавливают баланс между силами плавучести и инерции [16]. Параметры λ_j и F_j не являются независимыми и связаны соотношениями

$$\lambda_1^2 = \frac{\pi\sigma_1(1+\mu)}{\mu F_1^2}, \qquad \lambda_2^2 = \frac{\pi\sigma_2}{\mu F_2^2},$$

но одновременное их использование целесообразно в некоторых конкретных случаях. В задаче имеется безразмерный геометрический параметр $r = h_1/h_2$, представляющий собой отношение толщин невозмущенных слоев.

2. Нелинейные бегущие волны. В силу инвариантности дифференциальных уравнений (1), (2) и граничных условий (3), (4) относительно галилеева переноса по x течение является стационарным в системе отсчета, связанной с бегущей уединенной волной. Также оно является полностью определенным, если известна функция тока ψ для поля скоростей $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$. Точная формулировка задачи о стационарных волнах в двухслойной жидкости с непостоянными плотностями внутри слоев сводится к решению нелинейного эллиптического уравнения Дюбрей-Жакотэн — Лонга [1]

$$\rho(\psi)\Delta\psi + \rho'_\psi(\psi)(|\nabla\psi|^2/2 + gy) = \big(\rho(\psi)b(\psi)\big)'_\psi,$$

дополненного кинематическим и динамическим граничными условиями на поверхности раздела. В этом уравнении зависимость от ψ коэффициента плотности $\rho(\psi) = \rho_0(\psi/u_j)$ в слое с номером $j = 1, 2$, как и вид функции Бернулли $b(\psi)$, определяется заранее из условия, определяющего поведение решения при $|x| \to \infty$. Соответственно давление p восстанавливается после отыскания функции ψ из интеграла Бернулли

$$\frac{1}{2}\,|\nabla\psi|^2 + \frac{p}{\rho(\psi)} + gy = b(\psi).$$

Учитывая индивидуальное поведение функции тока $\psi = \psi_j$ в слоях, введем безразмерные переменные следующим образом:

$$(x, y, \eta) = \frac{h_1}{\pi}\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}), \qquad \psi_j = \frac{u_j h_j}{\pi}\,\bar{\psi}_j, \qquad j = 1, 2.$$

Тогда в нижнем слое функция тока $\psi = \psi_1$ является решением краевой задачи

$$\begin{gathered}\psi_{1xx} + \psi_{1yy} + \lambda_1^2\,(\psi_1 - y) = \sigma_1(\psi_{1x}^2 + \psi_{1y}^2 - 1)/2, \qquad -\pi < y < \eta(x), \\ \psi_1(x, -\pi) = -\pi, \qquad \psi_1(x, \eta(x)) = 0\end{gathered} \tag{7}$$

(здесь и далее черта над безразмерными величинами опущена). В верхнем слое аналогичные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}\psi_{2xx} + \psi_{2yy} + \lambda_2^2(\psi_2 - ry) = \sigma_2(\psi_{2x}^2 + \psi_{2y}^2 - r)/2, \qquad \eta(x) < y < \pi/r, \\ \psi_2(x, \eta(x)) = 0, \qquad \psi_2(x, \pi/r) = \pi.\end{gathered} \tag{8}$$

Из условия непрерывности давления (4) следует нелинейное граничное условие, связывающее значения производных ψ_1 и ψ_2 на поверхности раздела:

$$2\eta = F_2^2(\psi_{2x}^2 + \psi_{2y}^2 - r^2) - F_1^2(\psi_{1x}^2 + \psi_{1y}^2 - 1), \qquad y = \eta(x). \tag{9}$$

Уравнения (7)–(9) допускают, что плотность двухслойной жидкости может быть постоянной в одном из слоев или в обоих. В частности, случай $\sigma_2 = \lambda_2 = 0$ соответствует наличию приповерхностного однородного безвихревого слоя, а при $\sigma_1 = \lambda_1 = 0$ однородным является придонный слой.

Задача (7)–(9) имеет неочевидный первый интеграл

$$\int\limits_{-\pi}^{\eta} \mathrm{e}^{-\sigma_1\psi_1} \Big[\frac{1}{2}\,\mu F_1^2(\psi_{1y}^2 - \psi_{1x}^2 + 1) + \frac{1+\mu}{\pi}\Big(\psi_1 - y - \frac{\mathrm{e}^{\sigma_1\psi_1} - 1}{\sigma_1}\Big)\Big]\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\eta}^{\pi/r} \mathrm{e}^{-\sigma_2\psi_2} \Big[\frac{1}{2r^3}\,\mu F_2^2(\psi_{2y}^2 - \psi_{2x}^2 + r^2) + \frac{1}{\pi r}\Big(\psi_2 - ry - \frac{\mathrm{e}^{\sigma_2\psi_2} - 1}{\sigma_2}\Big)\Big]\,dy = C, \qquad (10)$$

в котором константа интегрирования C вычисляется на точном решении $\psi_1 = y$, $\psi_2 = ry$, $\eta = 0$, соответствующем безволновому режиму двухслойного течения. Соотношение (10) представляет собой интегральный закон сохранения потока горизонтального импульса

$$\int\limits_{-h_1}^{h_2} (\rho u^2 + p)\,dy = \mathrm{const},$$

записанный для стационарных уравнений Эйлера (1), (2) с использованием функции тока.

3. Длинноволновое приближение. Полагая параметры Буссинеска σ_1, σ_2 малыми величинами одного порядка, примем $\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma_1 = \sigma_2$ и будем рассматривать σ в качестве основного возмущающего параметра. При выводе модели длинноволнового приближения используется асимптотическое представление функций тока в виде

$$\psi_j(x,y) = \psi_j^{(0)}(\xi, y) + \sigma\psi_j^{(1)}(\xi, y) + O(\sigma^2), \qquad j = 1, 2, \qquad (11)$$

где $\xi = \sqrt{\sigma}\,x$ — медленная переменная. Коэффициенты $\psi_j^{(m)}(\xi, y)$ разложения (11) находятся в результате интегрирования получаемой из (7), (8) рекуррентной последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной y, в которые ξ входит в качестве параметра. В частности, коэффициенты низшего порядка выражаются через функцию η по формулам

$$\psi_1^{(0)} = y - \eta\,\frac{\sin\lambda_1(\pi + y)}{\sin\lambda_1(\pi + \eta)}, \qquad \psi_2^{(0)} = ry - r\eta\,\frac{\sin\lambda_2(\pi - ry)}{\sin\lambda_2(\pi - r\eta)}.$$

Подставляя ряды (11) в интегральное соотношение (10) и оставляя в нем слагаемые с точностью до величин порядка $O(\sigma^2)$, получаем уравнение второго приближения теории мелкой воды для функции η, описывающей искомую форму границы раздела:

$$\Big(\frac{d\eta}{dx}\Big)^2 = \eta^2\,\frac{P(\eta; F_1, F_2)}{Q(\eta; F_1, F_2)}. \qquad (12)$$

Здесь числитель P и знаменатель Q имеют сходную с коэффициентами $\psi_j^{(0)}$ рационально-тригонометрическую структуру зависимости от η. Так, функция P имеет вид

$$P(\eta; F_1, F_2) = \lambda_1 F_1^2\,\frac{2\lambda_1(\pi + \eta) + \sin 2\lambda_1(\pi + \eta)}{4\sin^2\lambda_1(\pi + \eta)} +$$

$$+ \lambda_2 F_2^2\,\frac{2\lambda_2(\pi - r\eta) + \sin 2\lambda_2(\pi - r\eta)}{4\sin^2\lambda_2(\pi - r\eta)} - \frac{1}{\pi} + O(\sigma), \qquad (13)$$

а функция Q — аналогичный, но более громоздкий вид. Если числа Лонга λ_j также малы, то для функций P и Q справедливы более простые приближенные выражения

$$P(\eta; F_1, F_2) = \frac{F_1^2}{\pi + \eta} + \frac{F_2^2}{\pi - r\eta} - \frac{1}{\pi} + O(|\lambda_1| + |\lambda_2|); \qquad (14)$$

$$Q(\eta; F_1, F_2) = \frac{\pi^2 F_1^2}{3(\pi + \eta)} + \frac{\pi^2 F_2^2}{3r^2(\pi - r\eta)} + O(|\lambda_1| + |\lambda_2|). \qquad (15)$$

Заметим, что в случае использования традиционного приближения Буссинеска, согласно которому в уравнениях (7), (8) пренебрегается нелинейными правыми частями с малыми параметрами σ_1 и σ_2 (см. [7]), невозможно применение точного закона сохранения (10) при выводе приближенного уравнения (12) и тем самым существенно затрудняется асимптотический анализ решений. Решения уравнения (12) типа уединенных волн описываются квадратурами

$$x = \pm \int\limits_{\eta}^{a} \sqrt{\frac{Q(s;F_1,F_2)}{P(s;F_1,F_2)}}\,\frac{ds}{s}, \tag{16}$$

где амплитуда волны определяется простым корнем $s = a$ функции $P(s;F_1,F_2)$, ближайшим к точке $s = 0$. Параметрическая область уединенных волн определяется той частью плоскости (F_1,F_2), для точек которой подкоренная функция Q/P в (16) является положительной всюду в интервале между точками $s = 0$ и $s = a$. Описание такой области зависит от свойств до- и сверхкритичности основного потока.

4. Спектр нормальных мод. Рассмотрим уравнения малых двумерных возмущений (вообще говоря, нестационарных) на фоне исходного одномерного горизонтального течения. Линеаризация системы (1), (2) и последовательное исключение искомых функций сводят ее к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка для вертикальной компоненты скорости жидкости v

$$\rho_0(D_j^2 + N_j^2)v_{xx} + D_j^2\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\rho_0\,\frac{\partial v}{\partial y}\Big) = 0,$$

где $D_j = \partial_t + u_j\,\partial_x$ — оператор переноса вдоль траекторий частиц в j-м слое невозмущенного течения. В случае задания решений в виде волновых пакетов

$$v(x,y,t) = W_j(y)\,\mathrm{e}^{ik(x-ct)}, \qquad \eta(x,t) = a\,\mathrm{e}^{ik(x-ct)}$$

с волновым числом k и фазовой скоростью c получаем задачу Штурма — Лиувилля с постоянными коэффициентами для амплитудных функций W_j, из которой следует дисперсионное соотношение

$$\Delta(k;F_1^{(c)},F_2^{(c)}) = 0, \tag{17}$$

где функция Δ имеет вид

$$\Delta(k;F_1^{(c)},F_2^{(c)}) = F_1^{(c)2}(\varkappa_1 \operatorname{ctg}\varkappa_1 + \pi\sigma_1/2) + F_2^{(c)2}(\varkappa_2 \operatorname{ctg}\varkappa_2 - \pi\sigma_2/2) - 1 \tag{18}$$

со вспомогательными безразмерными волновыми числами

$$\varkappa_j^2 = \lambda_j^{(c)2} - h_j^2k^2 - (\pi\sigma_j/2)^2, \qquad j = 1,2.$$

Дисперсионное соотношение (17) играет двойную роль. При заданном волновом числе k оно служит для определения спектра фазовых скоростей c нормальных мод внутренних волн, что позволяет делать выводы об устойчивости или неустойчивости основного течения. Известно [1], что из самосопряженности данной спектральной задачи следует существование счетного семейства вещественных собственных значений $c_n^2(k)$ $(n = 1,2,\ldots)$, среди которых только конечное число могут быть отрицательными. Эти отрицательные значения дают чисто мнимые фазовые скорости неустойчивых мод.

В случае стационарной задачи фазовая скорость волны $c = 0$ известна заранее, а спектральным параметром является волновое число k. В этом случае отсутствие вещественных корней k при заданных числах Фруда F_j интерпретируется как принадлежность точки (F_1,F_2) сверхкритической области, лежащей вне непрерывного спектра линейных гармонических волн. Именно для таких чисел Фруда основного течения возникают решения

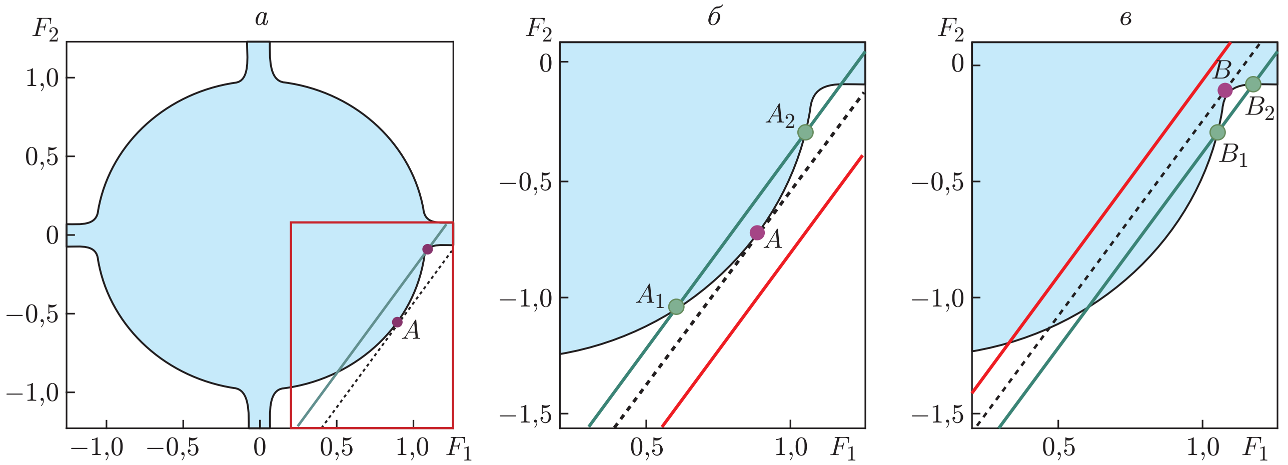

Рис. 2. Спектр главной моды внутренних волн в 2,5-слойной системе при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}000\,08$, $\mu = 0{,}003$:
а — докритическая (*1*) и сверхкритическая (*2*) области, *б* — сценарий возникновения неустойчивости Кельвина — Гельмгольца в результате появления комплексных корней дисперсионного соотношения (17), *в* — сценарий возникновения неустойчивости критического слоя

типа уединенных волн с экспоненциальной асимптотикой затухания при $|x| \to +\infty$. Заметим, что в силу галилеевой инвариантности исходной нелинейной задачи для определения картины и свойств линейного спектра в обоих случаях можно использовать одну и ту же дисперсионную функцию (18), но с разными по смыслу числами Фруда: параметрами F_j основного течения при описании стационарных волн и фазовыми числами Фруда $F_j^{(c)}$ в задаче об устойчивости, которые отличаются от F_j сдвигом Доплера в формуле (6).

На рис. 2,*а* показан спектр главной моды линейных стационарных волн, определяемый дисперсионным соотношением $\Delta(k; F_1, F_2) = 0$ для значений параметров стратификации $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}000\,08$, $\mu = 0{,}003$. Указанные величины соответствуют характерным значениям параметров $\sigma \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$, $\mu \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ в случае глубоководной стратификации в океане. Поскольку вещественные корни k при изменении чисел Фруда могут переходить на мнимую ось только через значение $k = 0$, границы модальных областей спектра задаются ветвями кривой $\Delta(0; F_1, F_2) = 0$, определяемой уравнением

$$F_1^2\Big[\sqrt{\frac{\pi\sigma(1+\mu)}{\mu F_1^2} - \Big(\frac{\pi\sigma}{2}\Big)^2}\ \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\pi\sigma(1+\mu)}{\mu F_1^2} - \Big(\frac{\pi\sigma}{2}\Big)^2} + \frac{\pi\sigma}{2}\Big] + \\ + F_2^2\Big[\sqrt{\frac{\pi\sigma}{\mu F_2^2} - \Big(\frac{\pi\sigma}{2}\Big)^2}\ \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\pi\sigma}{\mu F_2^2} - \Big(\frac{\pi\sigma}{2}\Big)^2} - \frac{\pi\sigma}{2}\Big] = 1. \qquad (19)$$

Отсюда следует, что в длинноволновом пределе $k = 0$ вещественным фазовым скоростям устойчивых мод, определяемых дисперсионным соотношением $\Delta(0; F_1^{(c)}, F_2^{(c)}) = 0$, соответствуют точки пересечения $(F_1^{(c)}, F_2^{(c)})$ кривой (19) и прямой, задаваемой формулой

$$F_2 = \alpha F_1 + \beta, \qquad (20)$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{g_1 h_1}}{\sqrt{g_2 h_2}}, \qquad \beta = \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{g_2 h_2}}.$$

Уравнение (20) получается путем исключения параметра c из равенств (6). Согласно этому графическому способу отыскания корней c трансцендентного дисперсионного соотношения (17) возможны два сценария развития неустойчивости в рассматриваемой 2,5-слойной системе. Первый из них, показанный на рис. 2,*б*, аналогичен случаю появления комплексных корней при возникновении сдвиговой неустойчивости в двухслойной жидкости с постоянными скоростями и плотностями в слоях. В предельном случае дисперсионное соотношение при $k = 0$ сводится к квадратному уравнению для c, корни которого являются вещественными при условии

$$|u_1 - u_2| < \sqrt{g(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)/(\rho_1 \rho_2)}\,. \tag{21}$$

Известный критерий (21) линейной устойчивости [17] по форме совпадает также с условием гиперболичности уравнений двухслойной мелкой воды [3, 18]. Указанное неравенство использовалось в работах [19, 20] для диагностики маргинальной устойчивости уединенных внутренних волн в глубоководных придонных течениях, разрушающихся в результате увеличения сдвига скорости в окрестности вершины волны. Локальное нарушение неравенства (21) для локальных скоростей u_j и толщин слоев h_j является показателем начала перестройки двухслойного потока и образования слоев смешения, для моделирования эволюции которых следует использовать трехслойную схему течения [21–23].

Еще один возможный сценарий возникновения комплексных корней c дисперсионного соотношения $\Delta(0; F_1^{(c)}, F_2^{(c)}) = 0$ показан на рис. 2,*в*. Этот вариант обусловлен невыпуклостью ветви кривой (19), описывающей границу спектра линейных волн для 2,5-слойной системы. Поскольку для ординаты точки касания B кривой (19) и прямой (20) имеем $F_2^{(c)} = O(\sqrt{\sigma}\,)$, фазовая скорость растущего возмущения отличается от скорости потока u_2 в нижнем слое малой величиной порядка $\sqrt{\sigma}$. Таким образом, данный сценарий можно трактовать как режим развития неустойчивости в критическом слое. Очевидно, что этот режим отсутствует в случае предельной двухслойной системы с постоянными плотностями, которая имеет выпуклую границу спектра гармонических волн — единичную окружность $F_1^2 + F_2^2 = 1$. Семейства параллельных прямых (20), показанные на рис. 2,*а,б*, свидетельствуют о возможности перехода от одного рассмотренного выше сценария к другому только за счет увеличения (уменьшения) сдвига скорости в системе с заданной стратификацией (5) и фиксированным отношением толщин слоев $r = h_1/h_2$.

5. Примеры. С использованием приближенных выражений (14), (15) для функций P и Q уравнение (12) в пределе малых чисел Лонга ($\lambda_1 \to 0$, $\lambda_2 \to 0$) можно аппроксимировать уравнением

$$\Big(\frac{d\eta}{dx}\Big)^2 = \frac{3r^2\eta^2}{\pi^3}\,\frac{r\eta^2 + \pi(rF_1^2 - F_2^2 + r - 1)\eta + \pi^2(F_1^2 + F_2^2 - 1)}{r^2F_1^2(\pi - r\eta) + F_2^2(\pi + \eta)}. \tag{22}$$

Уравнение (22) является моделью второго приближения теории длинных волн в случае постоянных плотностей в слоях [3–6], записанной с учетом принятой в настоящей работе нормировки масштабов. Знаменатель дроби в правой части (22) положителен в области физически допустимых значений $-\pi < \eta(x) < \pi/r$, поэтому числитель также должен быть положительным в окрестности значения $\eta = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда числа Фруда F_1 и F_2 удовлетворяют неравенству $F_1^2 + F_2^2 > 1$, что является условием сверхкритичности невозмущенного двухслойного течения. Решения типа уединенных волн существуют в области внутри ромба $|F_1| + r|F_2| < \sqrt{1 + r}$, а его границе соответствуют решения типа плавного бора [3]. Указанная схема служит примером использования уравнения (12), для которого функция Q должна быть положительной в окрестности границы спектра, заданной уравнением (19), а функция P — положительной в сверхкритической области.

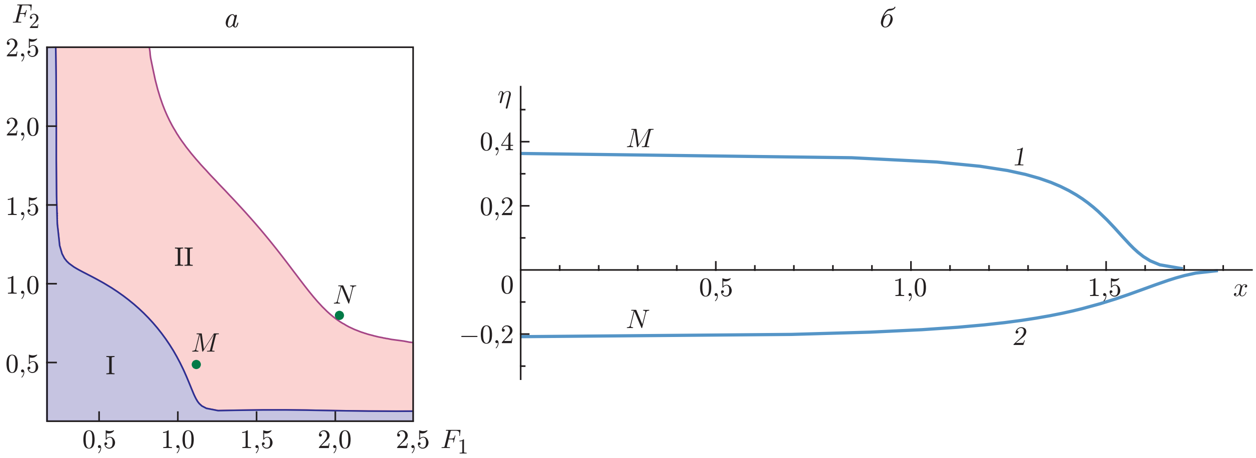

Рис. 3. Уединенные волны в 2,5-слойном течении:
а — спектры главной моды при $\sigma = 0{,}001$, $\mu = 0{,}01$ (I) и $\sigma = \mu = 0{,}001$ (II), *б* — уединенные внутренние волны типа плато, соответствующие точке M с координатами $(F_1, F_2) = (1{,}116; 0{,}423)$ (волна возвышения *1* при $\mu = 0{,}01$) и точке N с координатами $(F_1, F_2) = (2{,}020; 0{,}798)$ (волна в виде впадины *2* при $\mu = 0{,}001$)

Если хотя бы одно из чисел Лонга λ_j не является малым, вместо формул (14), (15) для P и Q в уравнении (12) необходимо использовать исходное приближение вида (13). Такая ситуация возникает, например, в случае очень слабого скачка плотности в пикноклине, когда параметр μ имеет одинаковый с параметром Буссинеска σ порядок малости. На рис. 3,*а* показаны части спектра главной моды, расположенные в первом квадранте плоскости (F_1, F_2) и полученные при одинаковых значениях параметров $\sigma = 0{,}001$, $r = 1{,}2$, но различных значениях $\mu = 0{,}001$; $0{,}010$ соответственно. На рис. 3,*б* представлены профили уединенных волн типа плато, численно построенные для точки M с координатами $(F_1, F_2) = (1{,}116; 0{,}423)$ и точки N с координатами $(F_1, F_2) = (2{,}020; 0{,}798)$. Сильная зависимость критических чисел Фруда от стратификации основного потока обусловлена тем, что в уравнении границы спектра (19) содержится отношение малых параметров σ/μ. Этот результат качественно согласуется с результатами натурных наблюдений, в которых для уединенных внутренних волн на шельфовой глубине 350 м характерный временной период прохождения волны составлял $10 \div 15$ мин [24], в то время как в условиях экстремально слабой глубоководной стратификации в придонных слоях сопоставимой толщины (приблизительно 500 м) регулярно наблюдались серии уединенных волн с периодом, приближенно равным 1 ч [25].

Заключение. В работе рассмотрена модель второго приближения теории стационарных длинных волн для двухслойной жидкости с кусочно-экспоненциальной стратификацией. Выведено модельное уравнение, которое может быть использовано для построения иерархии асимптотических подмоделей, описывающих параметрические области существования уединенных волн и характеризующих их предельные режимы. Результаты анализа спектрального портрета линеаризованной задачи о внутренних волнах в 2,5-слойной системе показали, что граница спектра нормальных мод в плоскости чисел Фруда в отличие от обычной двухслойной модели не является выпуклой. Это приводит к появлению неустойчивых мод в соответствии со сценарием, отличающимся от стандартного сценария возникновения мод сдвиговой неустойчивости Кельвина — Гельмгольца, которые также сохраняются в системе с непрерывной стратификацией внутри слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Yih C. S.** Stratified flows. N. Y.: Acad. Press, 1980.
2. **Ле Блон П. Х.** Волны в океане / П. Х. Ле Блон, Л. Майсек. М.: Мир, 1981.
3. **Овсянников Л. В.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
4. **Овсянников Л. В.** Второе приближение в теории мелкой воды // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1980. № 2. С. 175.
5. **Miyata M.** An internal solitary wave of large amplitude // La Mer. 1985. V. 23, N 2. P. 43–48.
6. **Choi W., Camassa R.** Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. 1999. V. 396. P. 1–36.
7. **Voronovich A. G.** Strong solitary internal waves in a 2,5-layer model // J. Fluid Mech. 2003. V. 474. P. 85–94.
8. **Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л.** Асимптотические модели внутренних стационарных волн // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 151–161.
9. **Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л.** Уединенные волны в двухслойной слабостратифицированной жидкости // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 72–78.
10. **Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л.** О спектре фазовых скоростей внутренних волн в слабостратифицированной двухслойной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 2. С. 125–145.
11. **Choi W.** The effect of a background shear current on large amplitude internal solitary waves // Phys. Fluids. 2006. V. 18, N 3. 036601. DOI: 10.1063/1.2180291.
12. **Barros R., Gavrilyuk S. L., Teshukov V. M.** Dispersive nonlinear waves in two-layer flows with free surface. 1. Model derivation and general properties // Stud. Appl. Math. 2007. V. 119. P. 191–211.
13. **Barros R., Gavrilyuk S. L.** Dispersive nonlinear waves in two-layer flows with free surface. 2. Large amplitude solitary waves embedded into continuous spectrum // Stud. Appl. Math. 2007. V. 119. P. 213–251.
14. **Lopes-Barros R.** Remarks on a strongly nonlinear model for two-layer flows with a top free surface // Stud. Appl. Math. 2015. V. 136. P. 263–287.
15. **Kodaira T., Waseda T., Miyata M., Choi W.** Internal solitary waves in a two-fluid system with a free surface // J. Fluid Mech. 2016. V. 804. P. 201–223.
16. **Sutherland B. R.** Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
17. **Drazin P. G.** Hydrodynamic stability / P. G. Drazin, W. H. Reid. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
18. **Овсянников Л. В.** Модели двухслойной мелкой воды // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
19. **Makarenko N., Maltseva J., Morozov E., et al.** Internal waves in marginally stable abyssal stratified flow // Nonlinear Process. Geophys. 2018. V. 25. P. 659–669.
20. **Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л., Морозов Е. Г. и др.** Внутренние стационарные волны в глубоководных стратифицированных течениях // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 2. С. 74–83.
21. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
22. **Chesnokov A. A., Liapidevskii V. Yu.** Hyperbolic model of internal solitary waves in a three-layer stratified fluid // Eur. Phys. J. Plus. 2020. V. 135. DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-00605-3.

23. **Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А., Ермишина В. Е.** Квазилинейные уравнения динамики уединенных внутренних волн в многослойной мелкой воде // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 4. С. 34–45.
24. **Duda T. F., Lynch J. F., Irish J. D., et al.** Internal tide and nonlinear wave behavior in the continental slope in the northern South China Sea // IEEE J. Ocean Engng. 2004. V. 29. P. 1105–1131.
25. **Van Haren H., Gostiaux L., Morozov E., Tarakanov R.** Extremely long Kelvin — Helmholtz billow trains in the Romanche fracture zone // Geophys. Res. Lett. 2014. V. 44. P. 8445–8451.

Поступила в редакцию 31/V 2022 г.,
после доработки — 31/V 2022 г.
Принята к публикации 27/VI 2022 г.